«Теорема Пифагора»

- Выполнила: Кулясова Ангелина
- Проверила: учительгеометрии Светлана Петровна

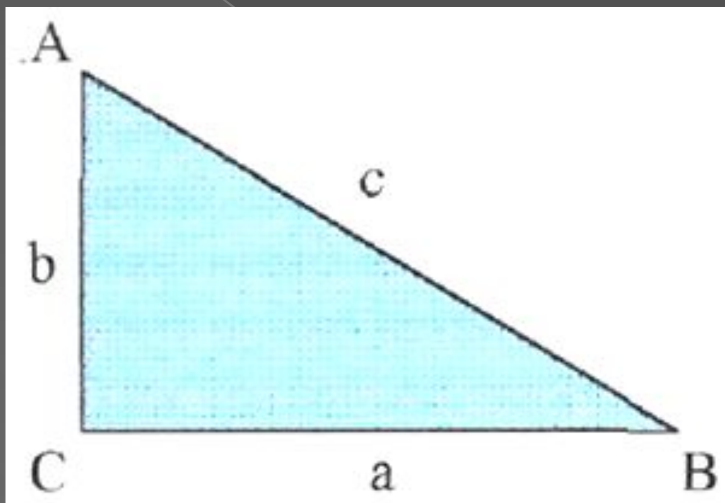
Пифагор Самосский

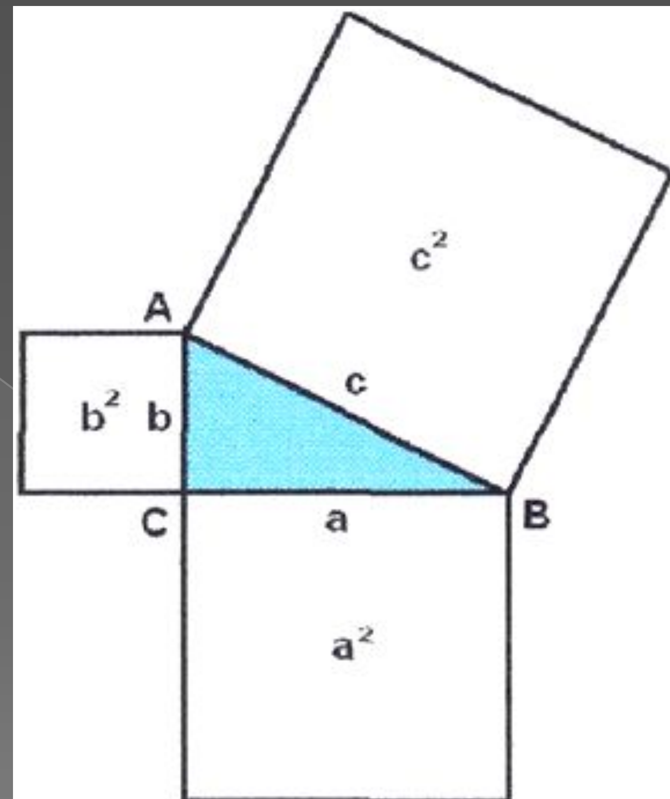
(ок. 580 – ок. 500 г. до н. э.)

ПИФАГОР САМОССКИЙ
(ок. 580 – ок. 500 г. до н.э.)

- О жизни Пифагора известно немного. Он родился в 580 г. до н.э. в Древней Греции на острове Самос, который находится в Эгейском море у берегов Малой Азии, поэтому его называют Пифагором Самосским.
- Родился Пифагор в семье резчика по камню, который сыскал скорее славу, чем богатство. Ещё в детстве он проявлял незаурядные способности, и когда подрос, неугомонному воображению юноши стало тесно на маленьком острове.
- Пифагор перебрался в город Милеет и стал учеником Фалеса, которому в то время шёл восьмой десяток. Мудрый учёный посоветовал юноше отправиться в Египет. Когда Пифагор постиг науку египетских жрецов, то засобирался домой, чтобы там создать свою школу.
- Он поселился в одной из греческих колоний Южной Италии в городе Кротоне. Там Пифагор организовал тайный союз молодёжи из представителей аристократии. Каждый вступающий отрекался от своего имущества и давал клятву хранить в тайне учения основателя. Пифагорейцы, как их позднее стали называть, занимались математикой, философией, естественными науками. В школе существовал декрет, по которому авторство всех математических работ приписывалось учителю.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

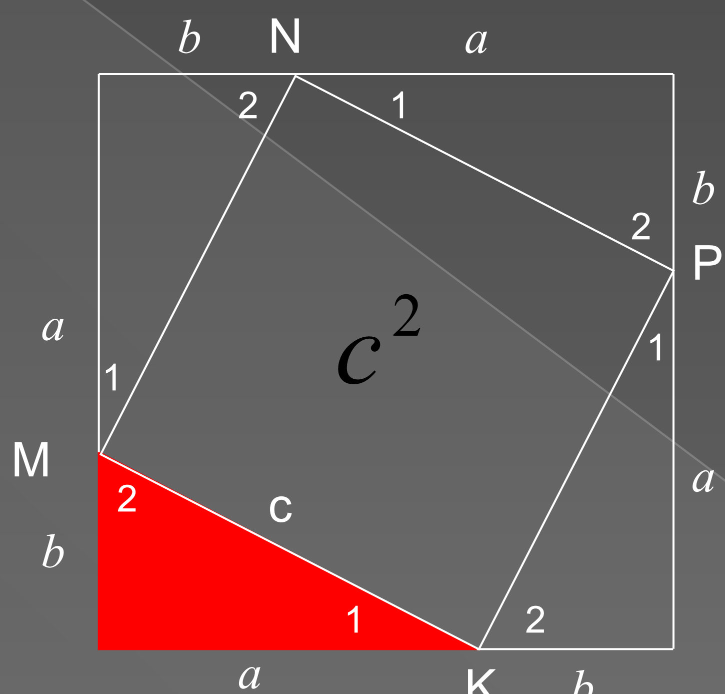




В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Достроим прямоугольный треугольник до квадрата.

