

02.12.2013 *Арккосинус.*

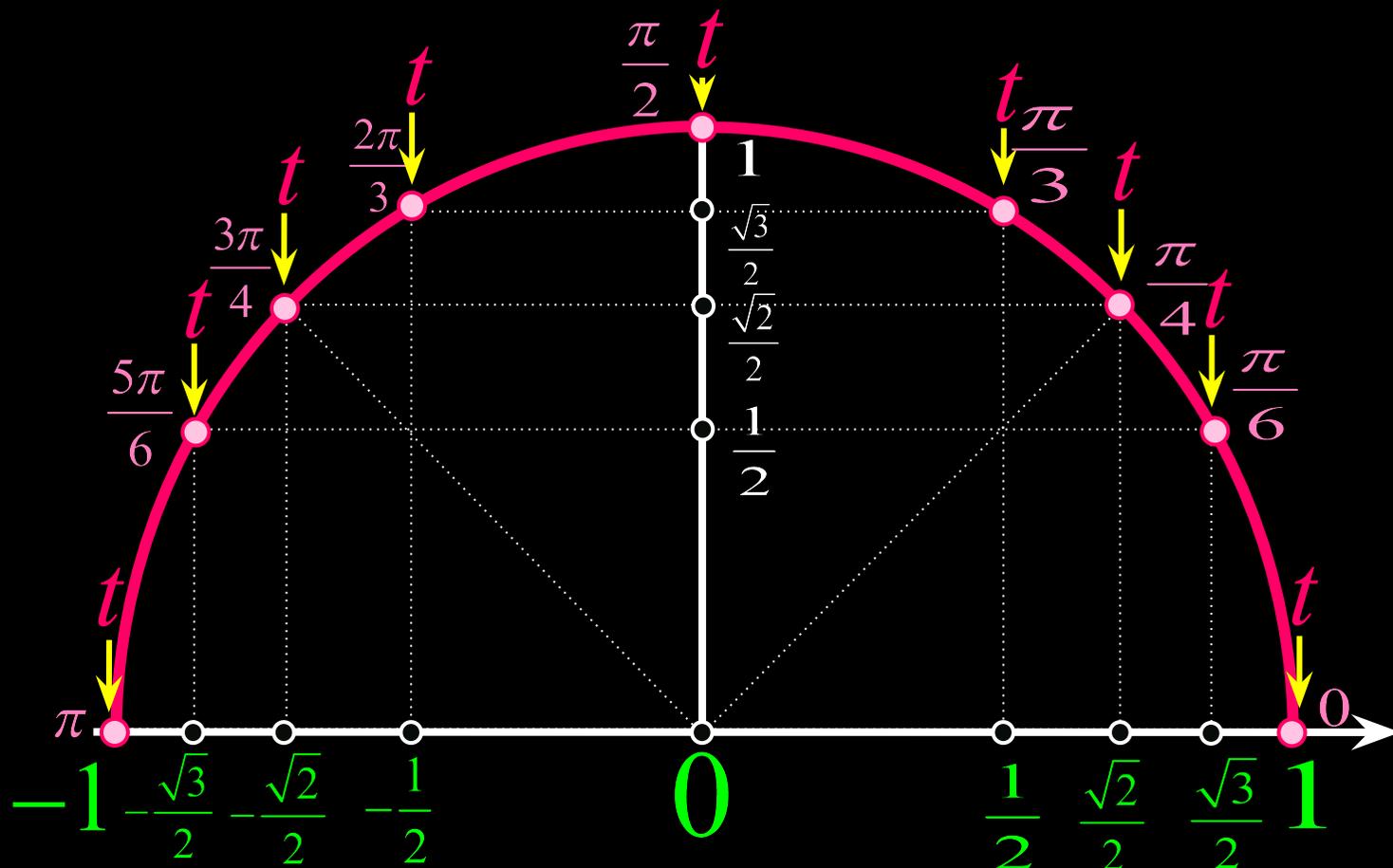
*Решение уравнений  $\cos x = a$ .*

*Урок №1*

Назовите линию на тригонометре

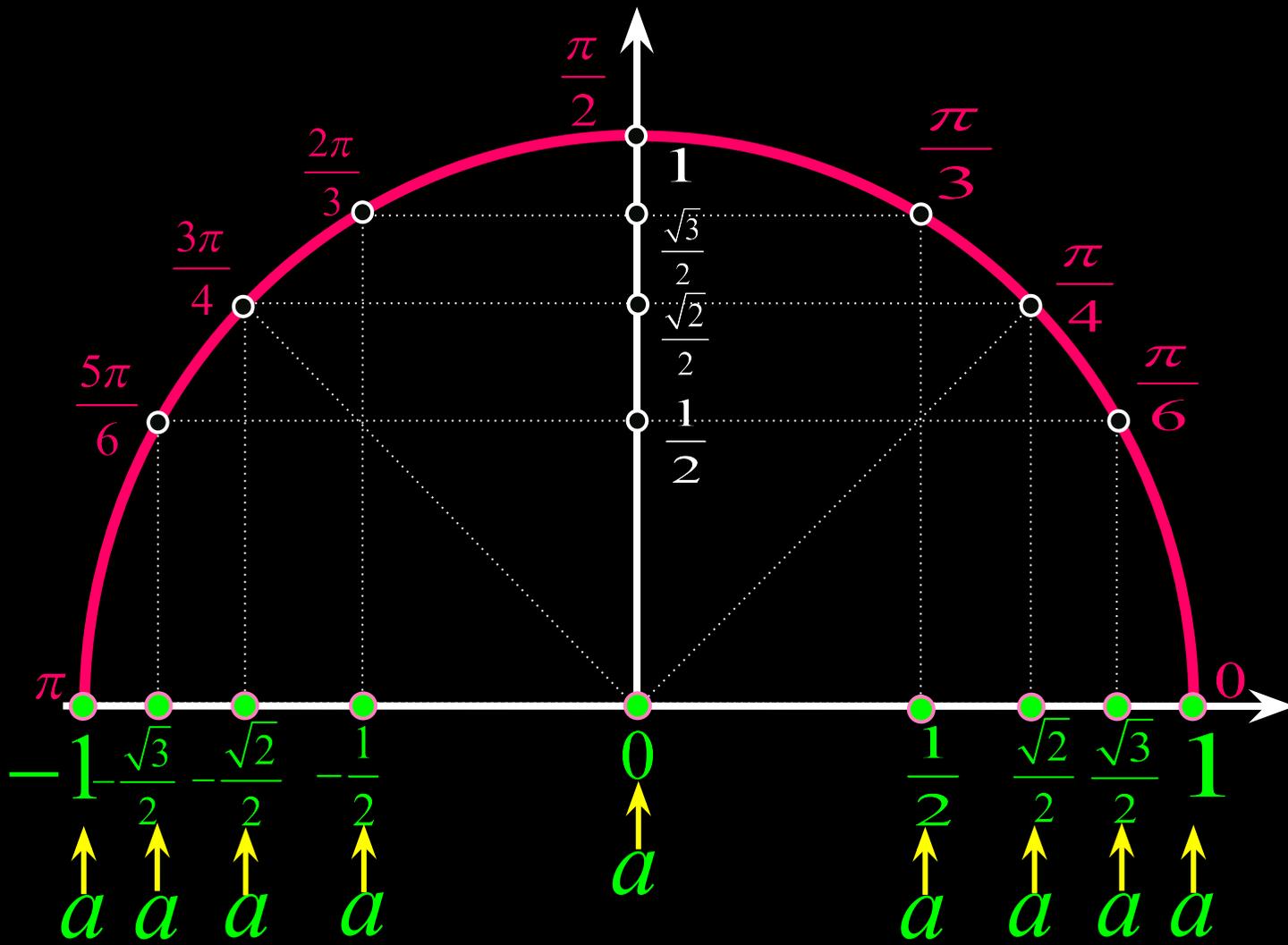
Назовите неотрицательные точные значения косинуса





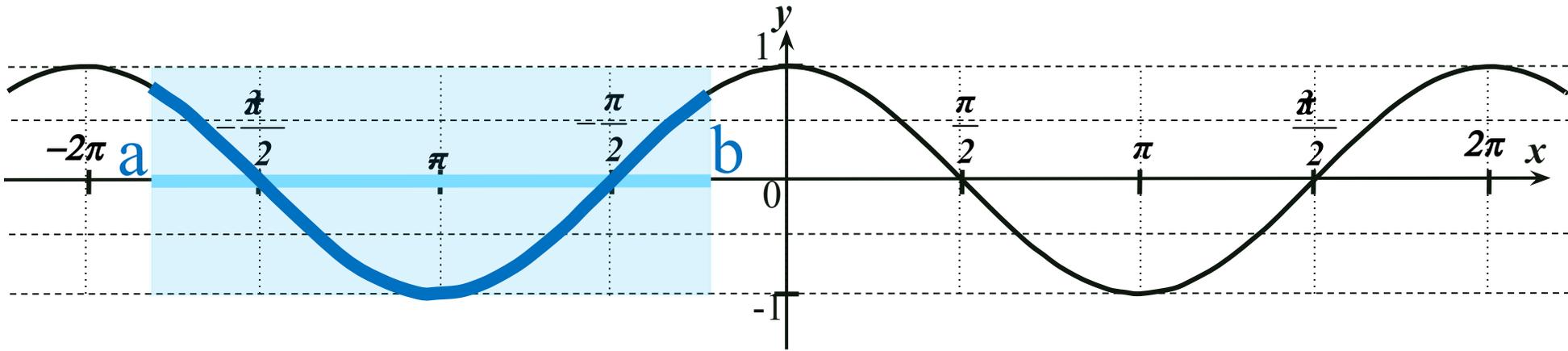
$t: 0 \boxtimes \pi$

Как меняются значения  
косинуса?



$$a = \cos t, \quad t = ?$$

$$y = \cos x$$

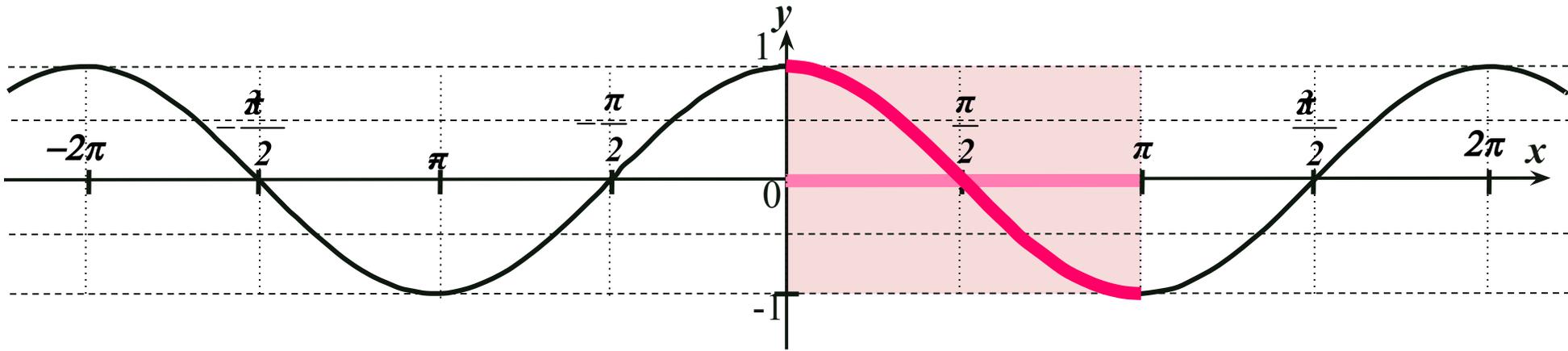


На отрезке от  $a$  до  $b$  косинус  
убывает и все свои значения  
принимает только один раз

