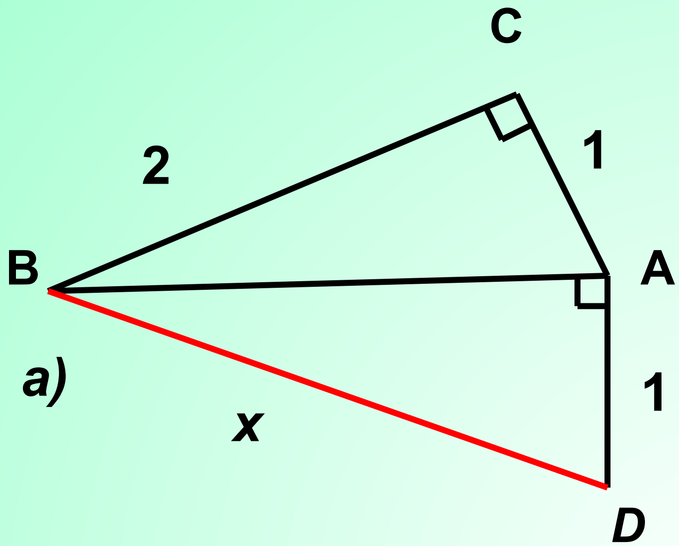
Тема: Свойства медиан в прямоугольном треугольнике

Пифагор Самосский

Ок. 580 – ок. 500 г. до н. э.

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них - это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении… Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

И.Кеплер



Из ΔABC ($\angle C=90^0$)

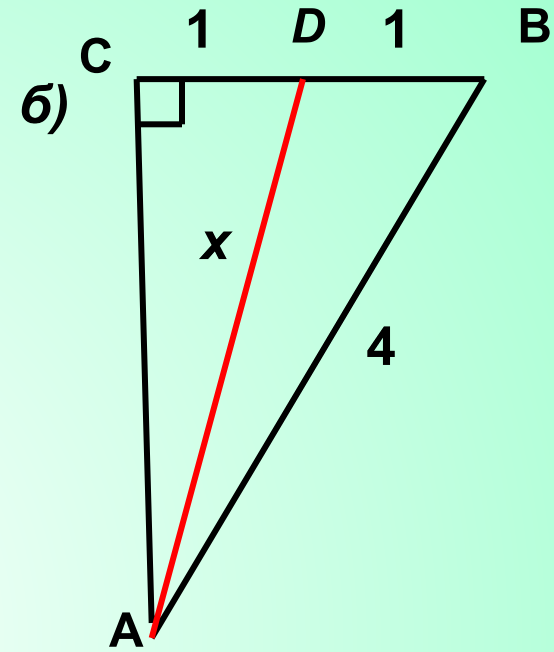
$AB^2=BC^2+AC^2$

$AB^2=5$

Из Δ ДВА($\angle A=90^0$)

$X^2=AB^2+AD^2$

$X^2=6$



ИзΔABC($\angle C=90^0$)

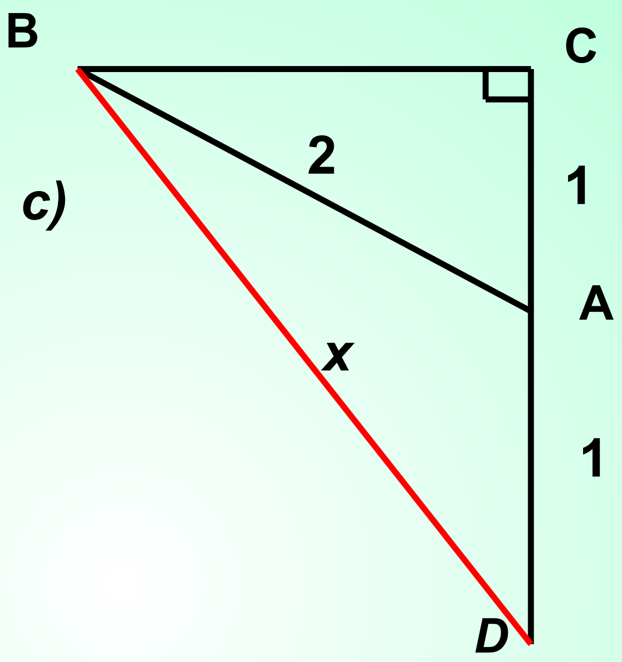
$AC^2=AB^2-BC^2$

$AC^2=12$

Из ΔADC ($\angle C=90^0$)

$X^2=AC^2+CD^2$

$X^2=13$



Из ΔABC ($\angle C=90^0$)

$BC^2=AB^2-AC^2$

$BC^2=3$

Из ΔBCD ($\angle C=90^0$)