Обозначим площадь квадрата S.

$$S = (a+b)^2$$

Квадрат состоит из четырехугольника MNPK и четырех равных треугольников.

Треугольники равны по двум катетам.

$$S = S_{MNPK} + 4S_{\Delta}.$$

Гипотенузы треугольников равны, поэтому MNPK – ромб.

А так как $\angle 1 + \angle 2 = 90^o$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника), то MNPK – квадрат.

Тогда его площадь равна c^2. Площадь каждого треугольника равна $\frac{ab}{2}$.

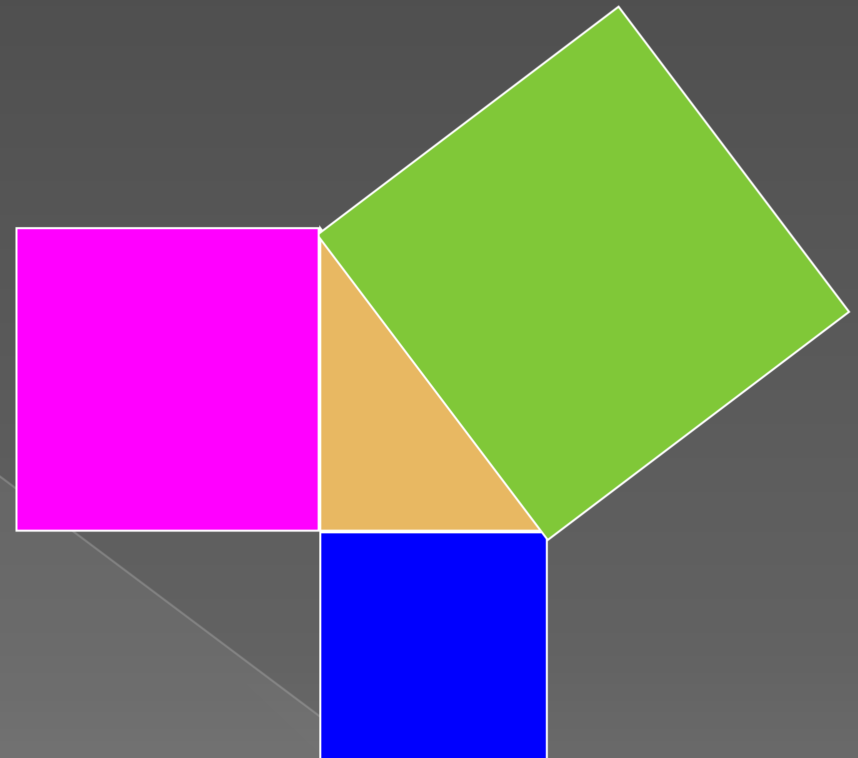
Поэтому $S = c^2 + 2ab.$ Или $(a+b)^2 = c^2 + 2ab,\ a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab.$

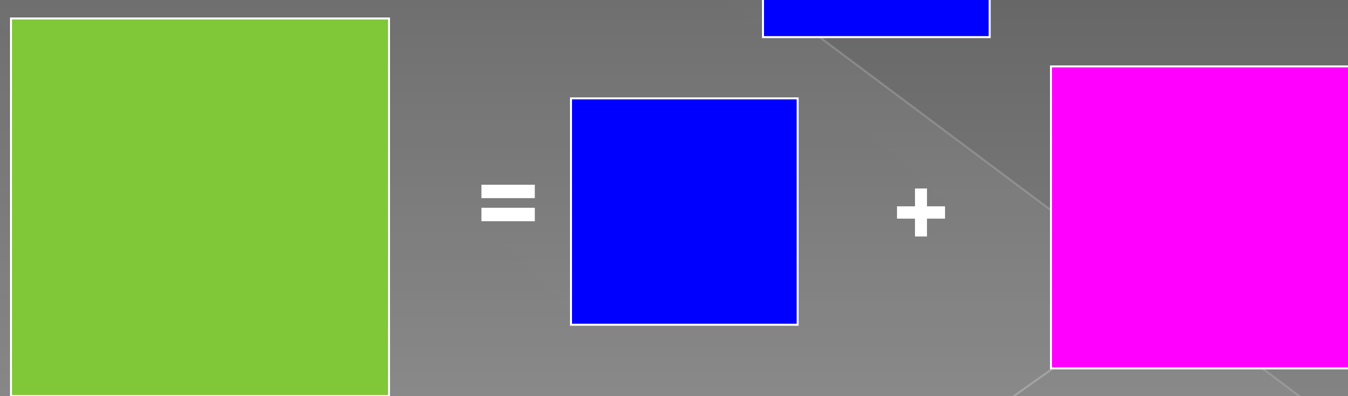
Откуда $c^2 = a^2 + b^2.$

Формулировка

Другими словами,

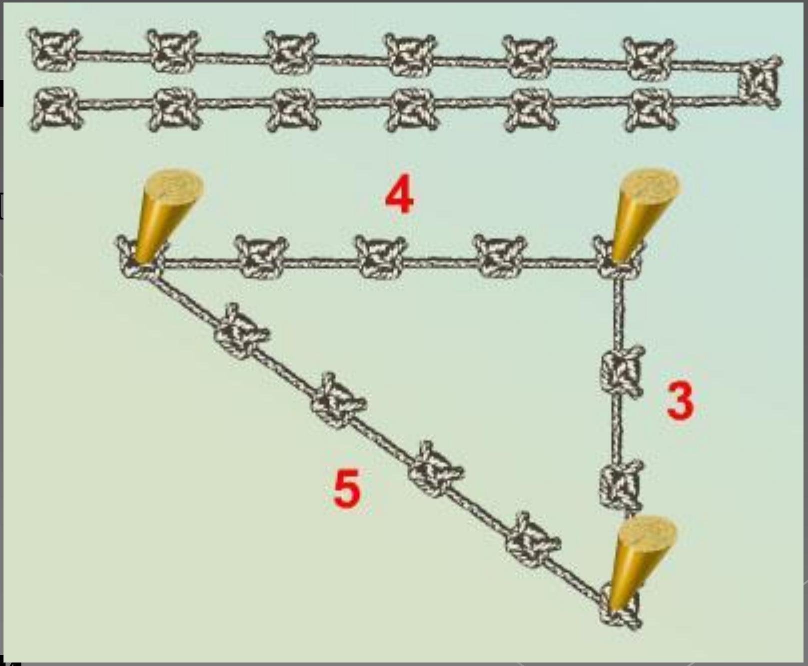
площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.