Да

Нет  
правильно!

$$y = \cos x$$

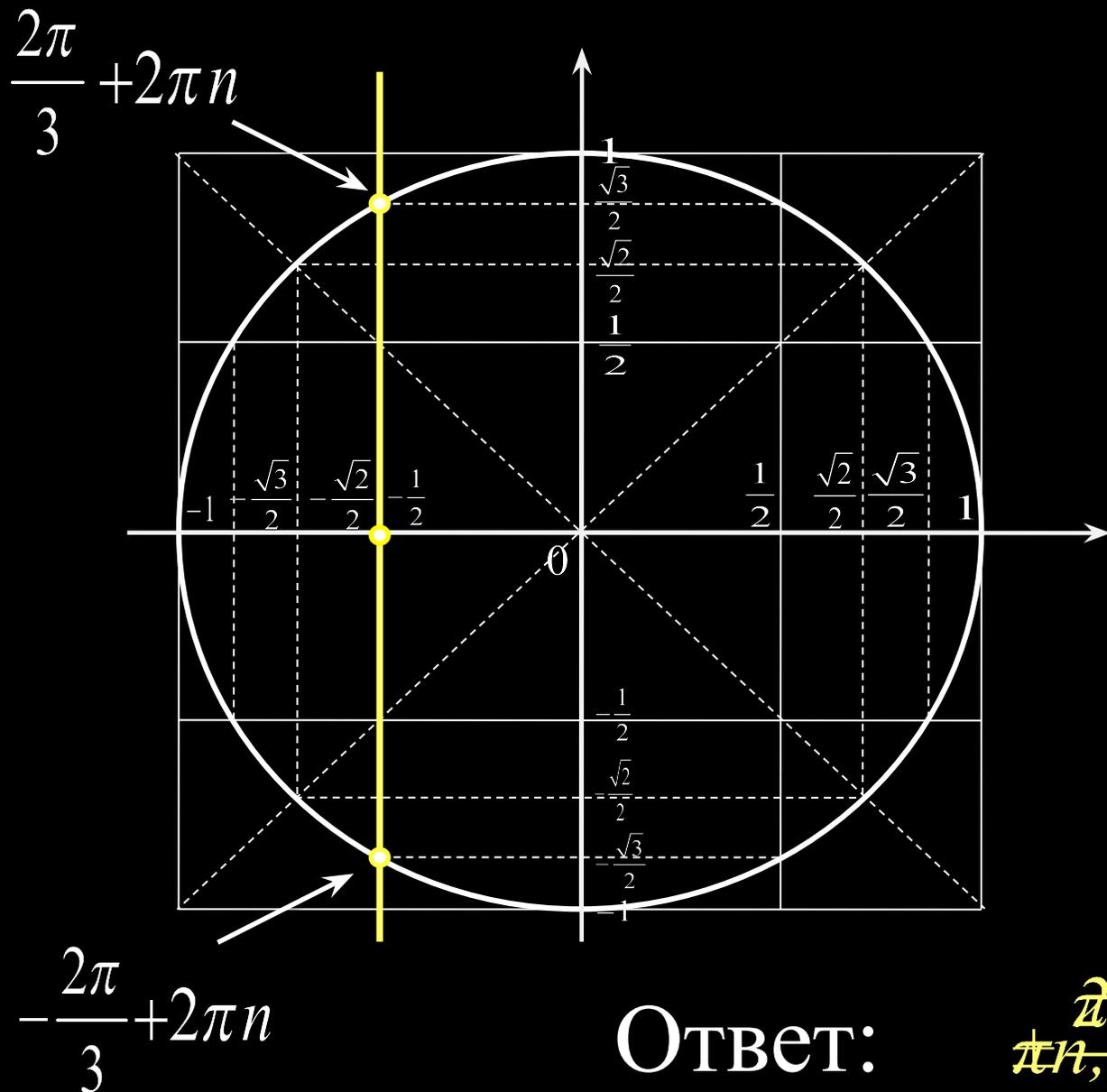


На отрезке от  $0$  до  $\pi$  косинус  
убывает и все свои значения  
принимает только один раз

Да

верно!

Нет



$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

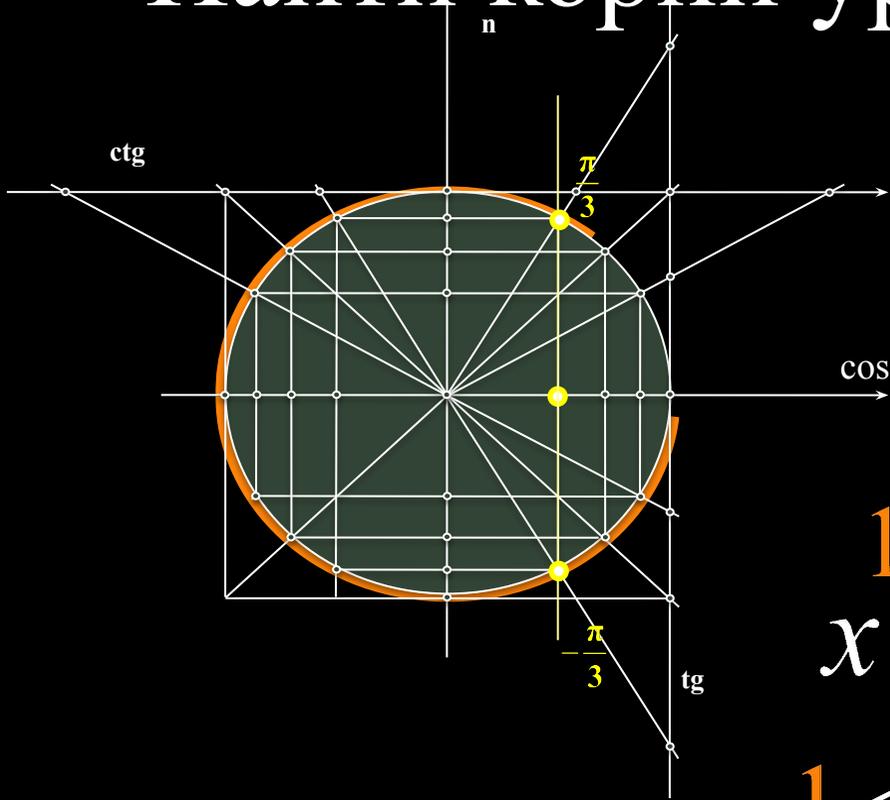
$t = ?$

ОТВЕТ:

$$\frac{2\pi}{3} + \pi n, \frac{4\pi}{3} + \pi n$$

$\in \mathbb{R}$ .

Найти корни уравнения на (1;6)



$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$1 < \frac{\pi}{3} < \pi - \text{верно};$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$1 < -\frac{\pi}{3} < 2\pi - \text{верно};$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}.$$

# *К Решение уравнений*

$$\cos x = a$$

- 1.  $|a| > 1$  - нет корней;*
- 2. частные случаи:  $a = -1; 0; 1$ ;*
- 3. решение уравнений для точных значений косинуса по тригонометру.*

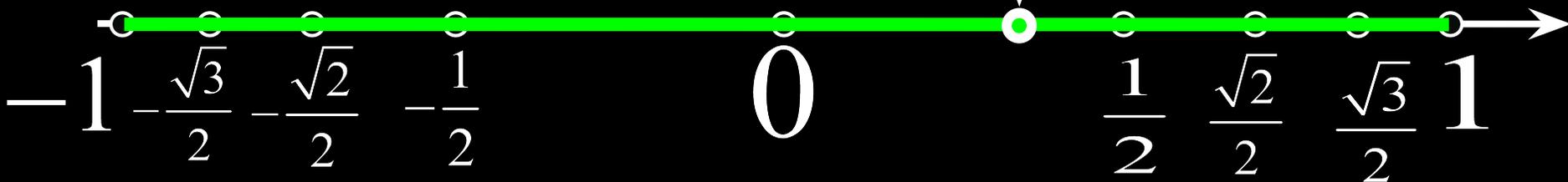
Как решать уравнение  $\cos x = a$ , если

$$a = \frac{1}{3} ?$$

Это допустимое значение  
косинуса, значит уравнение

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

имеет решение.



Решить уравнение:

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

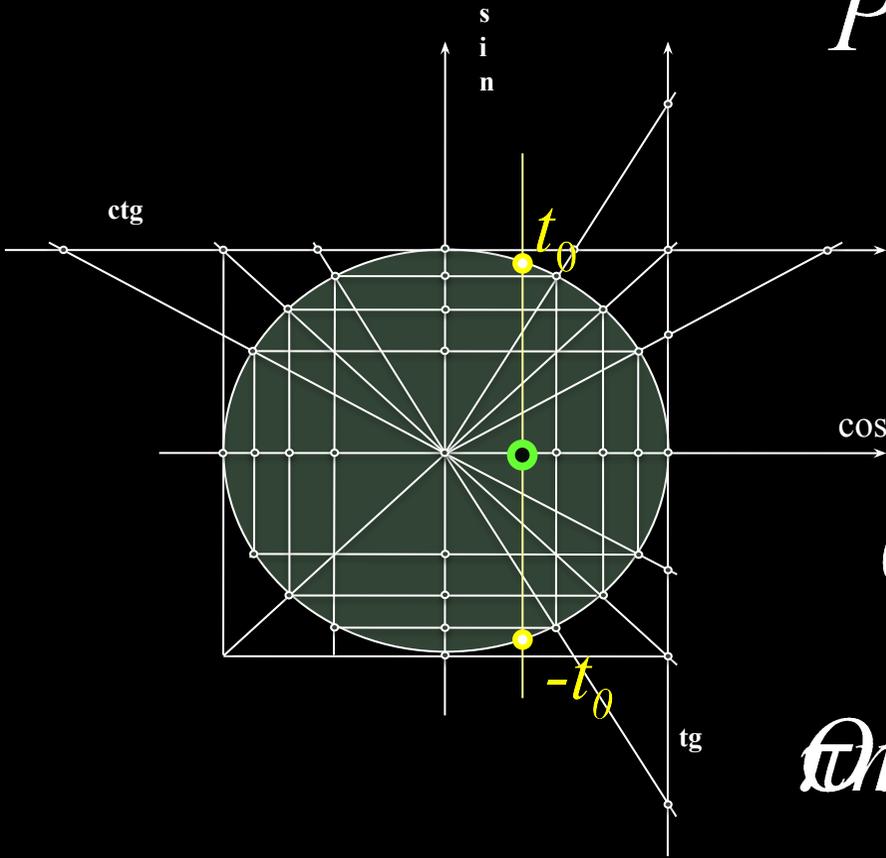
$$x = \pm t_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