$BD^2=BC^2+CD^2$

$BD^2=7$

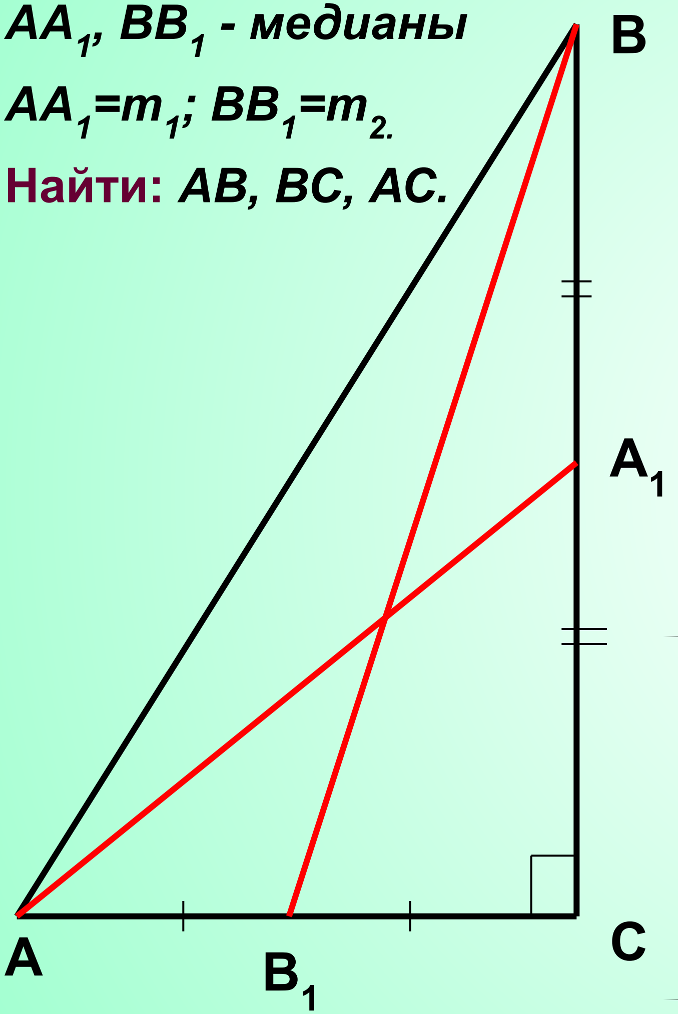
Тема: Свойства медиан в прямоугольном треугольнике

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$

AA_1, BB_1 - медианы

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB, BC, AC.



Решение. AB=c, AC=b, BC=a.

Из Δ AA_1C ($\angle C=90^0$) по теореме Пифагора

$$AA_1^{\,2}=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Из Δ B_1BC ($\angle C=90^0$) по теореме Пифагора

$$BB_1^{\,2}=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

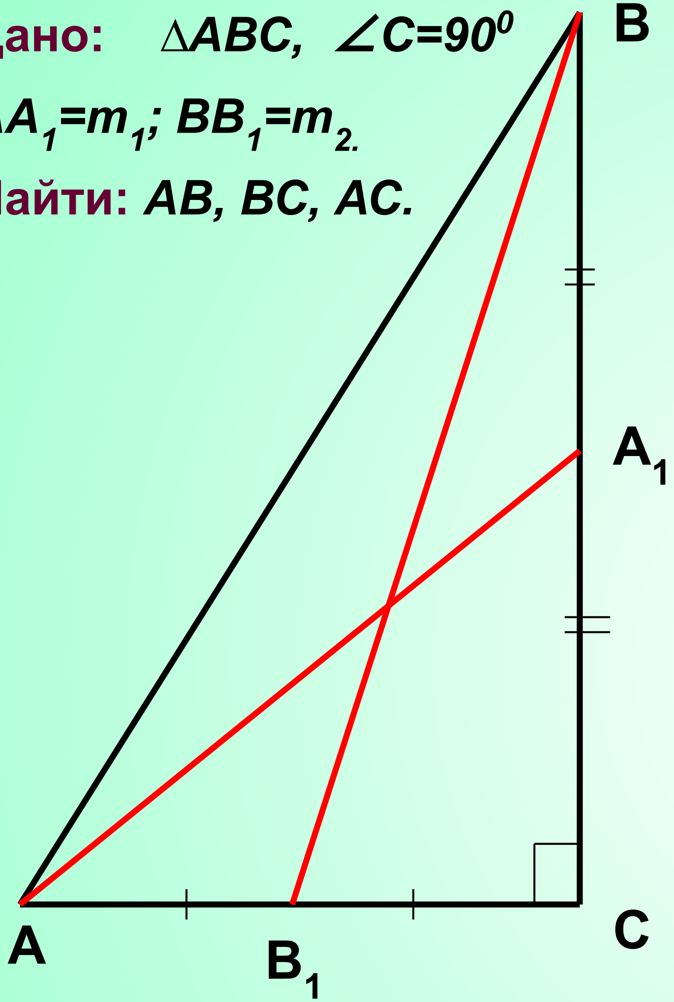
$$\left[\begin{array}{l} m_1^{\,2}=b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ m_2^{\,2}=a^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b^2=m_1^{\,2}-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ m_2^{\,2}=a^2+\dfrac{m_1^{\,2}-\dfrac{a^2}{4}}{2} \end{array}\right.$$