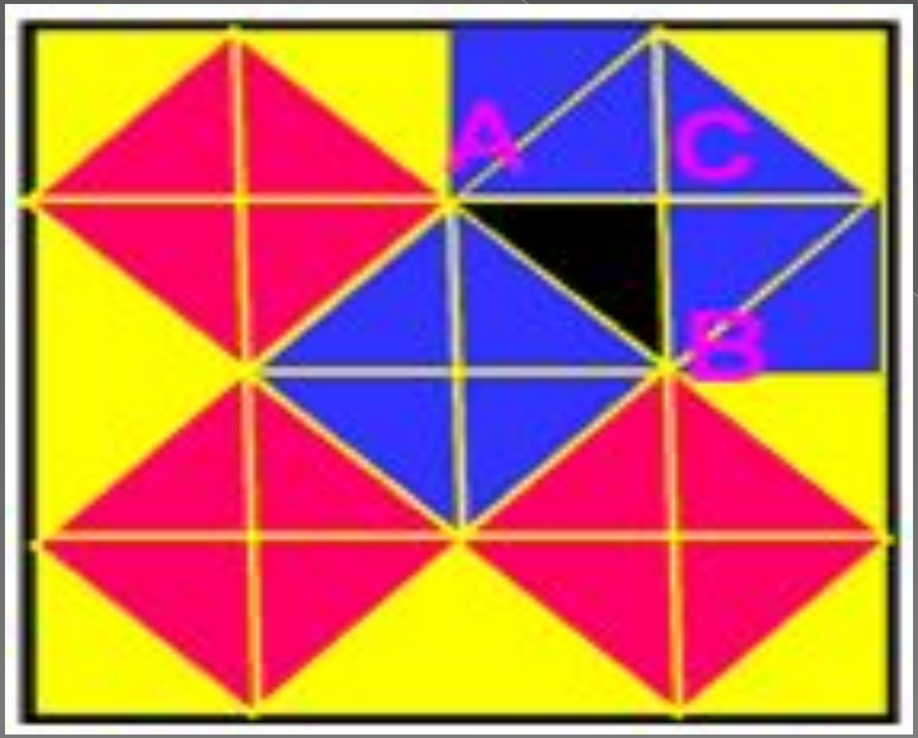
Формулировка обратной теоремы

- **Теорема, обратная к теореме Пифагора, также справедлива. Она позволяет проверить, является ли тот или иной треугольник прямоугольным. Этим пользовали землемеры и строители Древнего Египта: они размечали прямые уг с помощью веревки, разделенной узлами на 12 равных кусков.**
- **Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 называется «египетским», а тройки (*a, b, c*) натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. служащие длинами сторон прямоугольных треугольников, Пифагоровыми.**



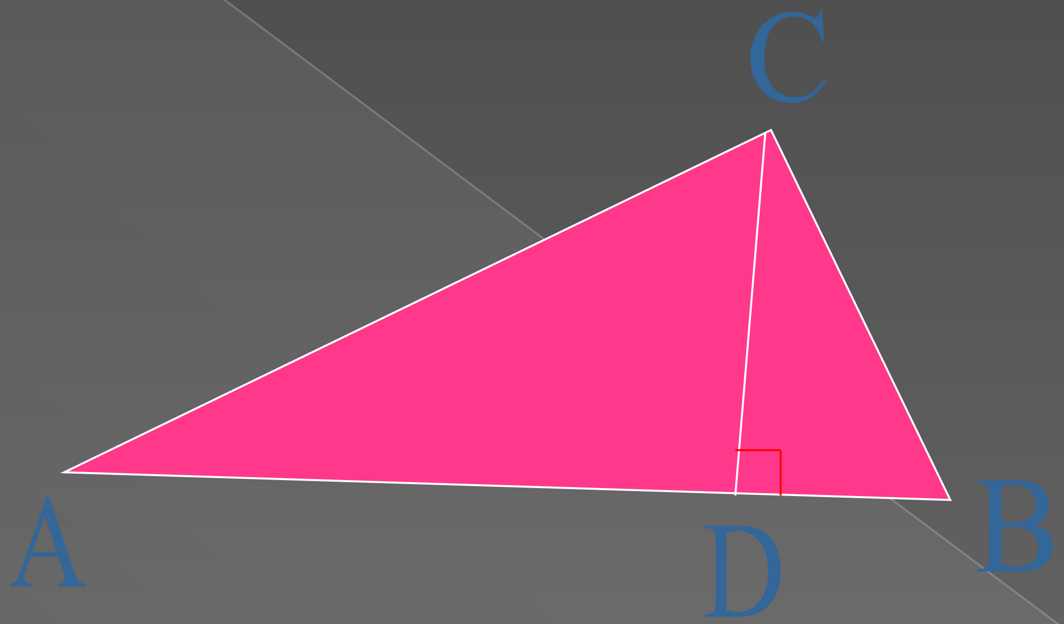
Доказательства

- **На данный момент в научной литературе зафиксировано 367 доказательств данной теоремы. Вероятно, теорема Пифагора является единственной теоремой со столь внушительным числом доказательств. Такое многообразие можно объяснить лишь фундаментальным значением теоремы для геометрии.**
- **Разумеется, концептуально все их можно разбить на малое число классов. Самые известные из них: доказательства методом площадей, аксиоматические и экзотические доказательства (например с помощью дифференциальных уравнений).**



- Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы (для треугольника АВС квадрат, построенный на гипотенузе АС содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах – по 2 треугольника) Теорема доказана.

