

*МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ*

## **ЦЕЛЬ:**

---

Систематизировать, обобщить,  
расширить знания и умения,  
связанные с применением методов  
решения тригонометрических  
уравнений

<b>№</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>1</b>
<b>5</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
<b>7</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>8</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>9</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
<b>10</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>

№	Уравнения	№ метода	Методы
1	$\sin x/3 - \cos 6x = 2$	4(б)	<b>1.Разложение на множители.</b> <b>2.Введение новой переменной:</b> а) сведение к квадратному; б) универсальная подстановка; в) введение вспомогательного аргумента. <b>3. Сведение к однородному уравнению.</b> <b>4. Использование свойств функций, входящих в уравнение:</b> а) обращение к условию равенства тригонометрических функций; б) использование свойства ограниченности функции.
2			
3			
4	$5 \sin x - 2 \cos x = 1$	3, 2(б,в)	
5	$\sin 3x \cos 2x = 1$	4(б)	
6	$\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$	1,2(б,в),3	
7	$1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$	1,2(б,в)3	
8	$\cos 3x = \sin x$	4(а)	
9	$4 - \cos^2 x = 4 \sin x$	2(а)	
10	$\sin 3x - \sin 5x = 0$	4(б)	
11	$\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg}(5x + \pi/3) = 1$	4(а)	
12	$2 \operatorname{tg} x/2 - \cos x = 2$	1,2(а,б,в),3,4(а)	

1. Какие методы решения тригонометрических уравнений вы знаете?

2. Определите и ответьте, какими методами нужно решать данные тригонометрические уравнения?

а)  $\sin 2x - \cos x = 0$

б)  $2\sin^2 x - 5\sin x = -3$

в)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x - \cos x$

г)  $\sin 2x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

3. Решите простейшие тригонометрические уравнения:

а)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

б)  $\cos(\pi - x) - 1 = 0;$

в)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\right) = 1;$

г)  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + 2 = 0;$

д)  $\operatorname{tg} 3x - 2 = 0.$

## Некоторые типы тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным,  
относительно  
 $\cos x = t, \sin x = t.$

$$A \sin^2 x + B \cos x + C = 0$$

$$A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$$

*Решаются методом введения новой переменной.*

2. Однородные уравнения первой и второй степени.

I степени.  $A \sin x + B \cos x = 0$  :  $\cos x$

$$A \operatorname{tg} x + B = 0$$

II степени.  $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + A \cos^2 x = 0$  :  $\cos^2 x$

$$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$$

*Решаются методом разложения на множители и методом введения новой переменной.*

3. Уравнение вида:

$$A \sin x + B \cos x = C. \quad A, B, C \neq 0$$

*Применимы все методы.*

## 4. Понижение степени.

$$A \cos 2x + B \cos^2 x = C.$$

$$A \cos 2x + B \sin^2 x = C.$$

*Решаются методом разложения на множители.*

$$A \sin 2x + B \sin^2 x = C.$$

$$A \sin 2x + B \cos^2 x = C.$$

*Сводятся к однородным уравнениям  $C = C(\sin^2 x + \cos^2 x)$ .*

# Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$ ;  
Проверка  
обязательна!

Понижение степени.

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x) : 2$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x) : 2$$

Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$  заменим на  $C \sin(x+\phi)$ , где  $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;

$$\sin \phi = \frac{a}{C}; \quad \cos \phi = \frac{b}{C}; \quad \phi - \text{вспомогательный аргумент.}$$



## Сведение к однородному.

Уравнения вида  $A \sin 2x + B \sin^2 x = C$ ,  $A \sin 2x + B \cos^2 x = C$ .

Пример.  $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$ .

## Разложение на множители.

Пример.  $\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x$

## Проблемы ,возникающие при решении тригонометрических уравнений

### 1. Потеря корней:

□ делим на  $g(x)$ .

□ опасные формулы (универсальная подстановка).

*Этими операциями мы сужаем область определения.*

### 2. Лишние корни:

□ возводим в четную степень.

□ умножаем на  $g(x)$  (избавляемся от знаменателя).

*Этими операциями мы расширяем область определения.*

# Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$ .

