

# Урок 11

Расстояния между прямыми

Определение.

**Углом между прямыми называется меньший из двух углов между лучами, которые этим прямым соответственно параллельны.**

Следствия.

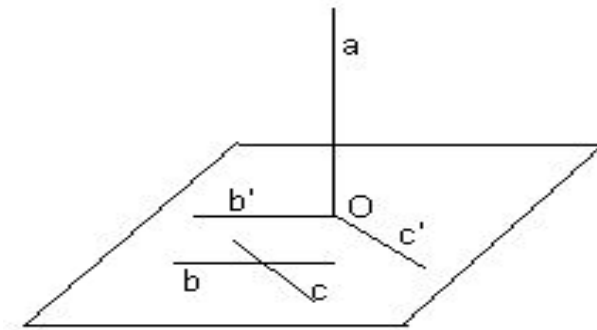
- 1) Если  $a \parallel b$ , то  $\angle(a; b) = 0^\circ$ ;
- 2) Если  $a \square b = O$ , то  $\angle(a; b)$  – тот из образовавшихся углов с вершиной  $O$ , который не тупой.
- 3) Если  $a \div b$ , то  $\angle(a; b) = \angle(a'; b')$ , где  $a' \parallel a$ ;  $b' \parallel b$ ;  $a' \square b' = O'$ .

Таким образом,  $0^\circ \leq \angle(a; b) \leq 90^\circ$ .

***Перпендикулярными будут называться любые две прямые, угол между которыми  $90^\circ$ ,***

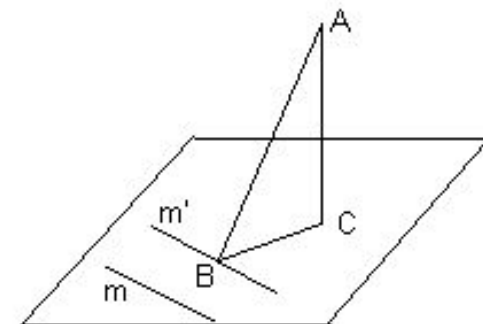
**Определение.**

**Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости**



**Признак.**

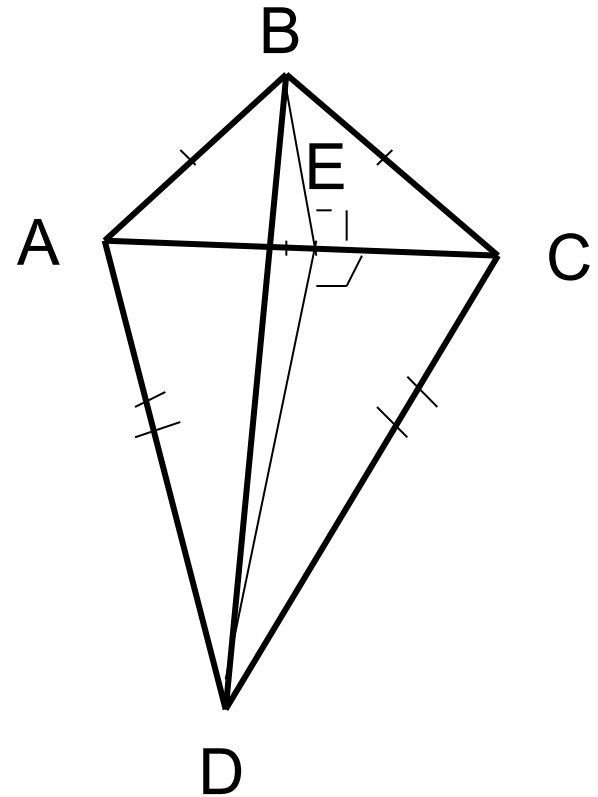
**Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в этой плоскости**



**Теорема о трех перпендикулярах**

1) Верно ли, что прямая, перпендикулярная двум сторонам треугольника, перпендикулярна его третьей стороне?

В неплоской замкнутой ломаной  $ABCD$   $AB=BC$ ,  $AD=CD$ .  
Докажите, что  $(AC) \perp (BD)$ .



Точка  $A$  не лежит на прямой  $a$ .  
Какую фигуру образуют все прямые,  
проходящие через точку  $A$  и перпендикулярные прямой  $a$ ?