Доказательство, основанное на теории подобия



Из подобия треугольников *ACD* и *CAB* следует:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

Из подобия треугольников *ABC* и *DCB* следует:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}; BC^2 = AB \cdot BD$$

Сложив почленно равенства, получим:

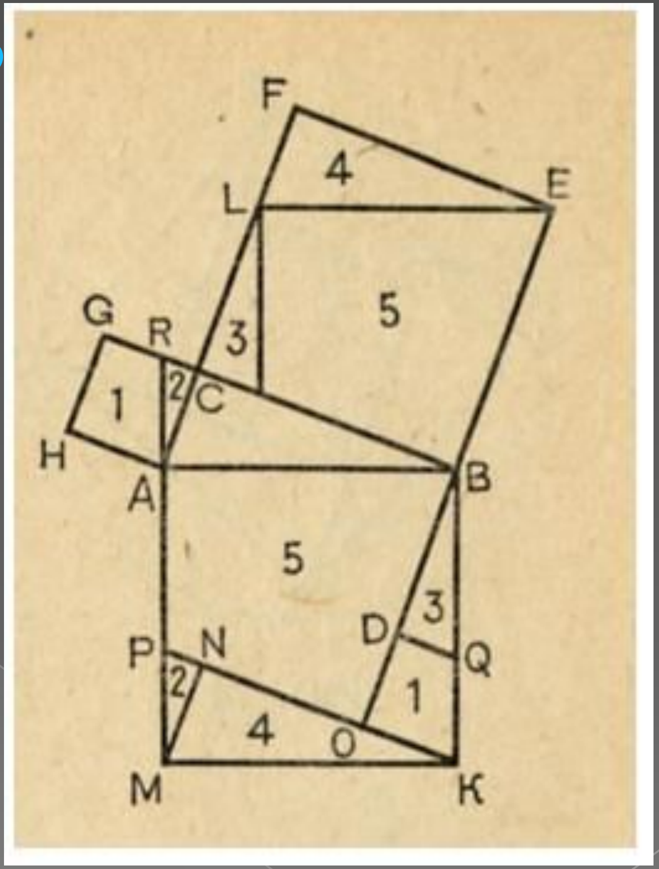
$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Доказательство Анариция, основанное на том, что равносоставленные фигуры равно

Если на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построить соответствующие квадраты, то квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Доказательство основывается на том, что равносоставленные фигуры равновелики: квадраты, построенные на катетах и гипотенузе, разбиваются на многоугольники так, что каждому многоугольнику из состава квадрата на гипотенузе соответствует равный многоугольник одного из квадратов на катетах. Достаточно посмотреть на чертеж, чтобы понять все доказательство (см. рис.).
Это доказательство дал багдадский математик и астроном X в. ан-Найризий (латинизированное имя – Анариций).



Чертеж к доказательству Анариция

Оригинальное доказательство

Дано:

прямоугольный треугольник ABC,

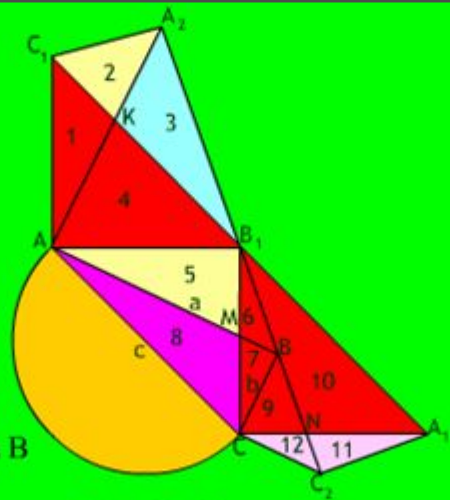
$\angle ABC = 90^\circ$,

$AB = a$, $BC = b$, $AC = c$.

Доказать:

$a^2 + b^2 = c^2$

Доказательство:



1. Сначала докажем теорему для частного случая, когда прямоугольный треугольник - равнобедренный.

Для этого опишем окружность относительно треугольника ABC с диаметром AC. Вершина B будет лежать на этой окружности.

Возьмём на этой окружности точку B_1 так, что $AB_1 = B_1C$.

2. Проведём касательную к окружности в точке B_1. Эта касательная будет параллельна диаметру AC, так как AB_1 равно B_1C.

3. Проведём через точки A, B_1, C прямые, параллельные соответственно сторонам AB_1, B_1C, AC. Точками пересечения с касательной в точке B_1 будут A_1C_1.

4. Рассмотрим треугольники AB_1C_1, AB_1C, A_1B_1C

$$\left.\begin{array}{l} \angle CA_1B_1 = \angle AB_1C = \angle B_1CA_1 = 90^\circ \\ \angle AC_1B_1 = \angle B_1CA = \angle B_1A_1C = 45^\circ \\ \angle C_1B_1A = \angle B_1AC = \angle CB_1A_1 = 45^\circ \\ AB_1 = B_1C = AC_1 = CA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AB_1C = \triangle AB_1C_1 = \triangle A_1B_1C$$

Отсюда следует, что

$S_{AB_1C} = S_{AB_1C_1} = S_{A_1B_1C}$

или $2S_{AB_1C} = S_{AB_1C_1} + S_{A_1B_1C}$

Но $S_{AB_1C} = \dfrac{AC^2}{4}$, $S_{AB_1C_1} = \dfrac{AB_1^2}{2}$, $S_{A_1B_1C} = \dfrac{B_1C^2}{2}$

Поэтому $2\dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{AB_1^2}{2} + \dfrac{B_1C^2}{2}$

или $AC^2 = AB_1^2 + B_1C^2$

Для частного случая теорема доказана.

