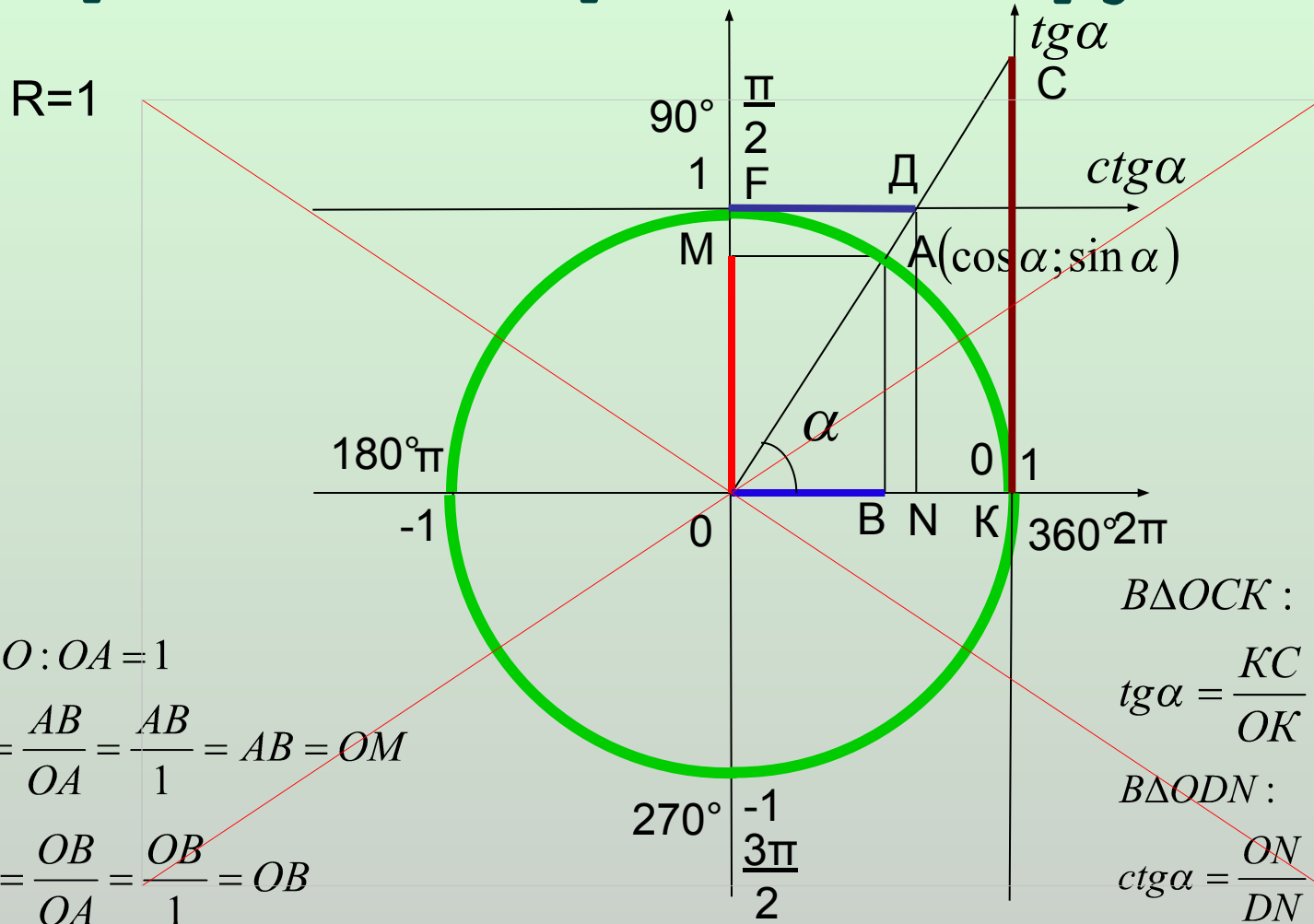


Пособие для учащихся 10 классов.

Тригонометрические функции



$B\Delta ABO: OA = 1$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB = OM$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB$$

$B\Delta OCK:$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{KC}{OK} = \frac{KC}{1} = KC$$

$B\Delta ODN:$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ON}{DN} = \frac{ON}{1} = ON = FD$$

По теореме Пифагора:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Определения



Синусом числа x называется **ордината** точки A ,
косинусом числа x называется **абсцисса** точки A ,
которая получена поворотом начальной точки
единичной окружности на угол x .

Тангенсом числа x называется отношение
синуса числа x к косинусу числа x ,
котангенсом числа x называется отношение
косинуса числа x к синусу числа x .



Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$
называются **тригонометрическими**

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для некоторых углов.

$$180^\circ = \pi \text{ радиан}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \quad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\beta \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \beta$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