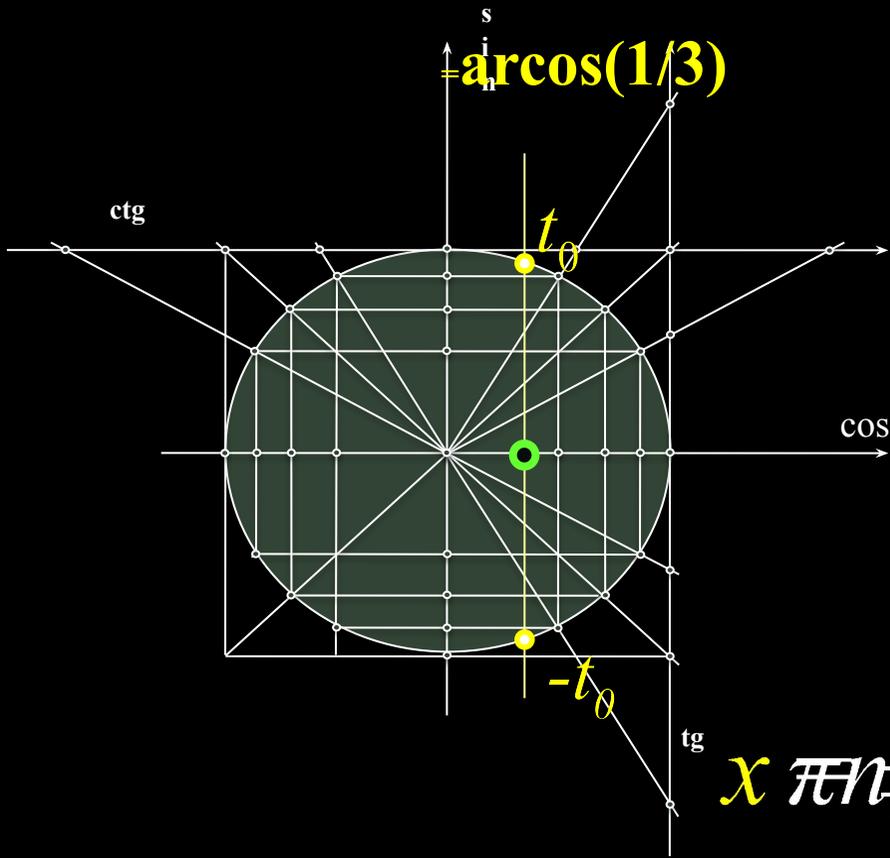
$$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{3} < t_0 < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \pm t_0 + 2\pi n$$

$t_0$  - такое число, косинус которого равен  $\frac{1}{3}$ .

$t_0$  — ?





$$\cos x = \frac{1}{3}$$

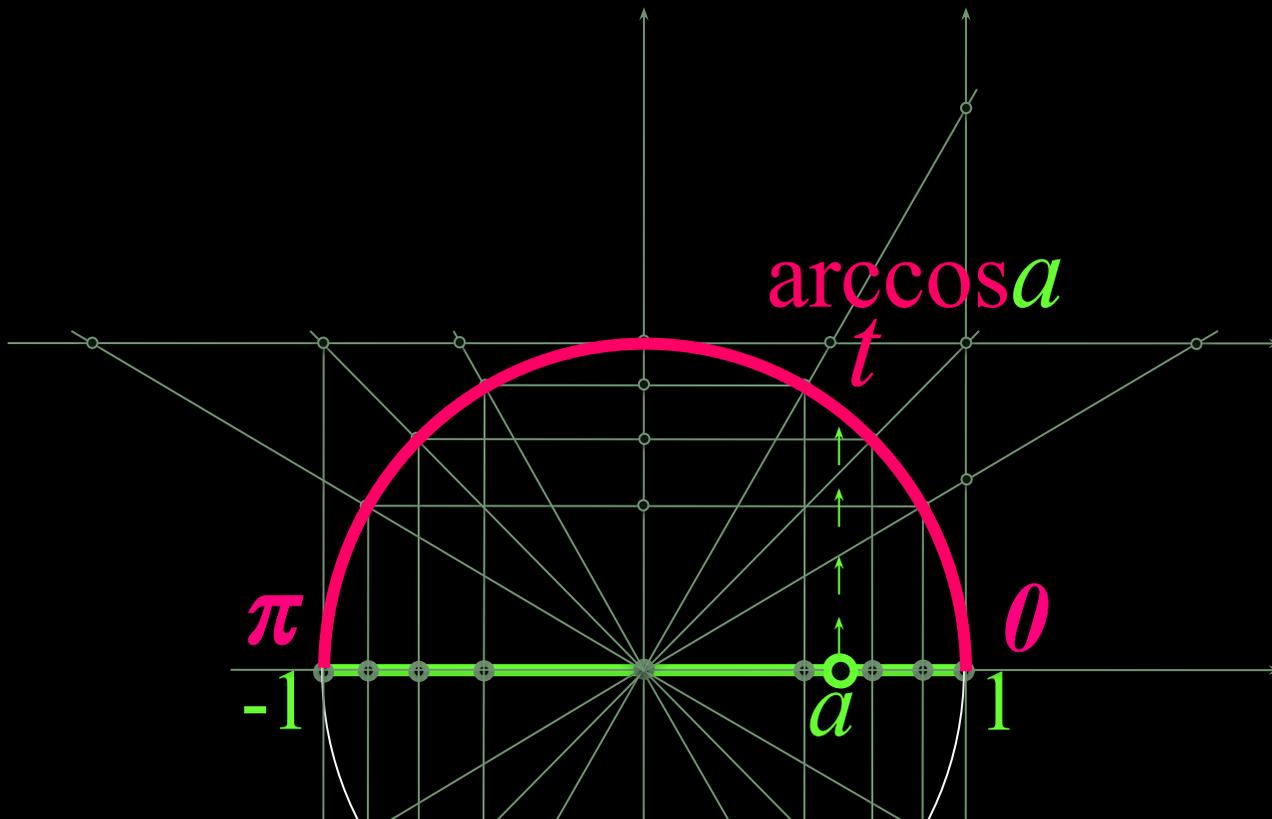
$$x = \pm t_0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t_0 = \arccos \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$t_0$  - такое число, косинус которого равен  $\frac{1}{3}$ .

$$\text{ответ } \mathbb{Z} \cdot \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi \mathbb{Z}$$



$$t = \arccos a$$

# Определение арккосинуса

Пусть  $a$  - произвольное значение

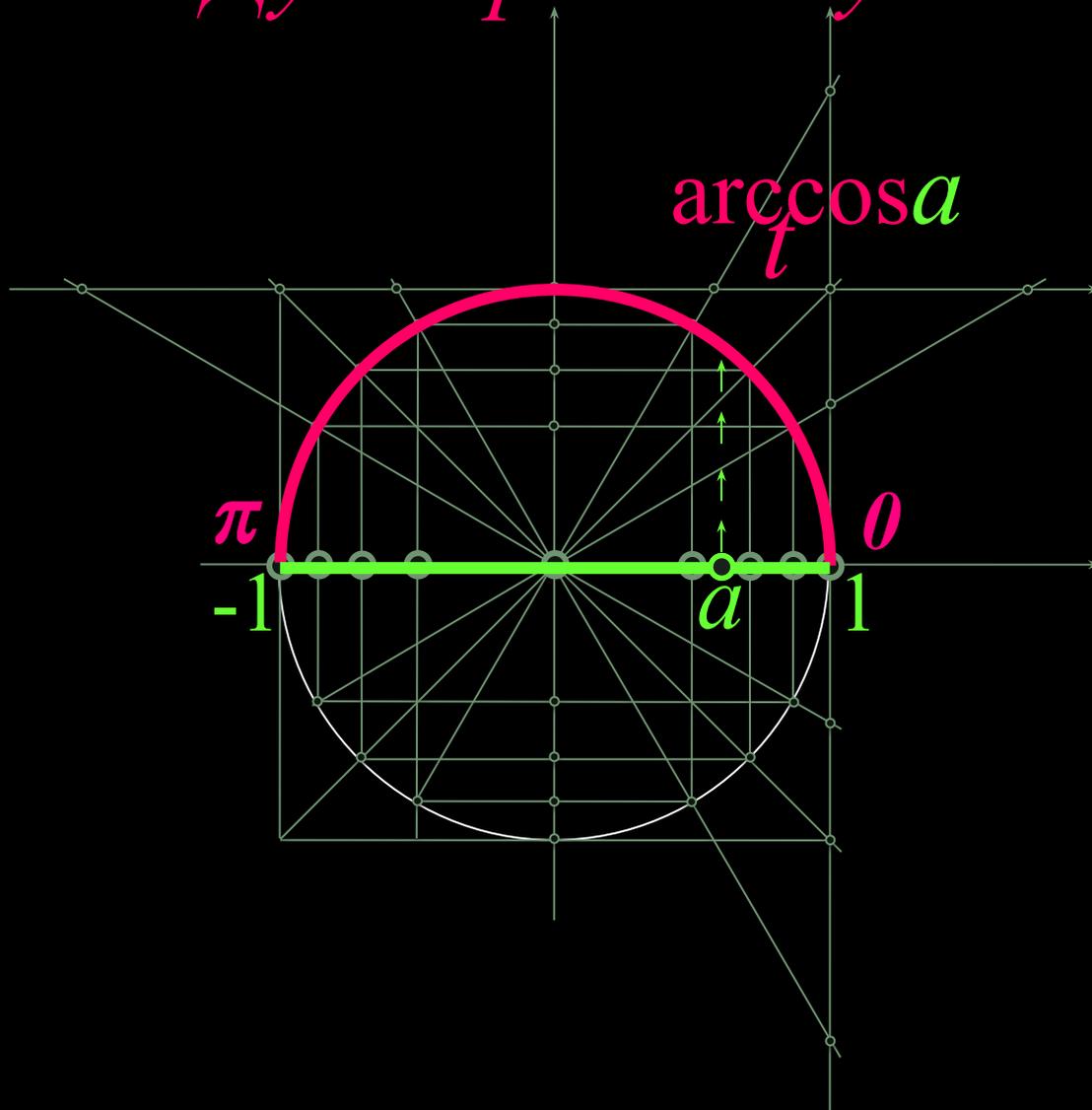
косинуса.  $a \in [-1; 1]$

$t$  - такое число, что косинус  $t$  равен  $a$  и  $0 \leq t \leq \pi$

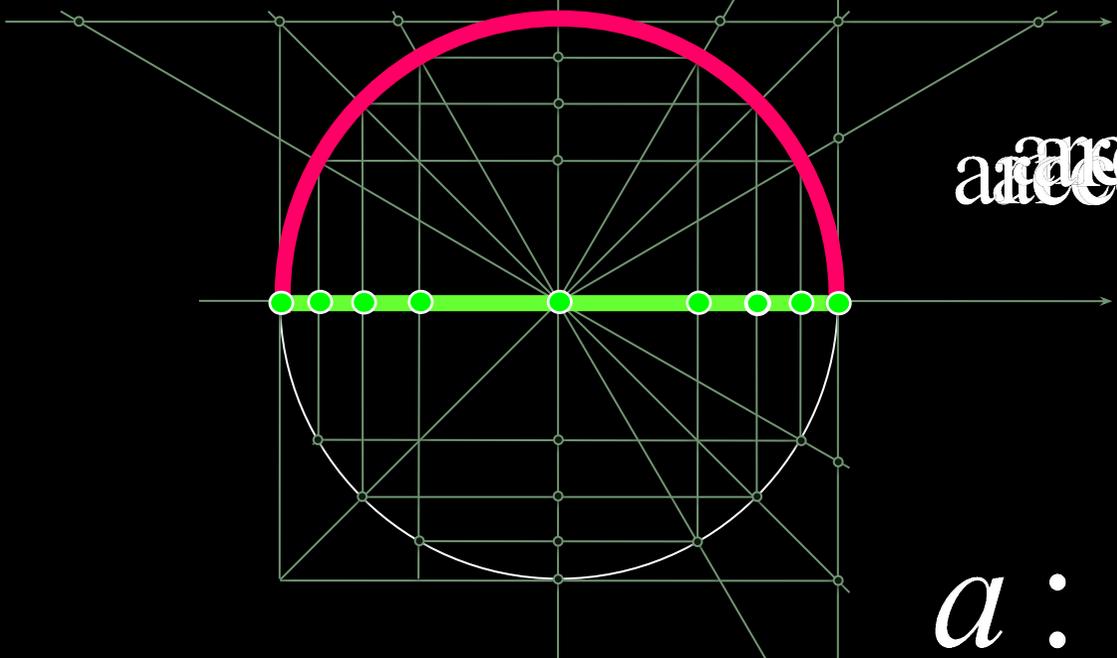
$$\cos t = a$$
$$0 \leq t \leq \pi$$

$$\left( \arccos a = t \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \cos t = a \\ 0 \leq t \leq \pi \end{array} \right)$$

# Дуга арккосинусов



Как найти значение арккосинуса, если  $a$  возрастает?