Доказательство Темпельгофа

Дано:

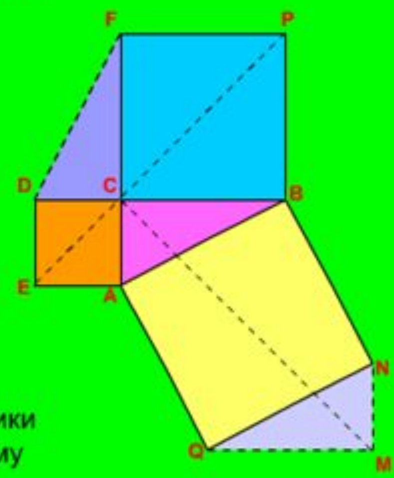
прямоугольный треугольнк ABC,

$\angle ACB = 90^{\circ}$,

$AC = a$, $CB = b$, $AB = c$.

Доказать:

$a^2 + b^2 = c^2$



Доказательство:

1. Построим квадраты на сторонах прямоугольного треугольника ABC так, как показано на рисунке.
2. К полученной фигуре построим треугольники DFC и QNM, равные данному прямоугольному треугольнику ABC.
3. Соединим точки EP и CM.
4. Рассмотрим шестиугольники AEDFPB и ACBNMQ

Прямая EP делит шестиугольник AEDFPB на два равновеликих четырёхугольника.

Прямая CM делит шестиугольник ACBNMQ на два равновеликих четырёхугольника.

Поворот плоскости на 90° вокруг центра A отображает четырёхугольник AEPB на четырёхугольник ACMQ

или

AEPB = ACMQ = EDFP = CBNM

Отсюда следует, что

$S_{AEDFPB} = S_{ACBNMQ}$

или

$S_{DFC} + S_{ABC} + S_{CFPB} + S_{EDCA} = S_{ABC} + S_{ABNQ} + S_{QNM}$

Но

$S_{DFC} = S_{ABC} = S_{QNM}$

Поэтому

$S_{CFPB} + S_{EDCA} = S_{ABNQ}$

или

$a^2 + b^2 = c^2$, что и требовалось доказать.

Дано:

Прямоугольный треугольник.

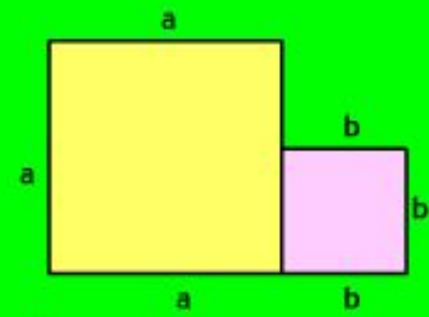
a,b – катеты, c – гипотенуза.

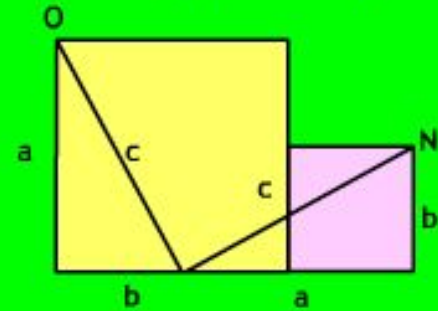
Доказать:

$a^2 + b^2 = c^2$

Доказательство:

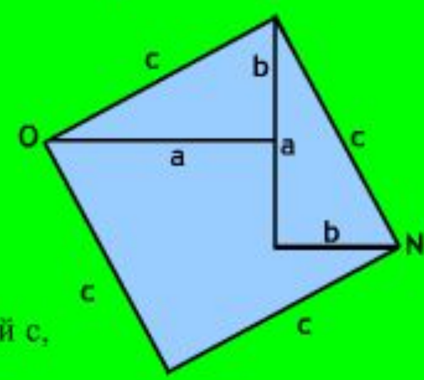
1.Возьмём два квадрата, расположенных рядом, со сторонами **a** и **b** соответственно. Суммарная площадь этих двух квадратов равна $a^2 + b^2$.





2. Построим два равных прямоугольных треугольника с катетами **a** и **b** и гипотенузой **c** внутри этих площадей.

3. Повернём левый прямоугольный треугольник на **90** градусов относительно вершины **O** против часовой стрелки, правый прямоугольный треугольник - на **90** градусов относительно вершины **N** по часовой стрелке, как показано на рисунке.



4. Получим квадрат со стороной c. Площадь фигуры, состоящей из двух квадратов со стороной **a** и **b**, равна площади квадрата со стороной c,

то есть

$a^2 + b^2 = c^2$,

что и требовалось доказать.

Дано:

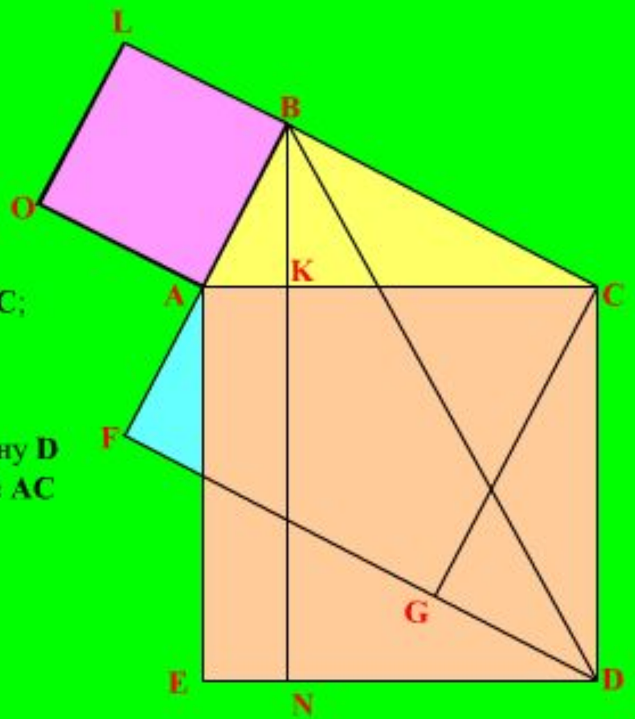
Прямоугольный треугольник **ABC**.