Проверьте равносильность утверждений:

- 1) Две прямые перпендикулярны
- 2) Через каждую из них проходит плоскость, перпендикулярная другой прямой

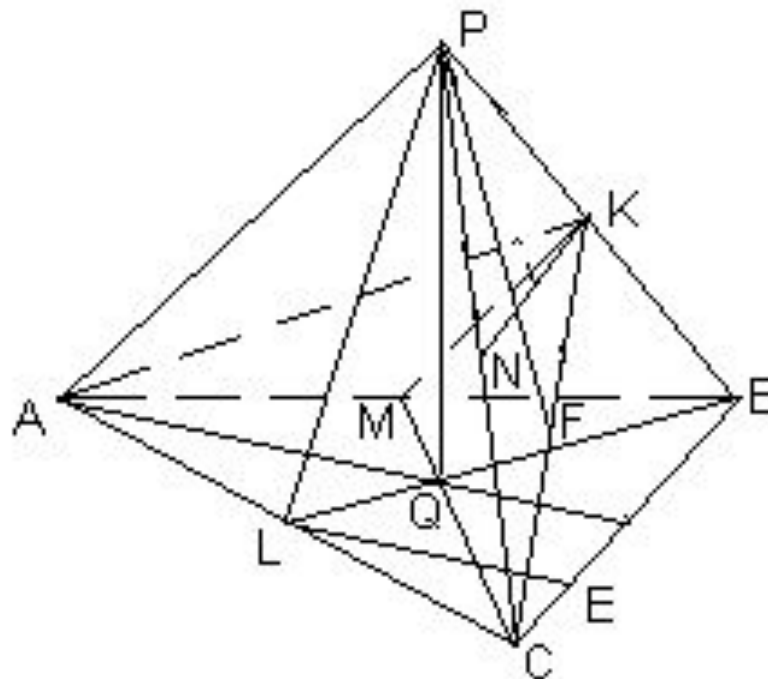
1)  $b \perp$

а)  $b \subset \alpha; a \subset \alpha$     б)  $b \subset \alpha; a \not\subset \alpha$

а)  $\exists \alpha \mid a \subset \alpha \text{ и } b \perp \alpha \Rightarrow$   
 $b \perp a.$

2. Пусть  $PABC$  – правильный тетраэдр, точка  $Q$  – центр его основания, точка  $K$  – середина ребра  $PB$ , точка  $L$  – середина ребра  $AC$ . Вычислите угол между прямыми:

- а)  $AP$  и  $BC$ ;
- б)  $AP$  и  $CQ$ ;
- в)  $AP$  и  $CL$ ;
- г)  $AK$  и  $BC$ ;
- д)  $AK$  и  $PL$ ;
- е)  $AQ$  и  $KL$ .





a)  $\angle((AP); (BC)) =$

b)  $90^\circ$   
 $\angle((AP); (CQ)) = \angle KMC =$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$   
 в)  $\angle((AP); (CK)) = \angle MKC =$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$   
 г)  $\angle((AK); (BC)) = \angle AKN =$

$\arccos \frac{2}{3}$   
 д)  $\phi = \angle((AK); (PL)) = \angle PLF =$

$\arccos \frac{7}{16}$  где F – середина [CK].

$\Delta PLF \quad |PF|^2 = \frac{2|PC|^2 + 2|PK|^2 - |CK|^2}{4} = \frac{7}{16}$

$\Delta PCK \quad \cos \phi = \frac{|PL|^2 + |FL|^2 - |PF|^2}{2|PL| \cdot |FL|} = \frac{2}{3}$

е)  $\phi = \angle((AQ); (KL)) = \angle KLE =$

$\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$  где  $E \in [BC]$  и  $|CE| = \frac{1}{4} |BC|;$

$\Delta BKE \quad |KE|^2 = |BK|^2 + |BE|^2 - 2|BK| \cdot |BE| \cdot \cos 60^\circ = \frac{7}{16}$

$\Delta KLE \quad \cos \phi = \frac{|KL|^2 + |EL|^2 - |KE|^2}{2|KL| \cdot |EL|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 $\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 $\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 $\frac{2}{3}$   
 $\frac{7}{16}$