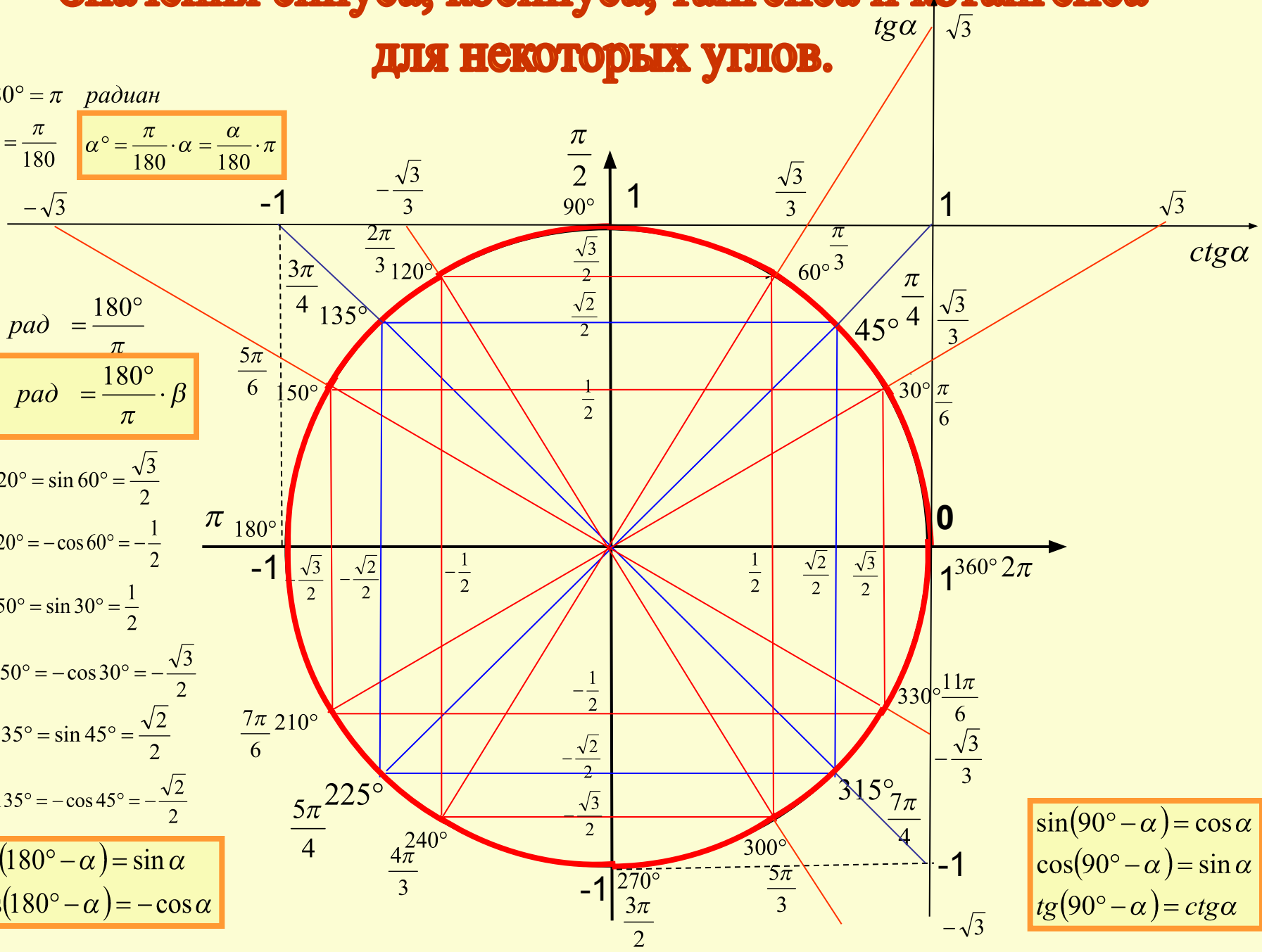
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

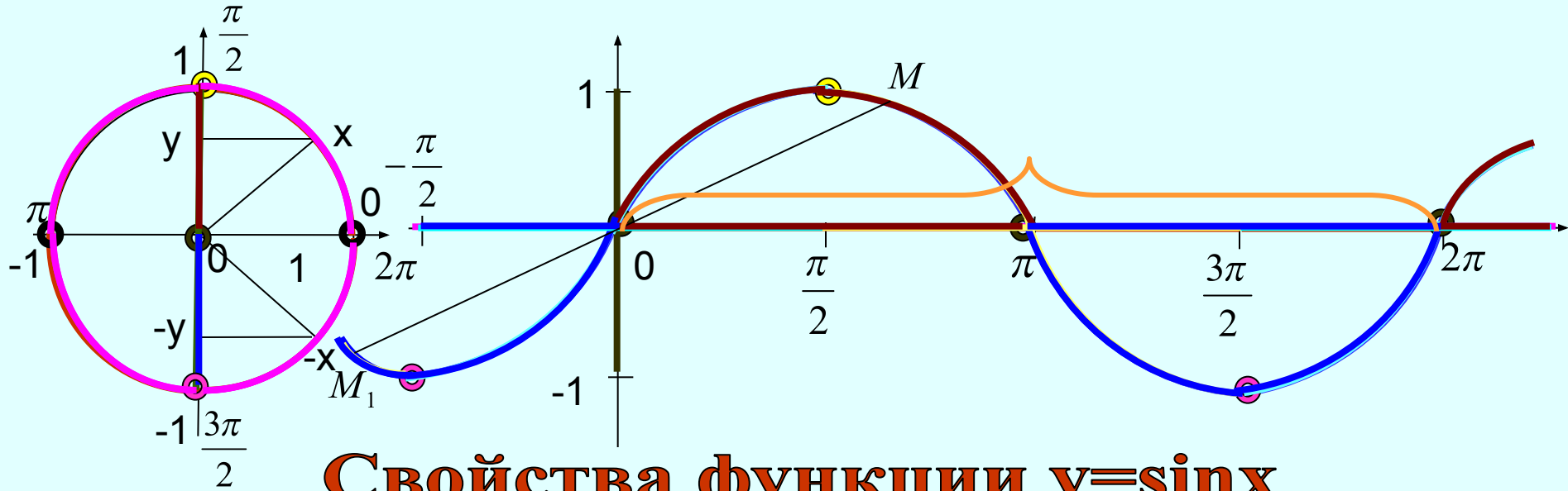
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$