Угол **ABC** равен **90** градусов.

AB = **a**, **BC** = **b**, **AC** = **c**.

Доказать:

$a^2 + b^2 = c^2$



Доказательство:

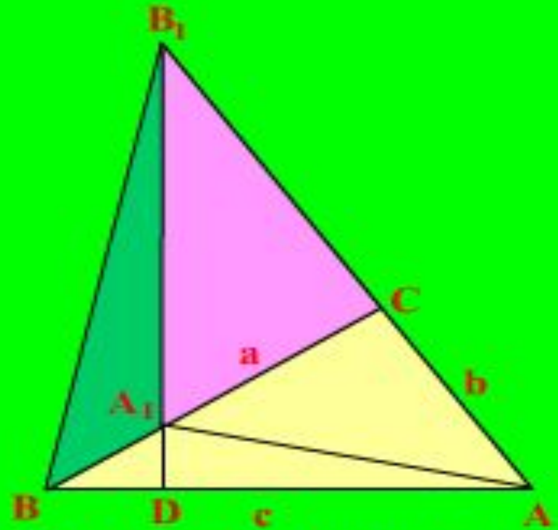
1. Построим
   квадрат **ACDE** на гипотенузе **AC** прямоугольного треугольника **ABC**;
   квадрат **FBCG** на катете **BC** со стороны треугольника **ABC**;
   квадрат **AOLB** на катете **AB**.
2. Тогда прямая **FG** пройдёт через вершину **D** квадрата, построенного на гипотенузе **AC** прямоугольного треугольника **ABC**.
3. Сравним площади треугольника **BCD** и квадрата **FBCG**.
   BC – общее основание,
   BF – общая высота.
   Отсюда следует, что
   $S_{FBCD} = 2\, S_{BCD}$.
4. Сравним площади треугольника **BCD** и прямоугольника **KCDN**
   CD – общее основание,
   ND - общая высота.
   Отсюда следует, что
   $S_{KCDN} = 2\, S_{BCD}$.
5. Приравнивая полученные выражения, получаем
   $S_{FBCG} = S_{NKCD}$.
6. Аналогично доказывается, что
   $S_{OLBA} = S_{AKNF}$
7. $S_{ACDE} = S_{AKNE} + S_{KCDN} = S_{FBCG} + S_{AOLB}$
   или
   $c^2 = a^2 + b^2$,

что и требовалось доказать.

Доказательство Хоукинса

Дано:
Прямоугольный треугольник **ABC**.
Угол **ACB** равен **90** градусов.
CA = a, BC = b, BA = c.

Доказать:
$a^2 + b^2 = c^2$



Доказательство:
1.Повернём треугольник **ABC** вокруг центра в точке **C** на **90** градусов таким образом, чтобы он занял положение A_1B_1C, как показано на рисунке.
2. Продолжим гипотенузу B_1A_1 за точку A_1 до пересечения с линией **AB** в точке **D**
Отрезок B_1D будет высотой треугольника B_1AB (так как угол B_1DA – равен **90** градусов).
3.Рассмотрим четырёхугольник A_1AB_1B.
С одной стороны
$$S_{A_1AB_1B} = S_{CAA_1} + S_{CBB_1} = b \cdot b \cdot \frac{1}{2} + a \cdot a\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$
С другой стороны
$$S_{A_1AB_1B} = S_{A_1BB_1} + S_{AA_1B_1} = c \cdot BD \cdot \frac{1}{2} + c \cdot AD \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (AD+BD) = \frac{1}{2} \cdot c^2$$
4.Приравнивая полученные выражения, получаем
$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}c^2$$
или
$$a^2 + b^2 = c^2,$$
что и требовалось доказать.

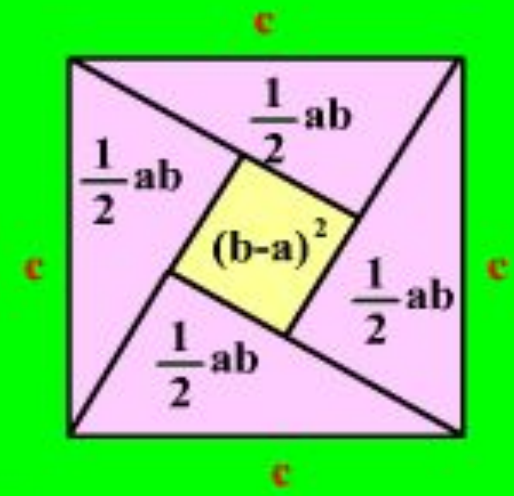
Доказательство индийского математика Бхаскари

Дано:

Прямоугольный треугольник с катетами **a** **b** и гипотенузой **c**.

Доказать:

$a^2 + b^2 = c^2$



Доказательство:

1. Достроим прямоугольный треугольник до квадрата со стороной с так, как показано на рисунке.
Площадь этого квадрата равна $S = c^2$.