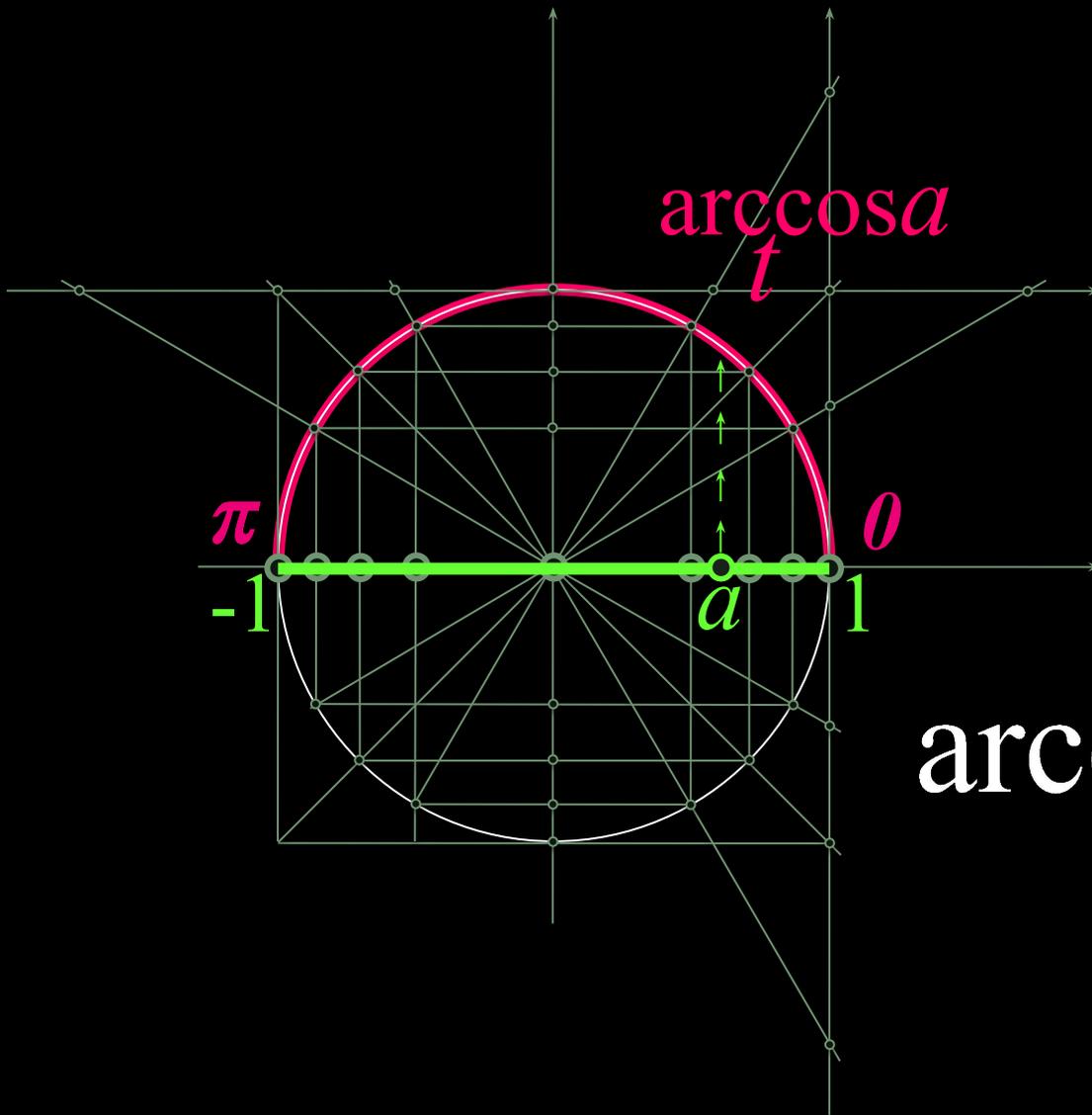
$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$a : -1 \leq 1;$$

$$\arccos a : \pi \leq 0.$$

Еквивалентна формула не може да се даде? принама да се даде?

$$\arccos a = t = a$$



$$\arccos a \in [0; \pi].$$

К

$$\arccos 0,5 = \frac{\pi}{3}$$

**Доказать, что**  
Доказательство:

$$0,5 \in [-1;1] \text{ — верно; } \pi$$

$$\arccos 0,5 = \frac{\pi}{3} \in [0; \pi], \text{ — верно, } \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = 0,5 \text{ — верно;}$$

$\arccos 0,5 = \frac{\pi}{3}$ , что и требовалось доказать.

Найти значения выражений:

$$1. \cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$2. \cos(\arccos 0) = 0;$$

$$3. \cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4. \cos(\arccos \pi) = \text{нечисловое значение}.$$

$$\cos(\arccos a) = a$$

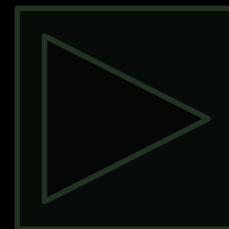
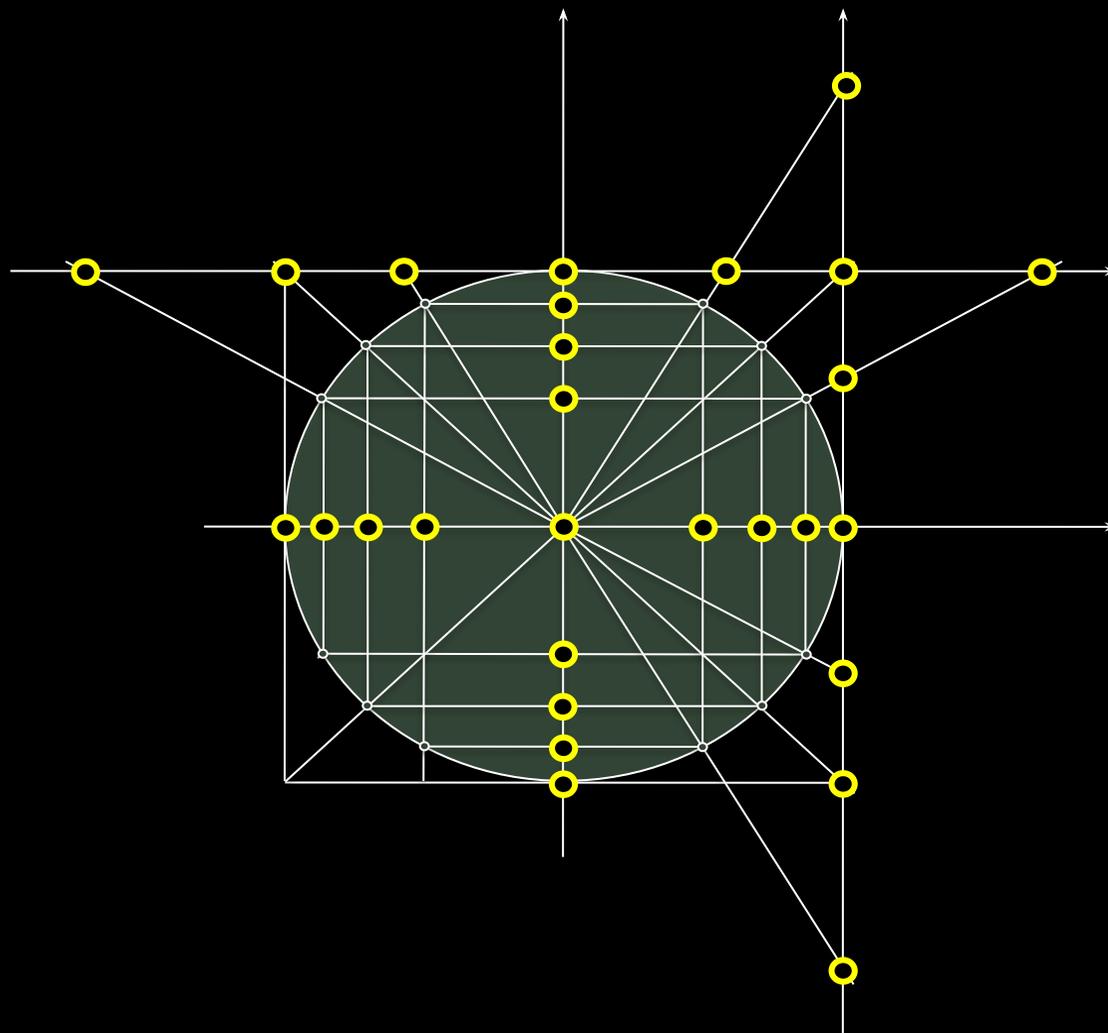
для  $-1 \leq a \leq 1$ .