Построение графика функции $y = \sin x$



Свойства функции $y = \sin x$

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) $E(y) = [-1; 1]$

3) $T = 2\pi$

4) Функция нечетная

а) $D(y)$ симметрична относительно точки O

б) $y(-x) = -y(x)$

5) $y = 0$ при $x = \pi n$

6) $y_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

7) $y_{\text{наим.}} = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

8) монотонность

а) функция \uparrow на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$

б) функция \downarrow на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$

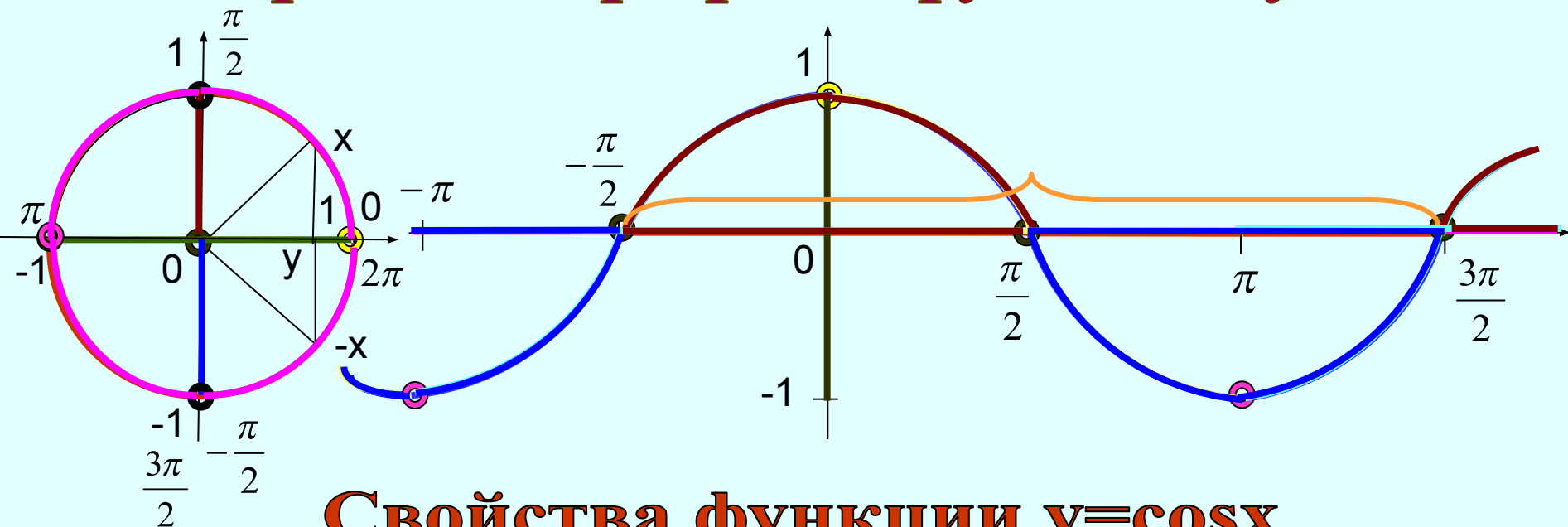
9) промежутки знакопостоянства

а) $y > 0$ на $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$

б) $y < 0$ на $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$

$n \in \mathbb{Z}$

Построение графика функции $y = \cos x$



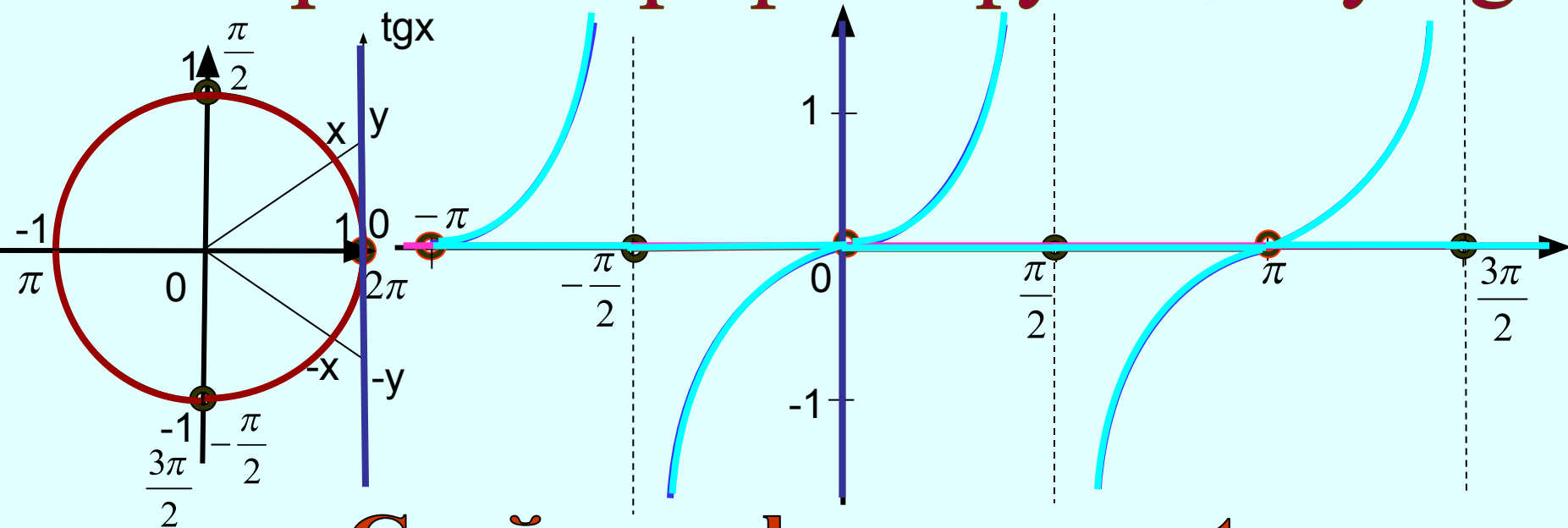
Свойства функции $y = \cos x$

- 1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$
- 2) $E(y) = [-1; 1]$
- 3) Периодичность: $T = 2\pi$
- 4) Функция четная
 - а) $D(y)$ симметрична относительно оси OY
 - б) $y(-x) = y(x)$
- 5) $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
- 6) $y_{\text{наиб.}} = 1$ при $x = 2\pi n$
- 7) $y_{\text{наим.}} = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$

