Тема: Полная и неполная индукция. Метод математической индукции.

Цели:

Образовательные:

- изучить метод математической индукции;
- научить применять метод математической индукции при решении задач.

Развивающие:

- содействовать развитию у учащихся мыслительных операций: умение анализировать, синтезировать, сравнивать;
- формировать и развивать общеучебные умения и навыки.

Воспитательные:

- воспитывать внимательность, аккуратность, инициативность, трудолюбие.

Дедуктивный и индуктивный метод

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. *Дедуктивный метод* рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат.

Слово *индукция* по-русски означает наведение, а *индуктивными* называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

Полная и неполная индукция

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Полная индукция

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах $4 \le n \le 20$ представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

$4=2+2$; $6=3+3$; $8=5+3$; $10=7+3$; $12=7+5$;

$14=7+7$; $16=11+5$; $18=13+5$; $20=13+7$.

Каждое из интересующих нас чисел представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

Неполная индукция

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция). Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи.

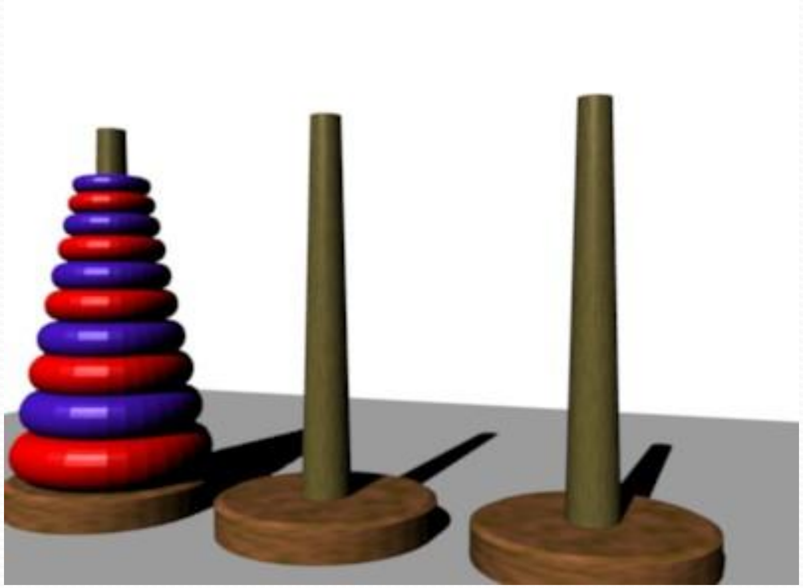
Метод математической индукции

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n. Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение:

1. проверяют сначала его справедливость для $n=1$.
2. предполагают, что при любом натуральном значении k утверждение справедливо.
3. доказывают справедливость утверждения при $n=k+1$.
4. тогда утверждение считается доказанным для всех n.

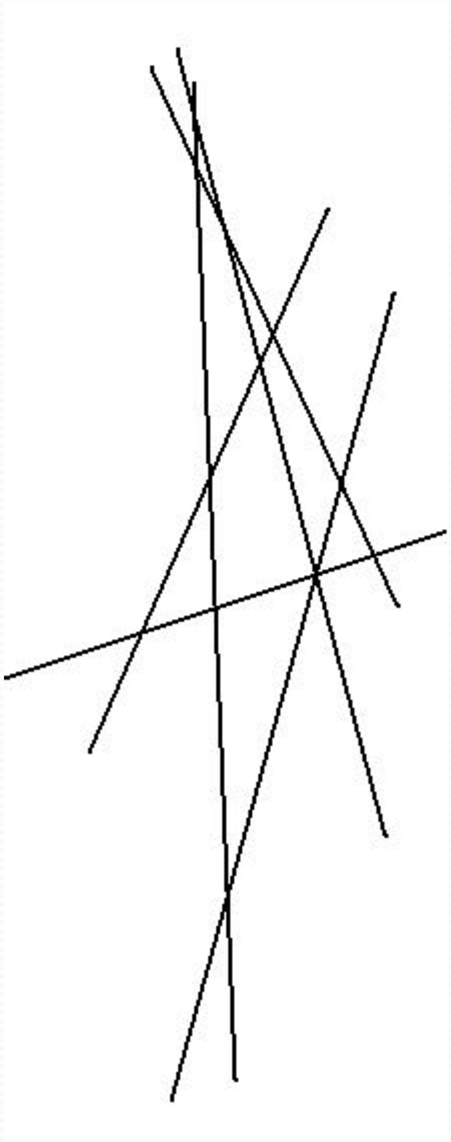
Ханойские башни

Есть три стержня и колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой?



Пересечение прямы

Докажите, что любые n прямых, расположенных на одной плоскости, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках.



Докажите тождество

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$$

- 1. [БАЗА]Проверим, работает ли эта формула при n=1:

$$1^2=\frac{1(1+\frac{1}{2})(1+1)}{3}=1,$$

- 2.[ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предположим, что тождество верно при n=k, то есть

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+\frac{1}{2})(k+1)}{3}$$

- 3.[ШАГ] Шаг индукции будет соответствовать проверке этого тождества при n=k+1, то есть нужно доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+\frac{3}{2})(k+2)}{3}$$

- 4.[ВЫВОД] Тождество верно для любого .

Группа 1.

Задача 1. Докажите, что при каждом натуральном , начиная с , существует выпуклый -угольник, имеющий ровно три острых угла.

Задача 2. Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Задача 3. Доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ делится на 133 без остатка.

Группа 2.

Задача 1. Плоскость разделена на части n прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что соседние куски будут раскрашены в разные цвета.

Задача 2. Доказать, что $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=(x^{n+1}-1)/(x-1)$.

Задача 3. Доказать, что при любом n 7^n-1 делится на 6 без остатка.

Группа 3.

Задача 1. Докажите что сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$ (или $(n-2)\pi$ радиан). В частности для треугольника получаем $(3-2)\cdot 180^\circ = 180^\circ$ а для четырехугольника $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$

Задача 2. Доказать, что при любом n справедливо утверждение: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

Задача 3. Доказать, что $3^{3n-1}+2^{4n-3}$ при произвольном натуральном n делится на 11.

Группа 4.

Задача 1. Чему равно количество кусочков, на которые n прямых (не проходящих через одну точку) делят плоскость на части? Одна прямая — на две части, две — на четыре. А пятнадцать прямых?

Задача 2. Доказать, что $1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2n-1)^3-(2n)^3=-n^2(4n+3)$ для любого натурального n.

Задача 3. Доказать, что $11^{2n}-1$ при произвольном натуральном n делится на 6 без остатка.

Рефлексия

- Математическое исследование
  - дедуктивный метод
    - рассуждение от общего к частному
  - индуктивный метод
    - рассуждение от частного к общему
      - неполная индукция
        - 1.база - проверить истинность при n=1
          2.предположение - утверждение верно при n=k
          3.шаг - доказать истинность утверждения при =k+1
          4.вывод
      - полная индукция

Лаговская Е.В. учитель математики и информатики
Школа-лицей «Дарын» г. Петропавловск
Северо-Казахстанская область