Уравнение  $2\sin x - 3\cos x = 0$  .  
Поделив уравнение на  $\cos x$  , получим  $2\operatorname{tg}x - 3 = 0$ ,  $\operatorname{tg}x = \frac{3}{2}$ ,  $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

При решении этой задачи обе части уравнения  $2\sin x - 3\cos x = 0$  были поделены на  $\cos x$  .

Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения  $\cos x = 0$  корнями данного уравнения. Если  $\cos x = 0$ , то из уравнения  $2\sin x - 3\cos x = 0$  следует, что  $\sin x = 0$ . Однако  $\sin x$  и  $\cos x$  не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  . Следовательно, при делении уравнения  $a\sin x + b\cos x = 0$  где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , на  $\cos x$  (или  $\sin x$ ) получаем уравнение, равносильное данному.

# Решить уравнение $\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

1) Делить на  $\cos x$  нельзя, так как в условии не указано, что  $\cos x$  не равен нулю. Но можно утверждать, что  $\sin x$  не равен нулю, так как в противном случае  $\cos x$  равен 0, что невозможно, так как  $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ . Значит можно разделить на  $\sin^2 x$ .

2) Решим уравнение разложением на множители:

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x (\cos x + \sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x + \sin x = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$
$$x = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

# Уравнения, линейные относительно $\sin x$ и $\cos x$

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Если  $a=b=0$ , а  $c$  не равно 0, то уравнение теряет смысл;

Если  $a=b=c=0$ , то  $x$  – любое действительное число, то есть уравнение обращается в тождество.

Рассмотрим случаи, когда  $a, b, c$  не равны 0

$$2 \sin x + \cos x = 2$$

Примеры:

$$3 \sin 5x - 4 \cos 5x = 2$$

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$2 \sin 3x + 5 \cos 3x = 8.$$

Последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его не превосходит 7.

Уравнения, этого вида можно решить многими способами: с помощью

универсальной подстановки, выразив  $\sin x$  и  $\cos x$  через  $\operatorname{tg} x$ ; сведением уравнения

$$2 \sin x + \cos x = 2$$

Данное уравнение является уравнением вида  $a \sin x + b \cos x = c$ ,

(1)

где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , которое можно решить другим способом. Разделим обе части этого уравнения на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

Введем вспомогательный аргумент  $\varphi$ , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Такое число существует, так как

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением.

# Уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$ .

Используя формулы  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ,  $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$  и

записывая правую часть уравнения в виде  $2 = 2 \cdot 1 = 2(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})$

получаем  $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ ,

$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ . Поделив это уравнение на  $\cos^2 \frac{x}{2}$

получим равносильное уравнение  $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$ .

Обозначая  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ , получаем  $3y^2 - 4y + 1 = 0$ , откуда  $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$  .

1)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

# РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

□  $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$

□  $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$



# ОТВЕТЫ.

$$\square 4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$$

$$\square (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\square 2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\square \pm\pi/6 + \pi n; -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

∈

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$$4 \sin x + 3 \cos x = 5.$$

# Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$ .

Здесь  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент  $\varphi$ , такой, что  $\cos \varphi = \frac{4}{5}$      $\sin \varphi = \frac{3}{5}$

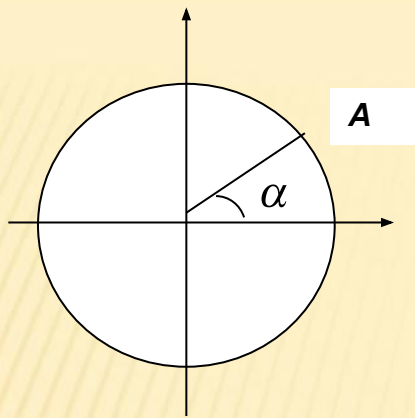
Исходное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi &= 1 \\ \sin(x + \varphi) &= 1 \end{aligned}$$

откуда  $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{3}=60^\circ$
<b><i>sin x</i></b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<b><i>cos x</i></b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<b><i>tg x</i></b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
<b><i>ctg x</i></b>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



	$0^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
<b><i>sin</i> x</b>	0	1	0	-1	0
<b><i>cos</i> x</b>	1	0	-1	0	1
<b><i>tg</i> x</b>	0	-	0	-	0
<b><i>ctg</i> x</b>	-	0	-	0	-