- 8) монотонность:
 - а) функция \uparrow на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$
 - б) функция \downarrow на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$
- 9) промежутки знакопостоянства:
 - а) $y > 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$
 - б) $y < 0$ на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$n \in \mathbb{Z}$

Построение графика функции $y = \operatorname{tg}x$



Свойства функции $y = \operatorname{tg}x$

1) $D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

2) $E(y) = (-\infty; +\infty)$

3) Периодичность: $T = \pi$

4) Функция нечетная.

5) Нули функции:

$$y = 0 \text{ при } x = \pi n$$

8) монотонность:

а) функция \uparrow на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

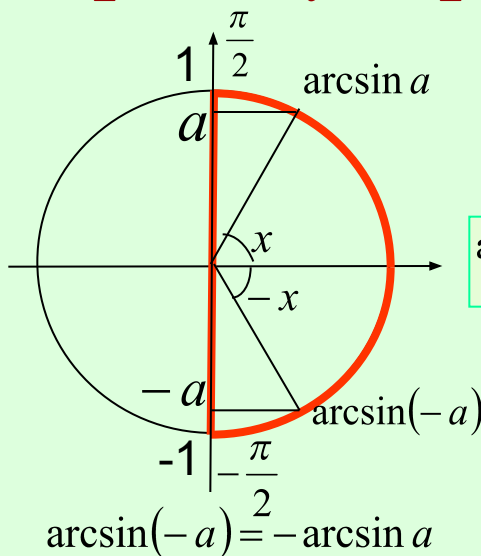
9) промежутки знакопостоянства:

б) $y > 0$ на $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

а) $y < 0$ на $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$

$$n \in \mathbb{Z}$$

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

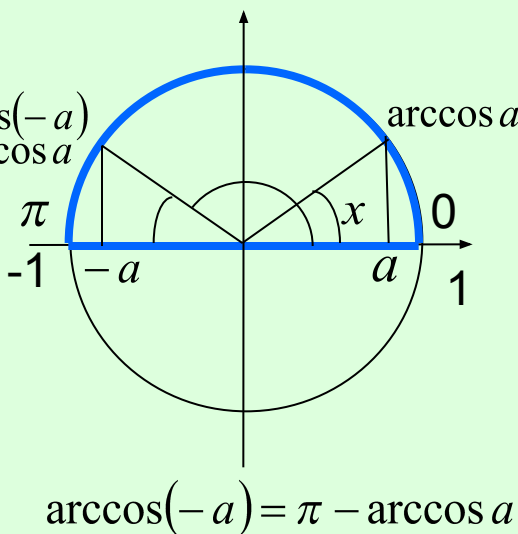


$$\arcsin a = x, \quad \sin x = a$$

$$a \in [-1; 1]$$

$$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

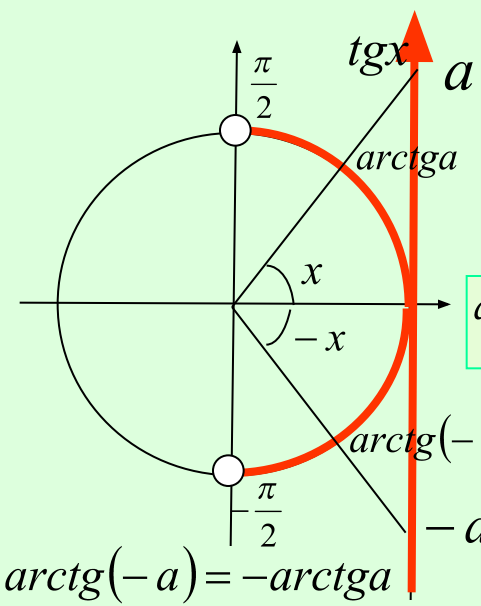


$$\arccos a = x, \quad \cos x = a$$

$$a \in [-1; 1]$$

$$\arccos a \in [0; \pi]$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

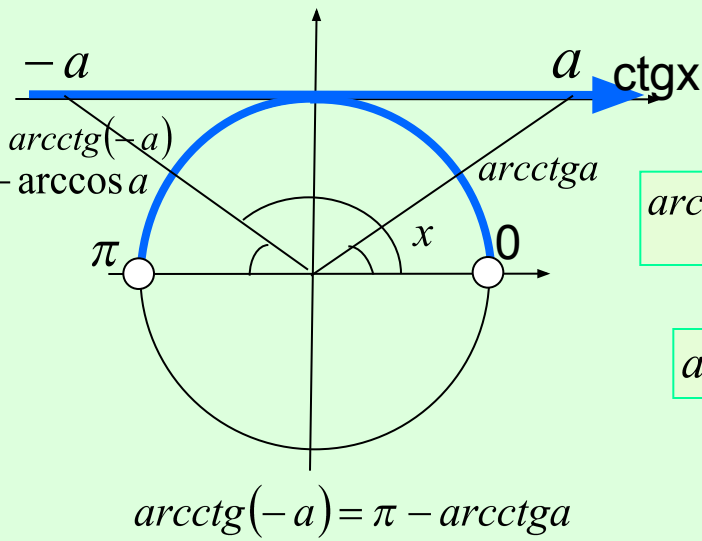


$$\arctg a = x, \quad \operatorname{tg} x = a$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$\arctg a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arctg(-a) = -\arctg a$$