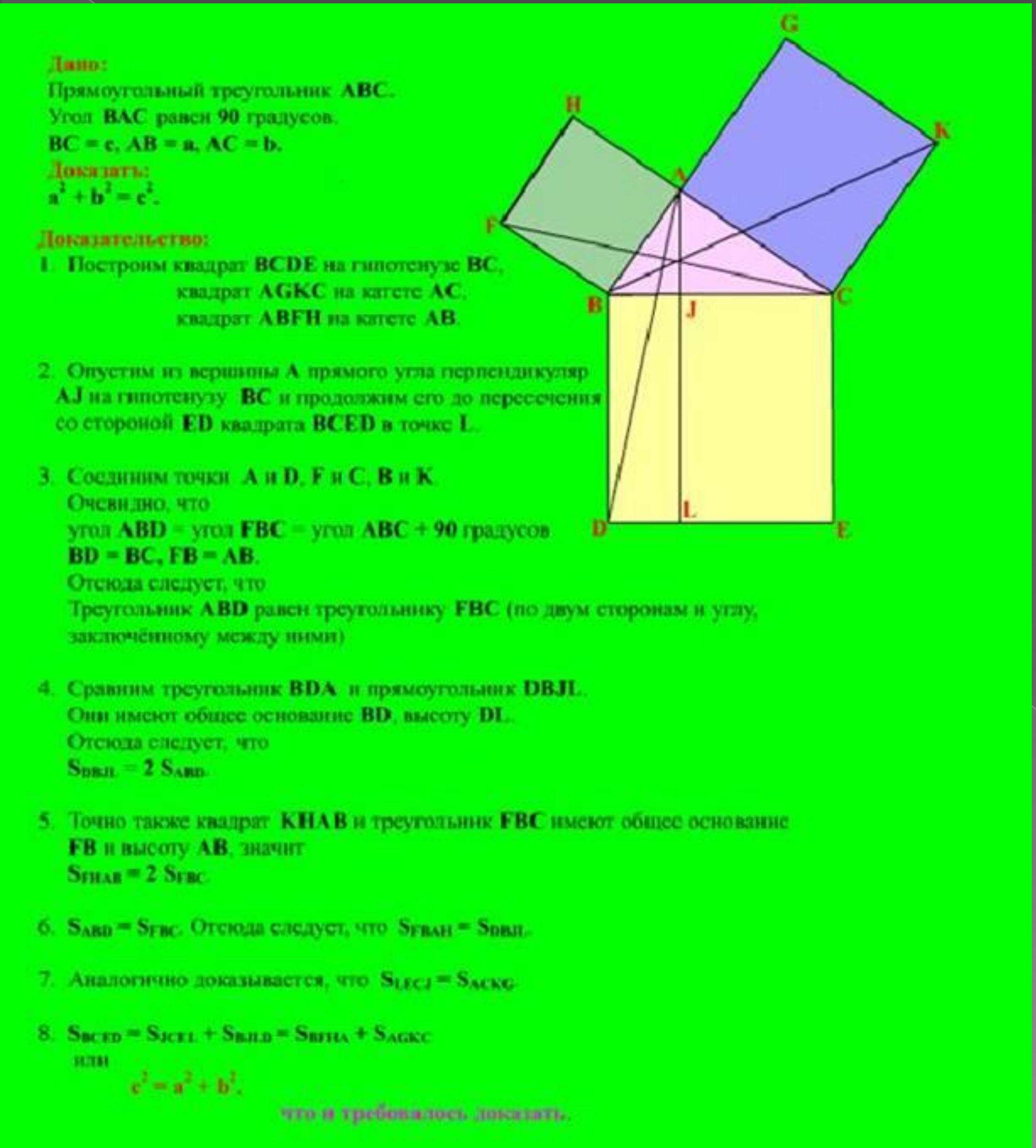
2. С другой стороны этот квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной $b - a$, площадь которого равна $(b - a)^2$.
3. Поэтому

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab + (b - a)^2$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

$c^2 = a^2 + b^2$, что и требовалось доказать.

Доказательство Евклида



Дано:

Прямоугольный треугольник ABC.

Угол BAC равен 90 градусов.

BC = c, AB = a, AC = b.

Доказать:

$a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство:

1. Построим квадрат BCDE на гипотенузе BC,
   квадрат AGKC на катете AC,
   квадрат ABFH на катете AB.

2. Опустим из вершины A прямого угла перпендикуляр AJ на гипотенузу BC и продолжим его до пересечения со стороной ED квадрата BCED в точке L.

3. Соединим точки A и D, F и C, B и K.
   Очевидно, что
   угол ABD = угол FBC = угол ABC + 90 градусов
   BD = BC, FB = AB.
   Отсюда следует, что
   Треугольник ABD равен треугольнику FBC (по двум сторонам и углу, заключённому между ними)

4. Сравним треугольник BDA и прямоугольник DBJL.
   Они имеют общее основание BD, высоту DL.
   Отсюда следует, что
   $S_{DBJL} = 2\,S_{ABD}$

5. Точно также квадрат KHAB и треугольник FBC имеют общее основание FB и высоту AB, значит
   $S_{FHAB} = 2\,S_{FBC}$