*Арккосинус.*

*Решение уравнений  $\cos x = a$ .*

*Урок №2*

Назвать линию и координату точки



# Проверка домашнего задания

15.4a)

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

# Проверка домашнего задания

15.42)

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

# Заполните таблицу

<b><math>a</math></b>	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$
<b><math>\arccos a</math></b>	$\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$0$

$$a : -1 \boxtimes 1;$$

$$\arccos a : \pi \boxtimes 0.$$

Найти область допустимых значений  
 $\arccos x$ .

$$-1 \leq x \leq 1$$

*Ответ* :  $x \in [-1; 1]$

Найти область допустимых значений

$$\arccos(3-2x).$$

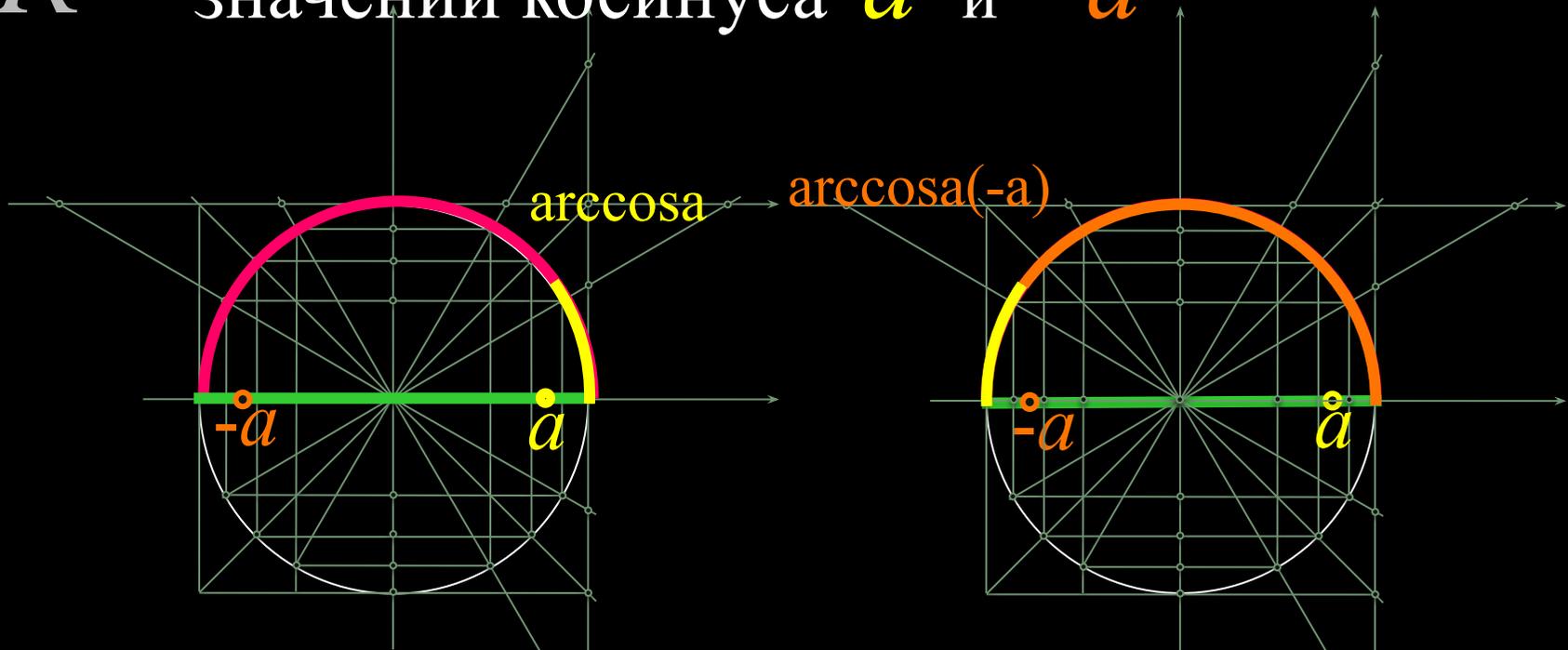
$$-1 \leq 3 - 2x \leq 1;$$

$$-4 \leq -2x \leq -2;$$

$$1 \leq x \leq 2;$$

*Ответ* :  $x \in [1; 2]$ .

*K* Свойство арккосинусов противоположных значений косинуса  $a$  и  $-a$



$$\arccosa + \arccos(-a) = \pi$$

Свойство арккосинусов противоположных чисел

$a$  и  $-a$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 < a \leq 1$$

*Например:*

$$\arccos(-1) = \pi - \arccos 1 = \pi - 0 = \pi;$$

$$\arccos(-0,5) = \pi - \arccos 0,5 = \pi - \pi/3 = 2\pi/3;$$

$$\arccos(-\sqrt{3}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi - \pi/6 = 5\pi/6.$$

*К*  
*Формула корней*  
*уравнения*

$$\cos x = a$$

*для  $|a| < 1, a \neq 0$*

*K*

$$\cos x = a$$

для  $|a| < 1, a \neq 0$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$K \quad \cos x = 0,7$$

$$a = 0,7 ; |0,7| < 1$$

$$x = \pm \arccos 0,7 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$K \quad \cos x = 0,5$$

$$a = 0,5 ; \quad |0,5| < 1$$

$$x = \pm \arccos 0,5 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

# $\cos x = a$

$|a| > 1$

Нет корней

$|a| \leq 1$

Бесконечно много корней

$a = 0, 1, -1$   
частные  
случаи

$a$ - точное  
значение  
косинуса

$a$ - не явл.  
ТОЧНЫМ  
значением  
косинуса

Вычислите:

$$\operatorname{tg} \left( \arccos \left( -\frac{5}{13} \right) \right).$$

Вычислите:

$$\operatorname{tg} \left( \arccos \left( -\frac{5}{13} \right) \right).$$

Решение:

$$1) \arccos \left( -\frac{5}{13} \right) = t, \operatorname{tg} t = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos t = -\frac{5}{13}, \\ t \in [0; \pi]; \end{array} \right| \rightarrow t \in \text{II вёрту};$$

$$\left. 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 x} \right| \rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{169}{25};$$

$$\begin{array}{l} \text{tg}^2 t = \frac{169}{25} - \frac{25}{25} = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2, \\ \text{tg} t < 0, \end{array} \left| \rightarrow \text{tg} t = -\frac{12}{5}.\right.$$

Ответ:-2,4

*Арккосинус.*

*Решение уравнений  $\cos x = a$ .*

*Урок №3*

Верно ли, что

$$\arccos(\cos t) = t?$$

*Нет.*

*Приведем опровергающий пример:*

$$t = 2\pi$$

*левая часть:  $\arccos(\cos 2\pi) = \arccos 1 = 0$ ;*

*правая часть:  $2\pi$ ,*

*$0 \neq 2\pi$ .*

Равенство

$$\arccos(\cos t) = t$$

верно только для  $t \in [0; \pi]$ .

$$\arccos \left( \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\arccos \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = ?$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) = \arccos\left(\overset{+}{\cos}\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right) =$$

3 четверть

$$\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right) = \pi - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}.$$

Решить уравнение  $\cos x = -\frac{3}{4}$   
и указать все его корни,  
принадлежащие промежуткам