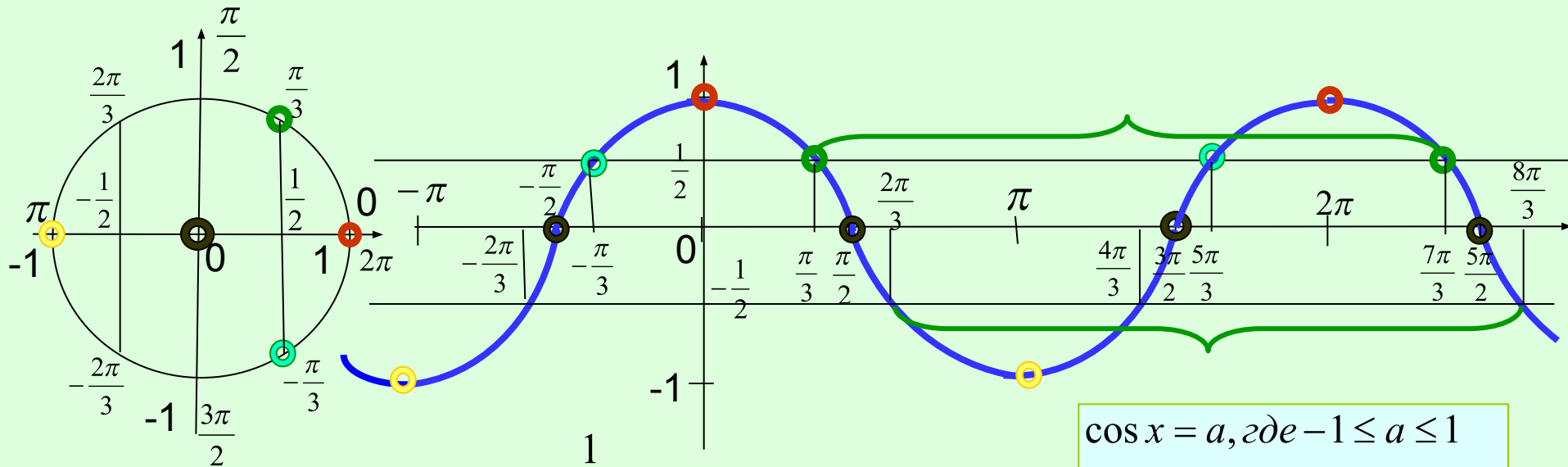
$$\operatorname{arcctg} a = x, \quad \operatorname{ctg} x = a$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

Решение уравнения $\cos x = a$



Частные случаи:

1) $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

2) $\cos x = 1$

$$x = 2\pi n$$

3) $\cos x = -1$

$$x = \pi + 2\pi n$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n; \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}$$

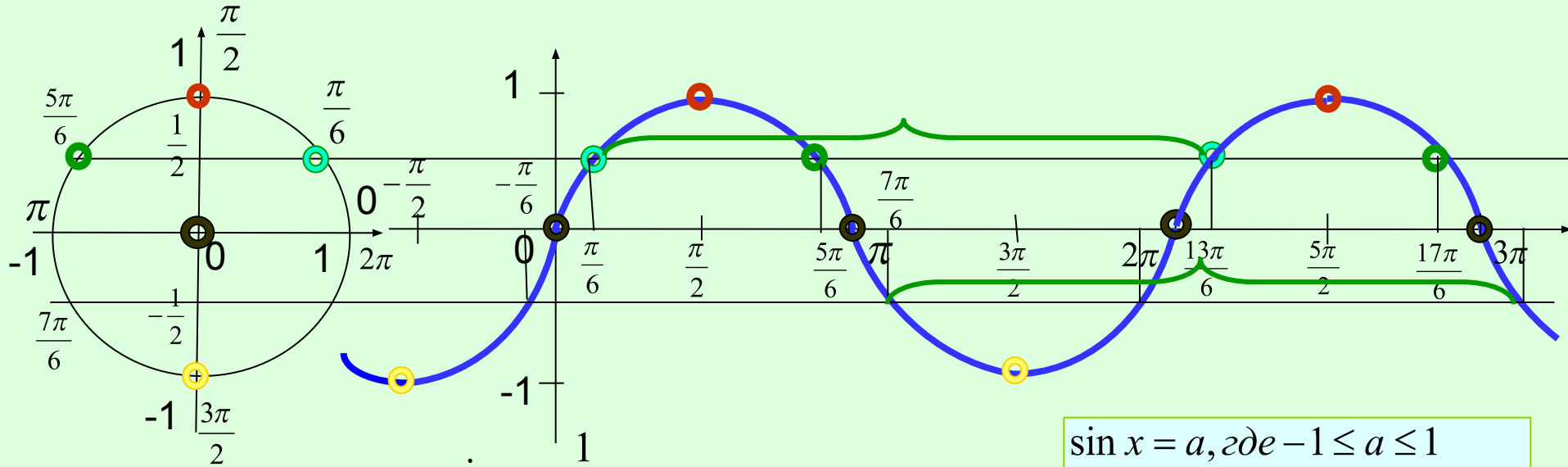
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n; \\ x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2} \right) + 2\pi n; \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array}$$

$$\cos x = a, \text{ где } -1 \leq a \leq 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решение уравнения $\sin x = a$



Частные случаи:

1) $\sin x = 0$

$x = \pi n$

2) $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

3) $\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$

$\Rightarrow x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

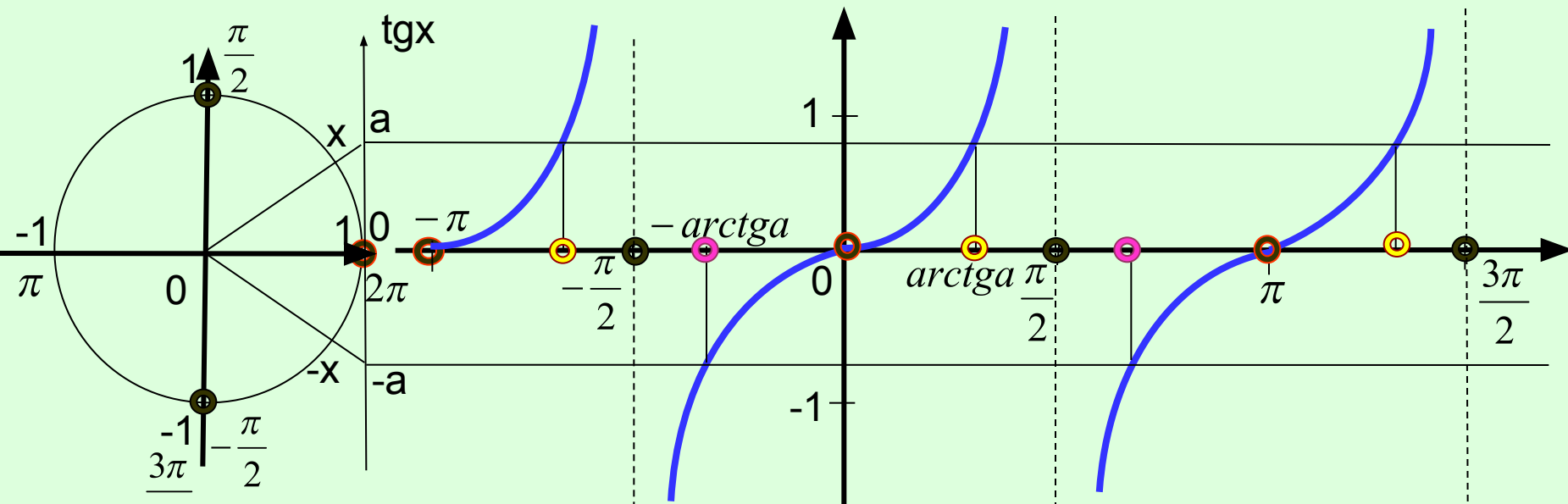
$\Rightarrow x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi n;$

$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$

$\sin x = a, \text{ где } -1 \leq a \leq 1$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решение уравнения $\operatorname{tg}x = a$



$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg}a$$

$$\operatorname{tg}x = a, \quad a \in (-\infty; +\infty)$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \operatorname{arctg}a + \pi n$$

$$\operatorname{tg}x = -a, \quad a \in (-\infty; +\infty)$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

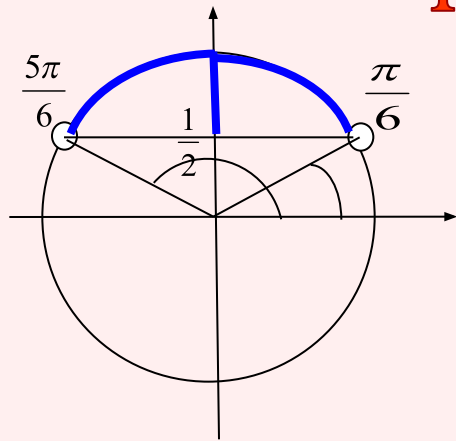
$$x = -\operatorname{arctg}a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}x = 0$$

$$x = \pi n$$

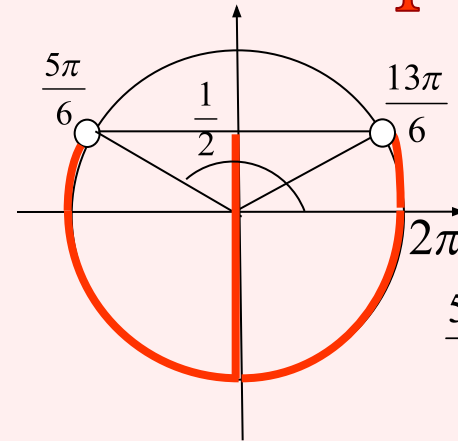
$$\operatorname{ctg}x = a \Rightarrow \operatorname{tg}x = \frac{1}{a}$$

Решение тригонометрических неравенств-1



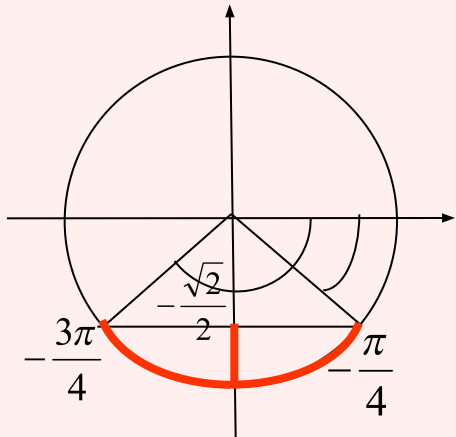
$$\sin x > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$