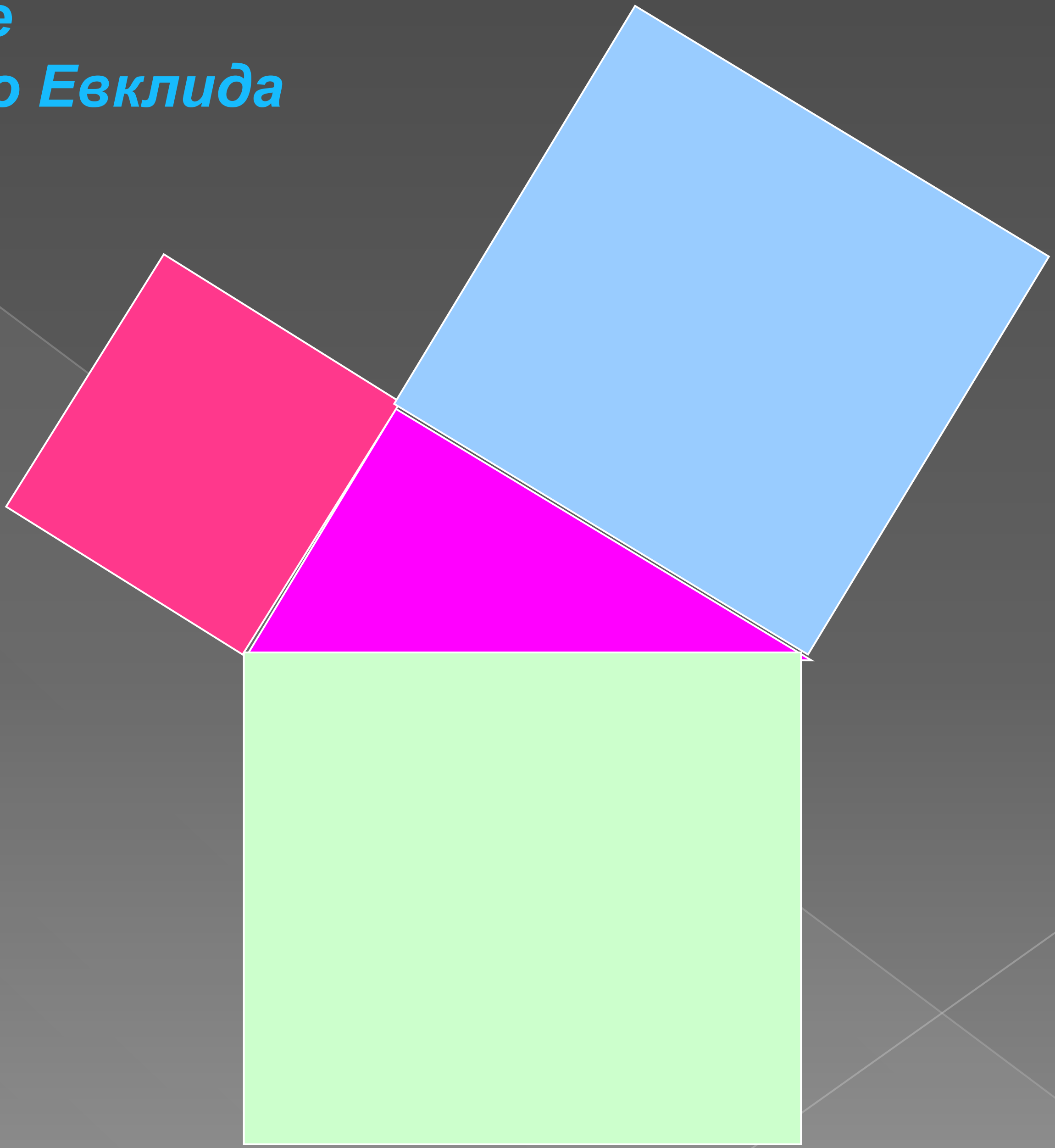
6. $S_{ABD} = S_{FBC}$. Отсюда следует, что $S_{FBAH} = S_{DBJL}$.

7. Аналогично доказывается, что $S_{LECJ} = S_{ACKG}$.

8. $S_{BCED} = S_{JCEL} + S_{BJLD} = S_{BFHA} + S_{AGKC}$
   или
   $c^2 = a^2 + b^2$,
   что и требовалось доказать.

Геометрическое доказательство Евклида

Если на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построить соответствующие квадраты, то квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.



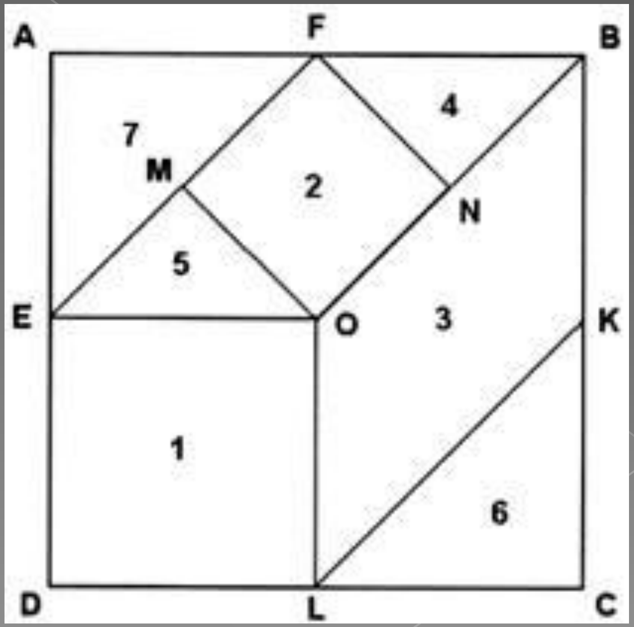
Историческая справка

- Пожалуй, это самая популярная теорема геометрии, сделавшая Пифагора наиболее знаменитым математиком. Однако, само утверждение было открыто задолго до него, но в современной истории науки считается, что Пифагор дал ему первое логически стройное доказательство.
- Теорема Пифагора заслужила место в «Книге рекордов Гиннесса» как получившая наибольшее число доказательств. Американский автор Э. Лумис в книге «Пифагорово предложение», вышедшей в 1940 г., собрал 370 разных доказательств! Однако принципиально различных идей в этих доказательствах используется не так уж много.

Пифагорова головоломка

Из семи частей квадрата составить снова квадрат, прямоугольник, равнобедренный треугольник, трапецию. Квадрат разрезается так: E, F, K, L – середины сторон квадрата, O – центр квадрата,

OM $\perp$ EF, NF $\perp$ EF.



- Итак,
- Если дан нам треугольник
- И притом с прямым углом,
- То квадрат гипотенузы
- Мы всегда легко найдём:
- Катеты в квадрат возводим,
- Сумму степеней находим –
- И таким простым путём
- К результату мы придём.
- Ч.т.д.

Самое ценное в математике - это возможность быстрого приложения теории к практике