а)  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right],$

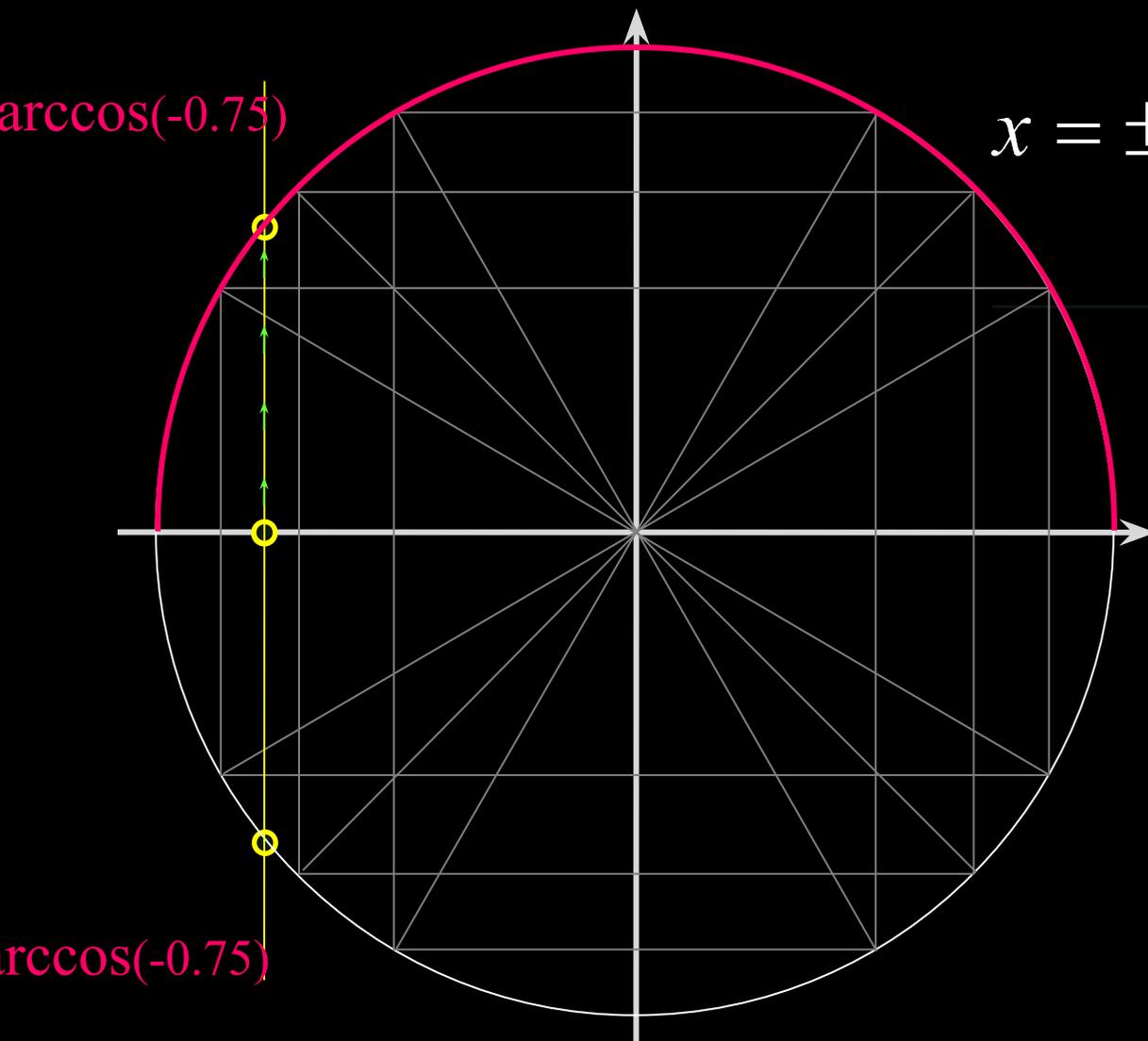
б)  $(-\pi; 0),$

в)  $\left[\pi; \frac{5\pi}{3}\right).$

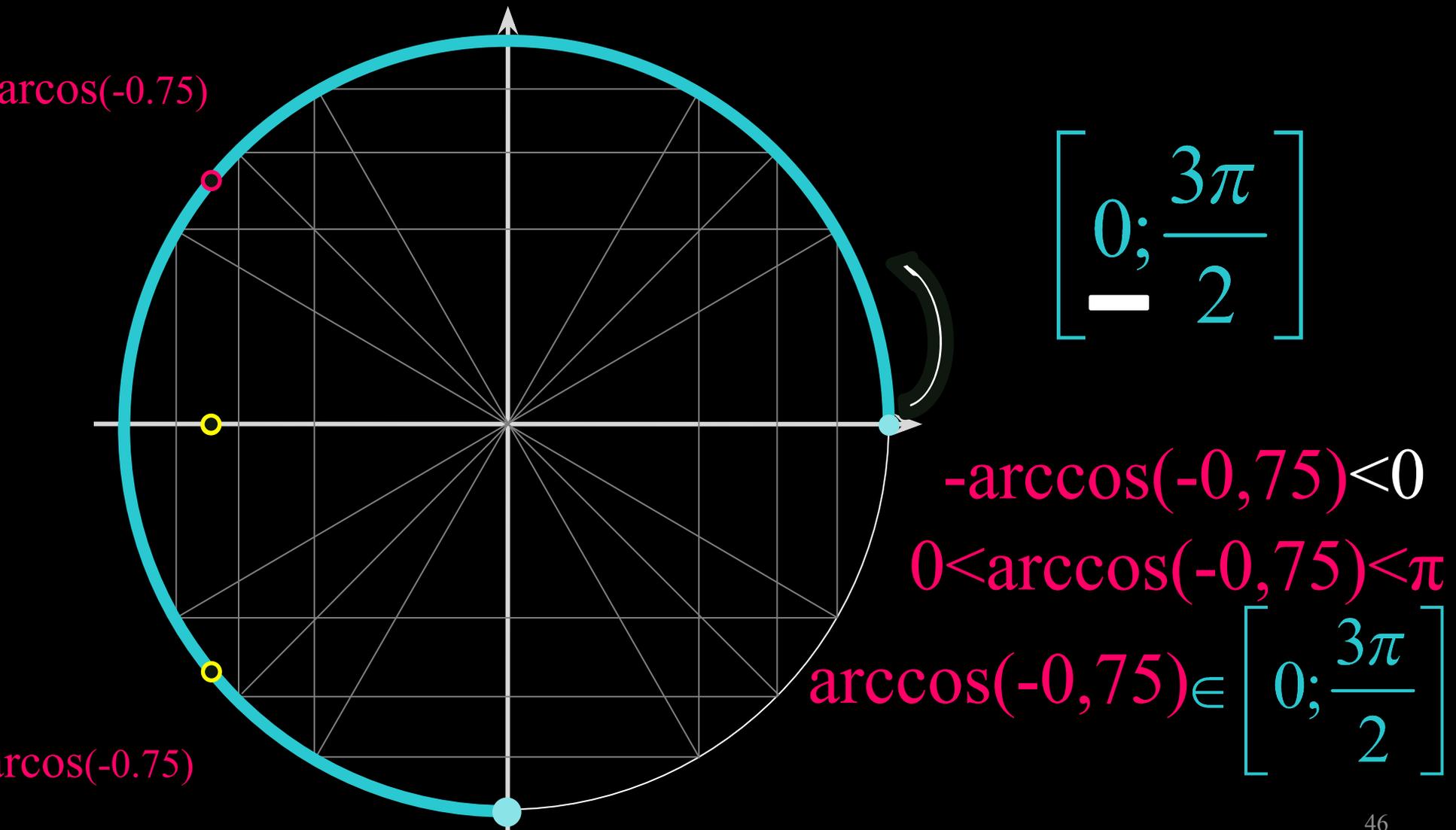
1) Решим уравнение

$$\cos x = -\frac{3}{4}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z}$$



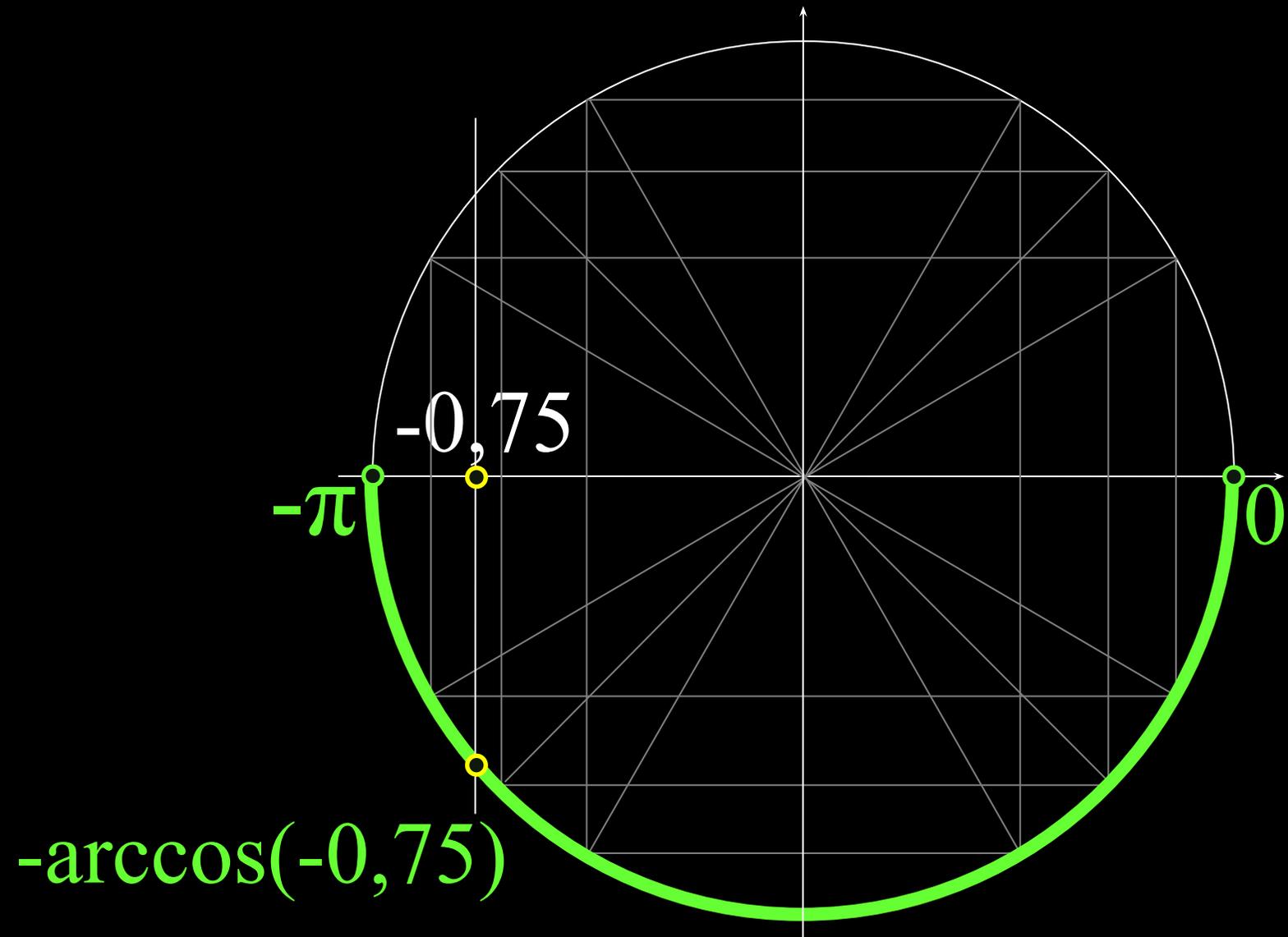
2) Найдем корни, принадлежащие дуге

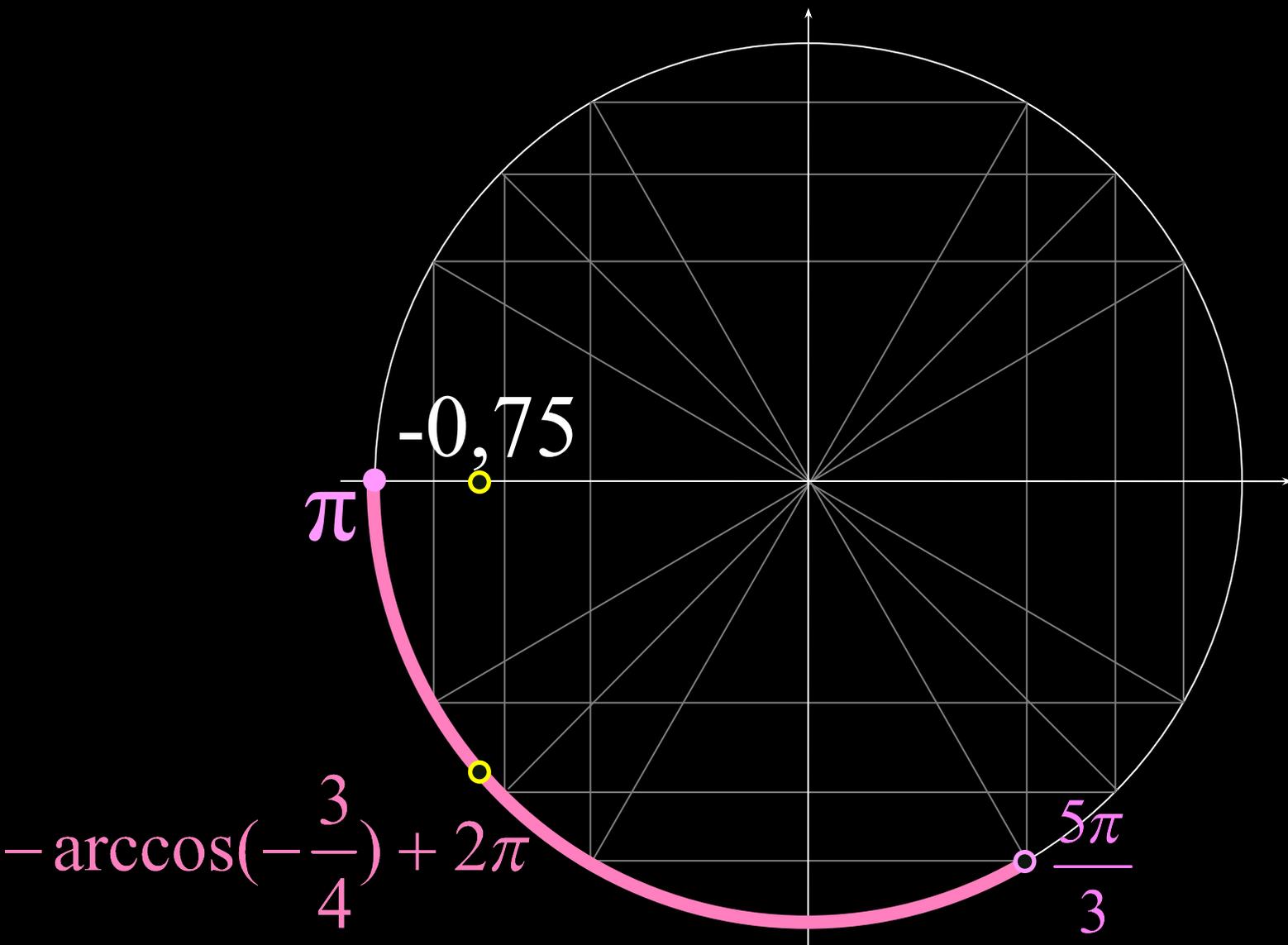


$$-\arccos(-0,75) < 0$$

$$0 < -\arccos(-0,75) + 2\pi < 3\pi/2$$

$$-\arccos(-0,75) + 2\pi \in \left[ 0; \frac{3\pi}{2} \right]$$





ОТВЕТ:

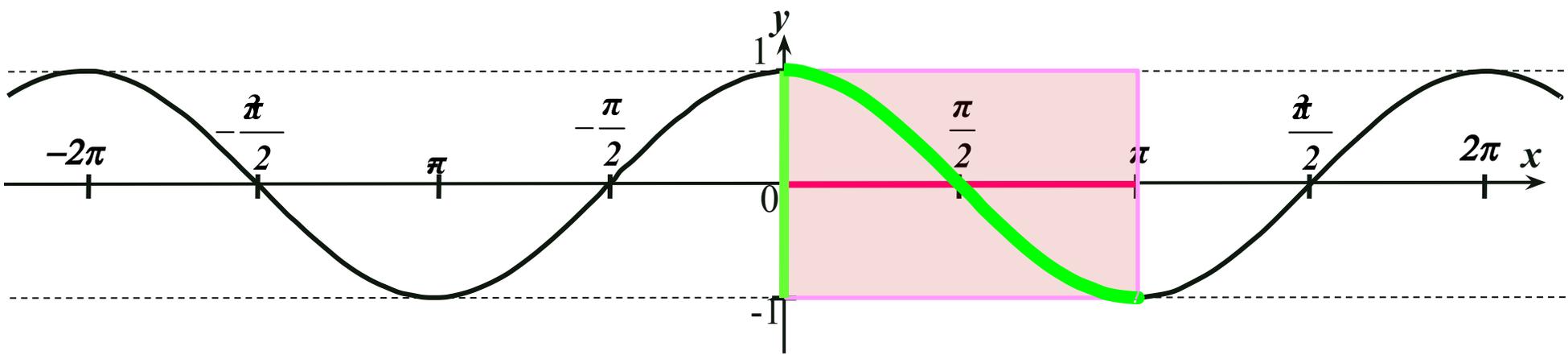
$$x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$a) \arccos\left(-\frac{3}{4}\right), -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi;$$

$$b) -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right);$$

$$в) -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi.$$

На отрезке  $[0; \pi]$  косинус убывает и все свои значения принимает только один раз



*K* Как найти по графику  $y = \cos x$   
*arccos a* ?