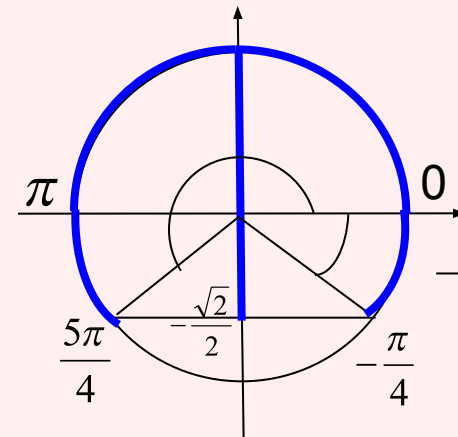
$$\sin x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n$$



$$\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

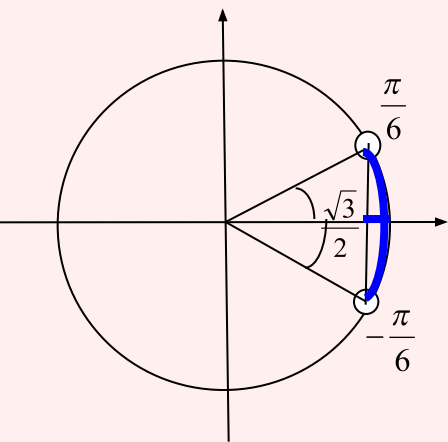


$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

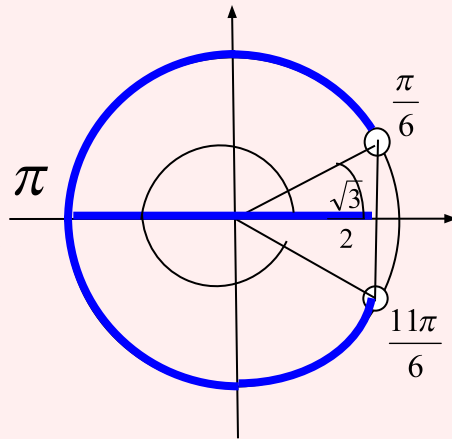
$$n \in \mathbb{Z}$$

Решение тригонометрических неравенств-2



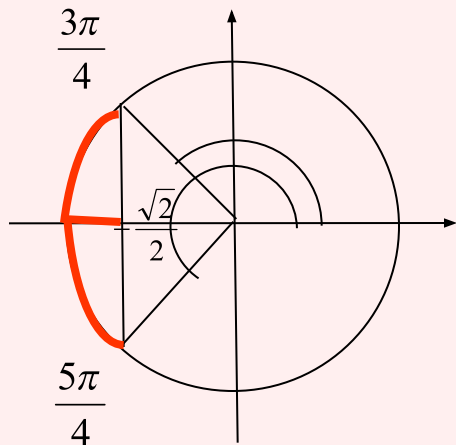
$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$



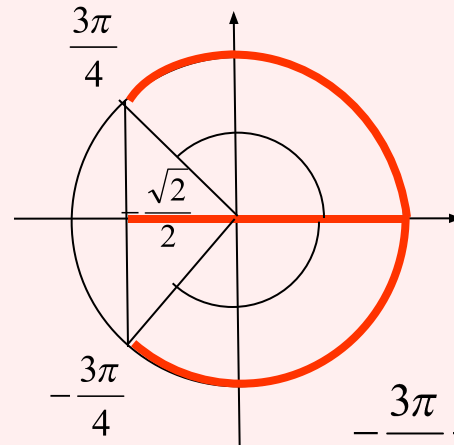
$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$$



$$\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

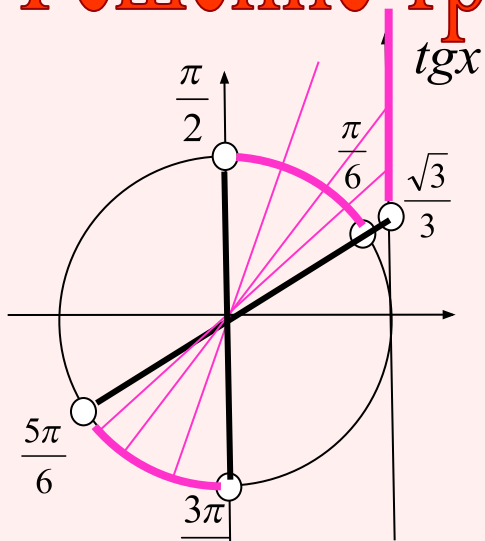


$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

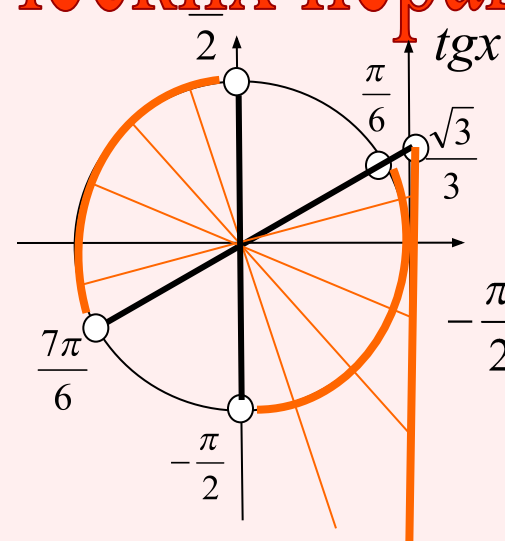
$n \in \mathbb{Z}$

Решение тригонометрических неравенств-3



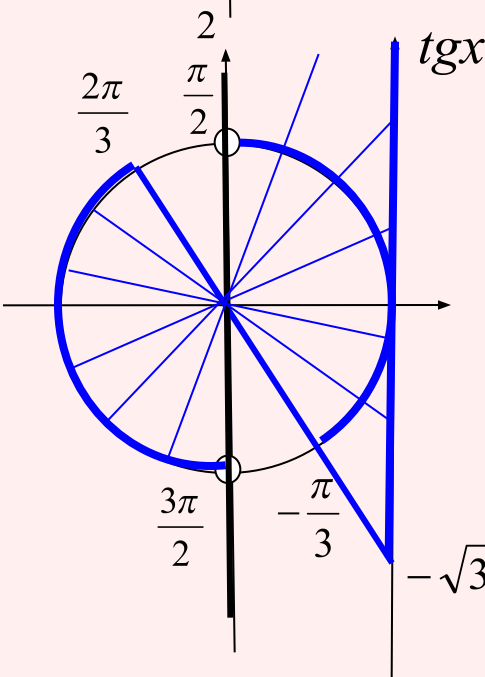
$$tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$