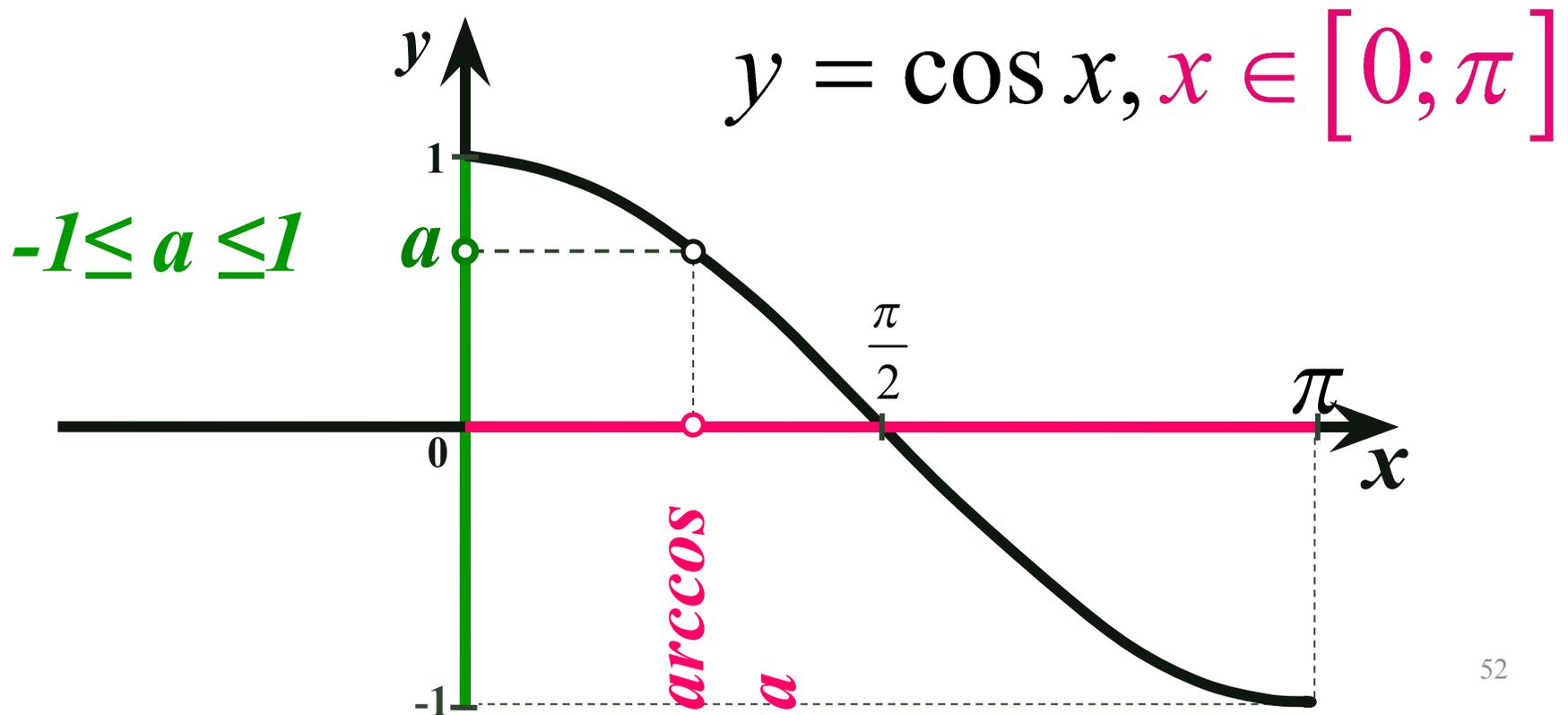
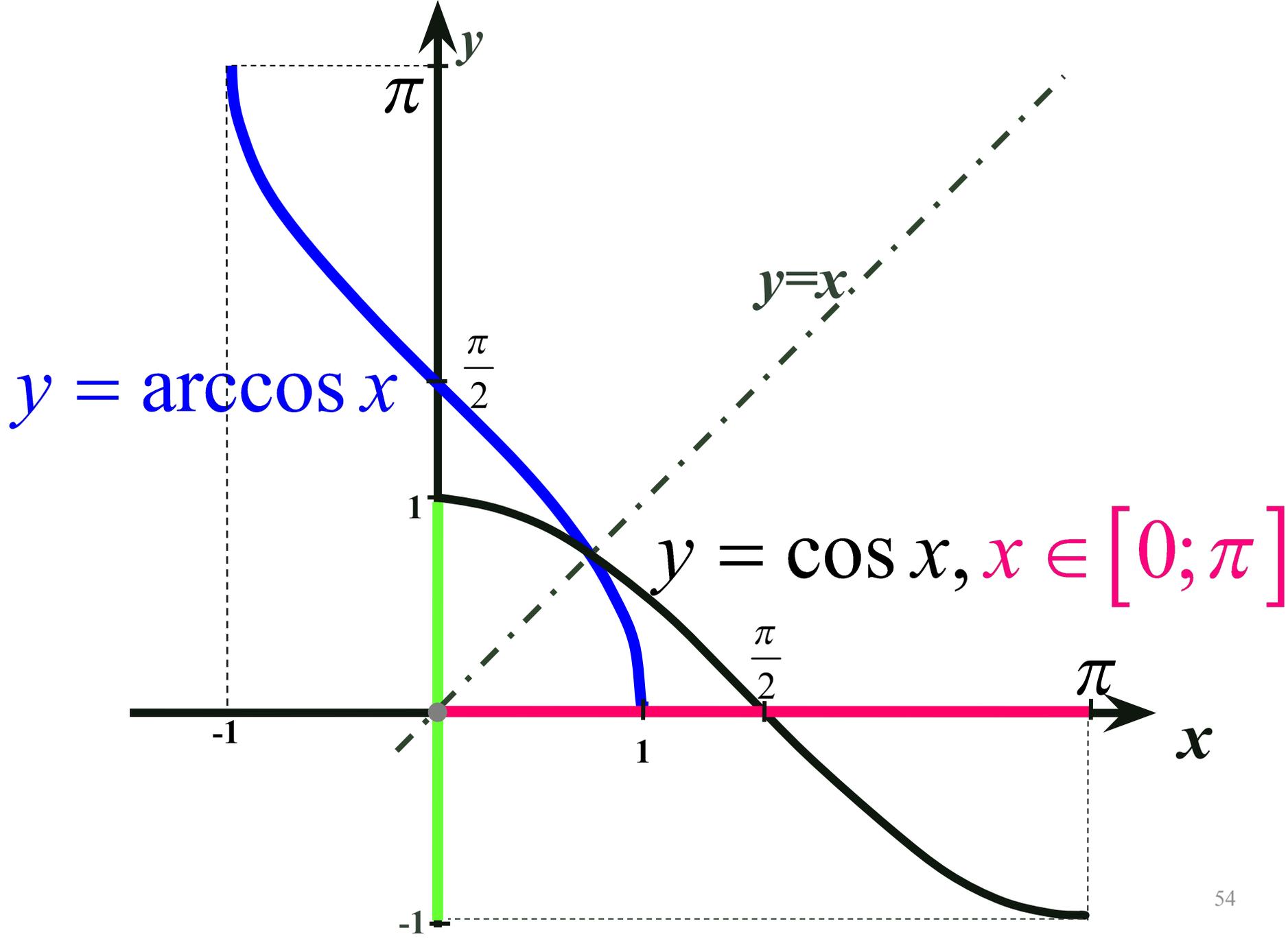


График функции, обратной

$$y = \arccos x \text{ при } x \in [0; \pi]$$



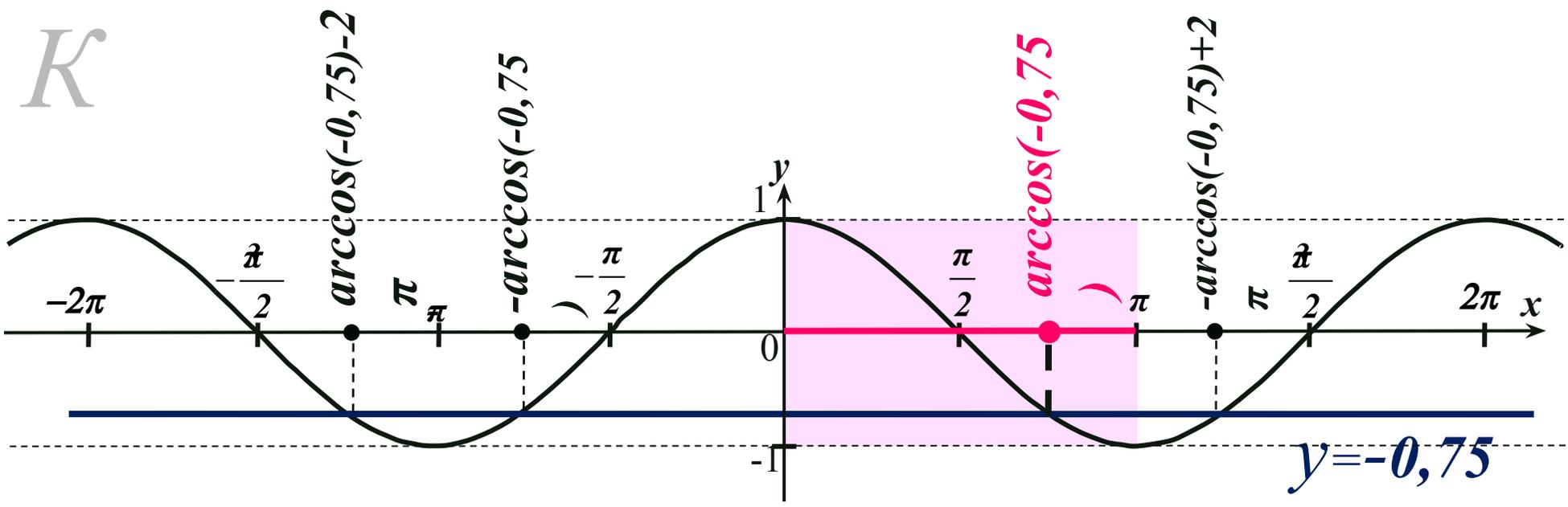
Решить уравнение  $\cos x = -\frac{3}{4}$   
и указать все его корни,  
принадлежащие промежуткам

а)  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right],$

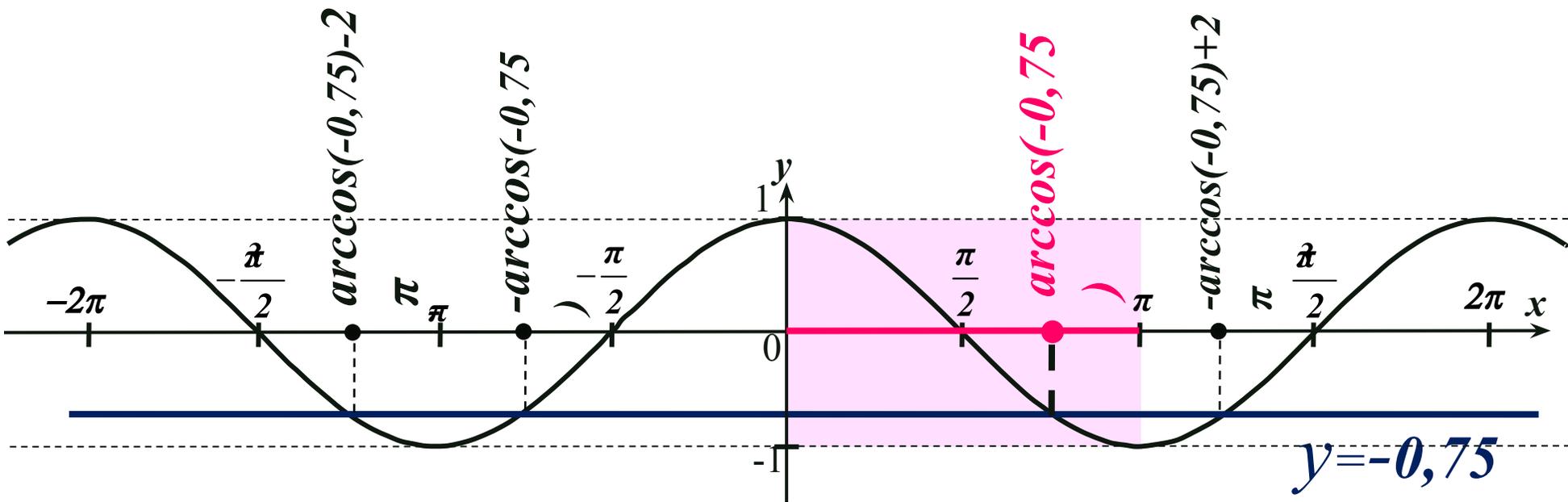
б)  $(-\pi; 0),$

в)  $\left[\pi; \frac{5\pi}{3}\right).$

*K*



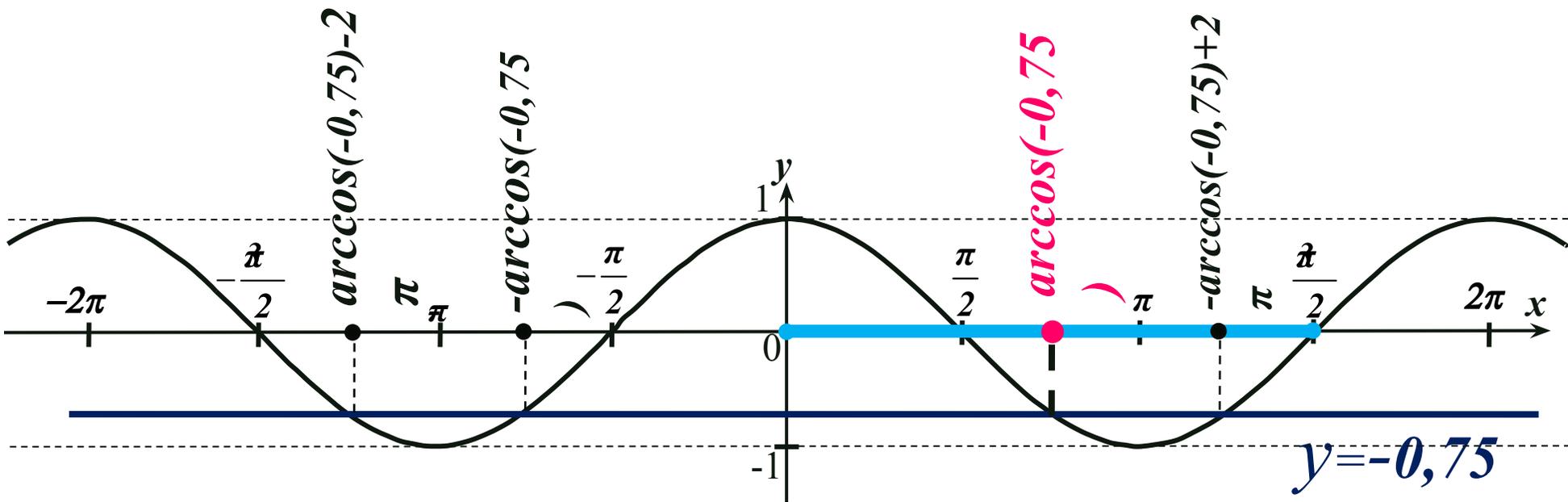
Решим уравнение графически  
 $\cos x = -0,75$



$$\cos x = -0,75$$

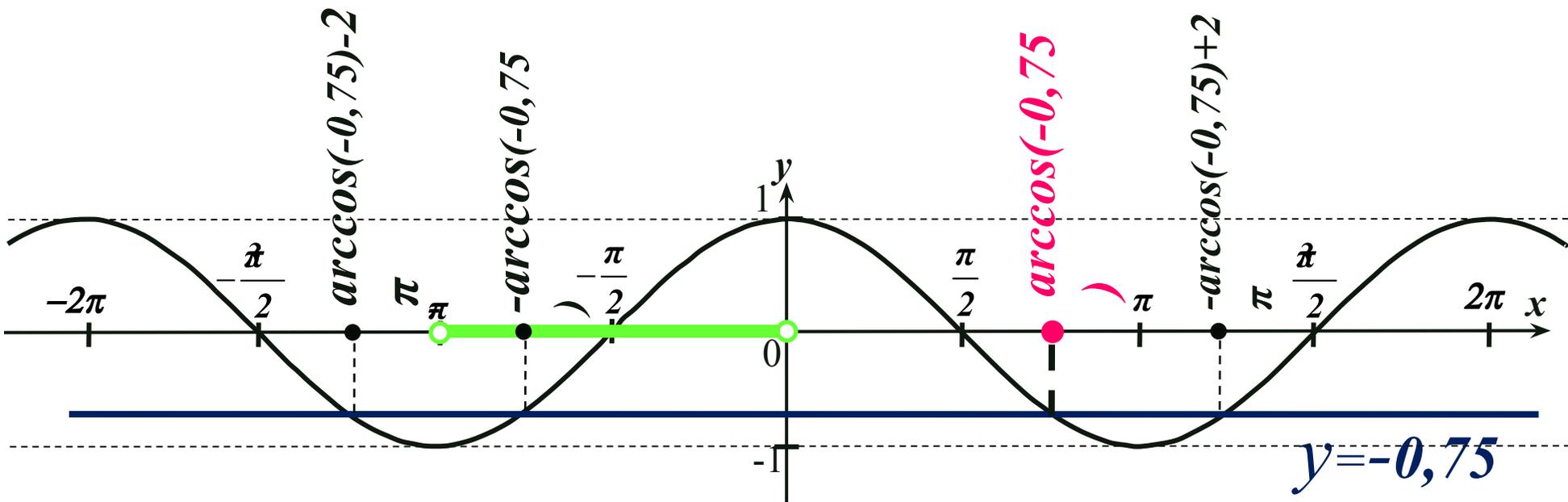
$$x = \pm \arccos(-0,75) + 2\pi n;$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \pi - \arccos 0,75 + 2\pi n \\ x = -\pi + \arccos 0,75 + 2\pi n \end{array} \right];$$



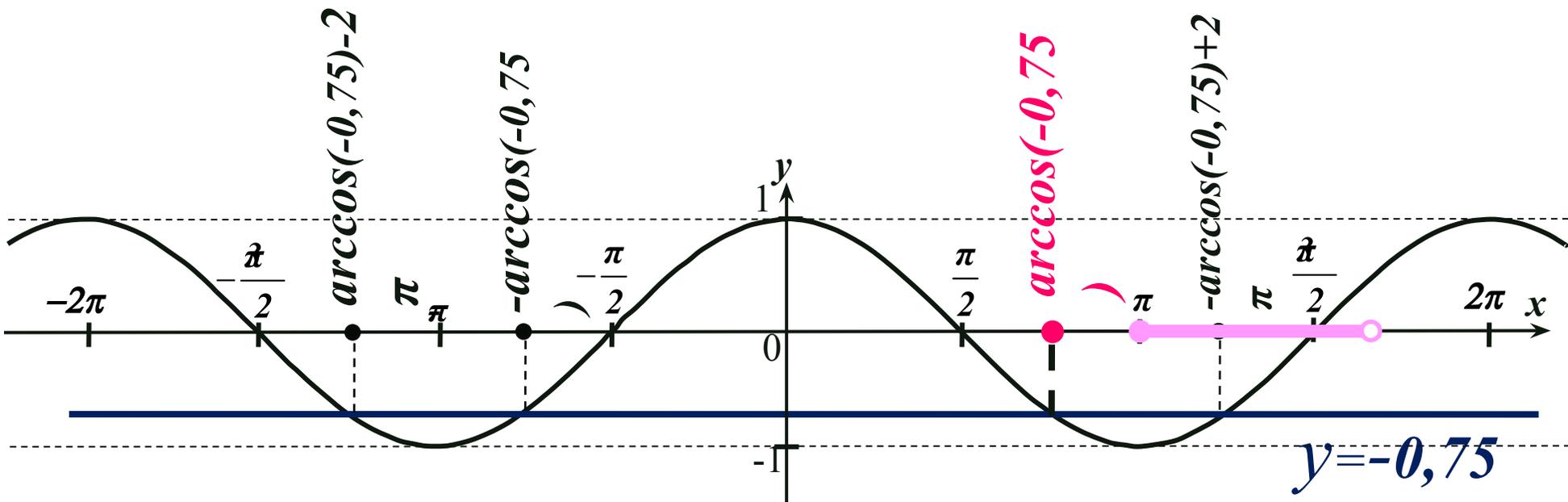
$$a) \left[ 0; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\arccos\left(-\frac{3}{4}\right), -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi;$$



$$b) (-\pi; 0)$$

$$-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right);$$



$$b) \left[ \pi; \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi.$$

ОТВЕТ:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$a) \arccos\left(-\frac{3}{4}\right), -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi;$$

$$b) -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right);$$

$$в) -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi.$$

# Используемая литература:

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11классы. В 2ч. М.:Мнемозина, 2009. ISBN 978-5-346-01136-1
2. Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ.10 кл.: Учеб. Пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики/М.:Мнемозина, 2004. ISBN 5-346-00333-9
3. А.И. Азаров, В.И. Булатов, В.С. Федосенко, А.С. Шибут. Тригонометрия(тождества, уравнения, неравенства, системы). Минск ТетраСистемс 2003 ISBN 985-470-079-8
4. В. Мирошин. Обратные тригонометрические функции. Библиотечка «Первого сентября» Математика №4(16)/2007.

# Интернет-ресурсы:

Замковая Т.Б., Нечаева Н.В.

1.От окружности до тригонометра.🏆

<http://festival.1september.ru/articles/596859>

2.Отбор корней.🏆

<http://festival.1september.ru/articles/596861/>