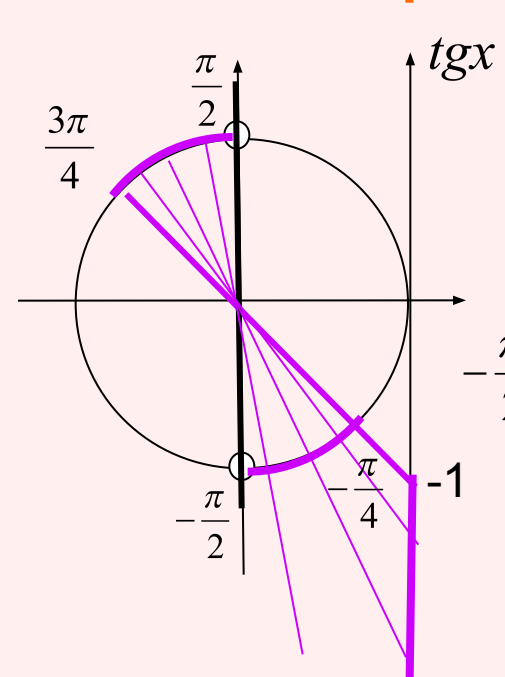
$$tgx < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n$$



$$tgx \geq -\sqrt{3}$$

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$

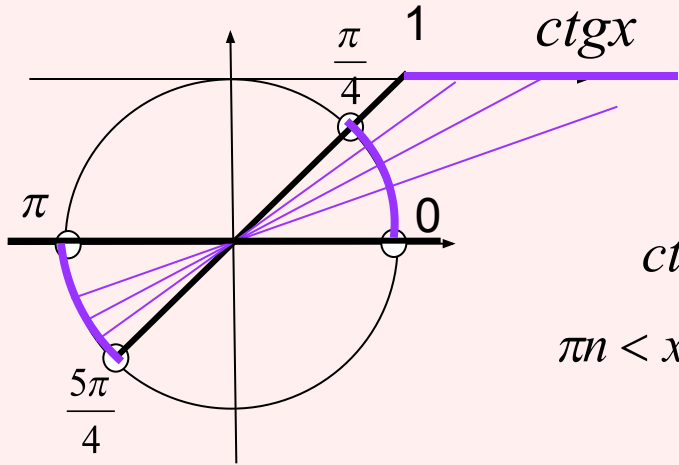


$$tgx \leq -1$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

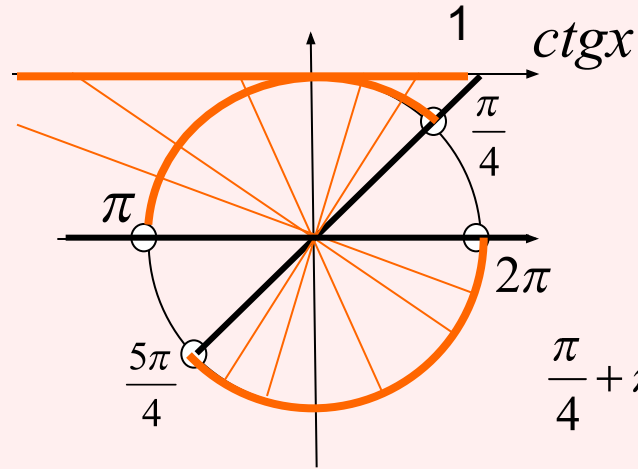
$n \in \mathbb{Z}$

Решение тригонометрических неравенств-4



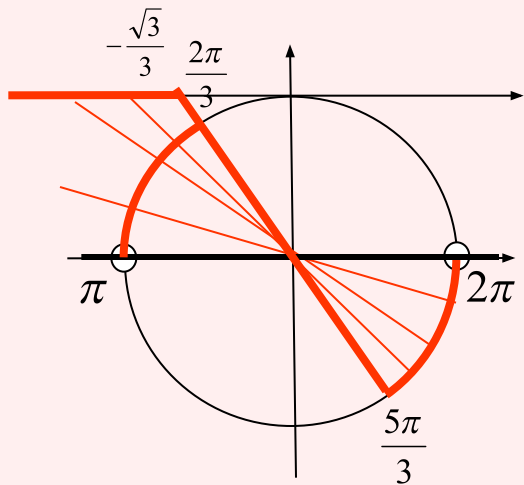
$$ctgx > 1$$

$$\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$$



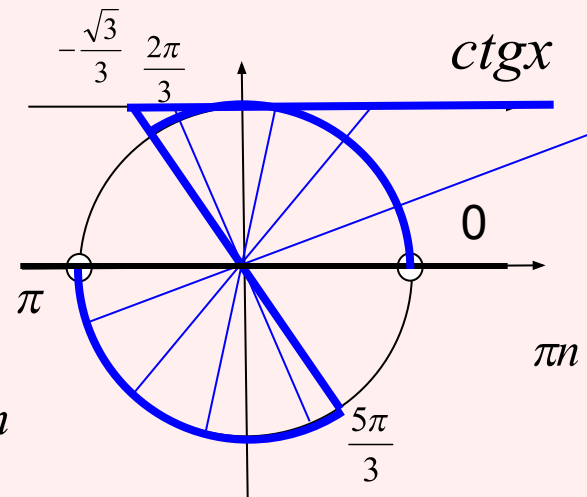
$$ctgx < 1$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \pi + \pi n$$



$$ctgx \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} + \pi n \leq x < \pi + \pi n$$



$$ctgx \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\pi n < x \leq \frac{2\pi}{3} + \pi n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$