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB, BC, AC.



$$m_2{}^2 = a^2 + \frac{m_1{}^2 - \frac{a^2}{4}}{4}$$

$$4m_2{}^2 = 4a^2 + m_1{}^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$4m_2{}^2 - m_1{}^2 = \frac{15}{4}a^2$$

$$a^2 = \frac{4}{15}\left(4m_2{}^2 - m_1{}^2\right)$$

$$b^2 = m_1{}^2 - \frac{1}{15}\left(4m_2{}^2 - m_1{}^2\right) = \frac{16}{15}m_1{}^2 - \frac{4}{15}m_2{}^2$$

$$b^2 = \frac{4}{15}(4m_1{}^2 - m_2{}^2)$$

$$c^2 = \frac{16}{15}m_2{}^2 - \frac{4}{15}m_1{}^2 + \frac{16}{15}m_1{}^2 - \frac{4}{15}m_2{}^2 = \frac{4}{5}m_2{}^2 + \frac{4}{5}m_1{}^2$$

$$c^2 = \frac{4}{5}\left(m_1{}^2 + m_2{}^2\right)$$

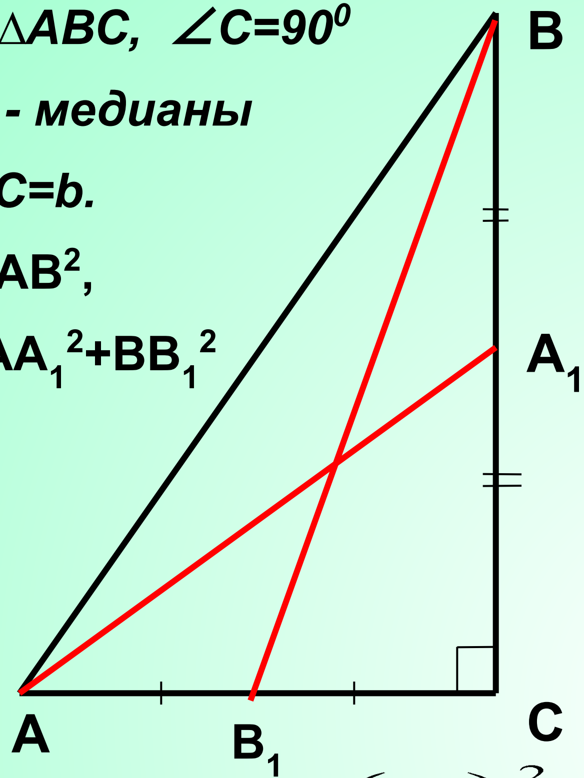
Дано: *ΔABC, $\angle C=90^0$*

AA_1, BB_1 - медианы

$BC=a$, $AC=b$.

Найти: AB^2,

$AA_1^2+BB_1^2$



$$AA_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

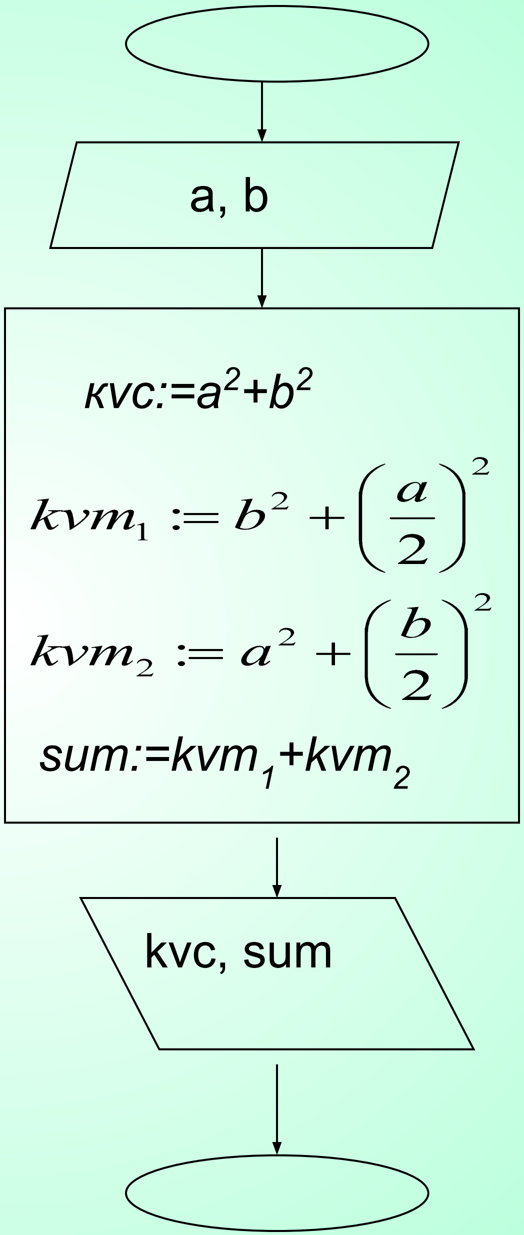
$$BB_1^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Введем обозначения:

AB^{2}= kvc

AA_1^2=kvm_1

BB_1^2=kvm_2



a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
13	84		
36	77		
51	68		

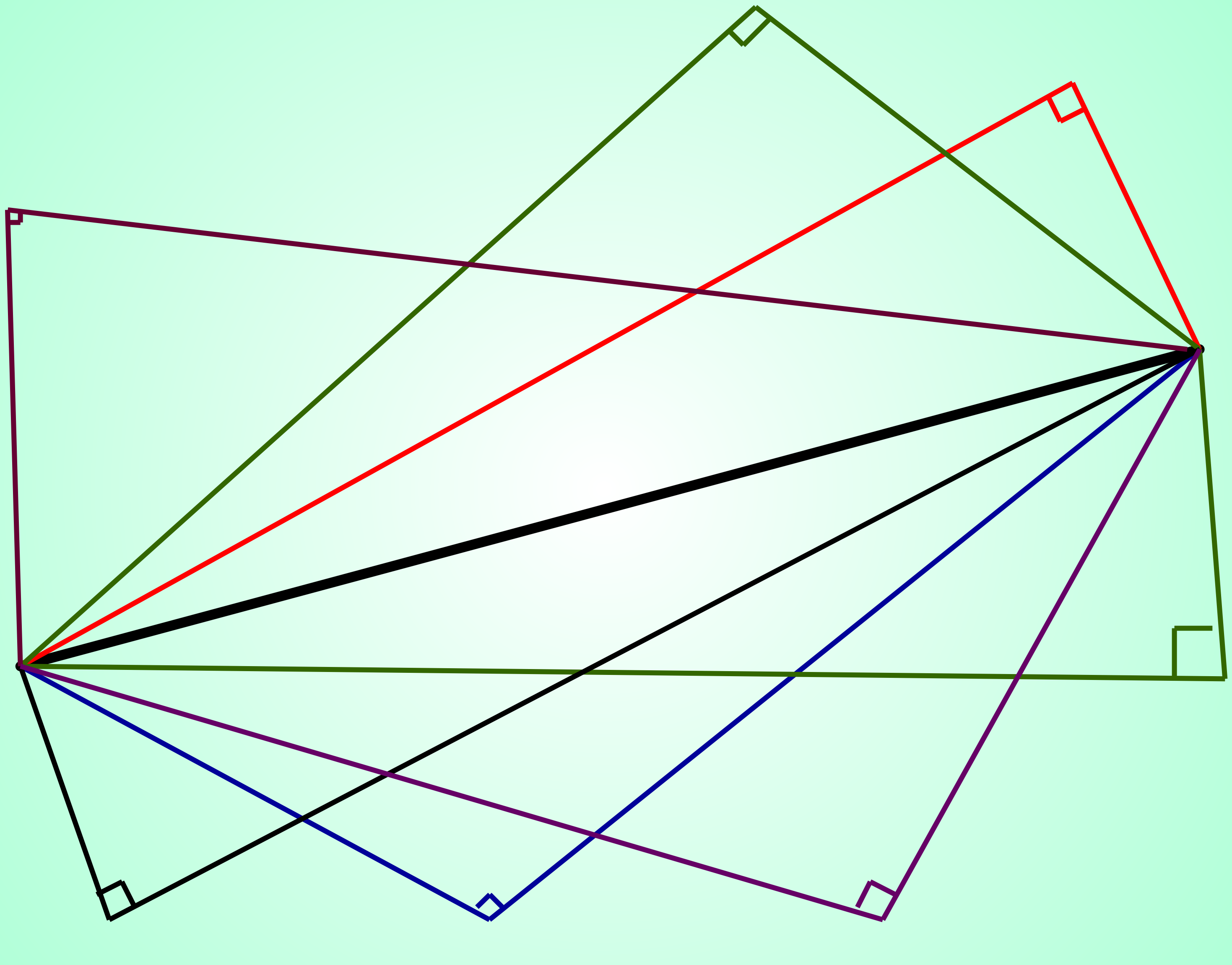
a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
16	63		
25	60		
39	52		

a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
30	25		
39	2		
38	9		

a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
13	84	7225	9031
36	77	7225	9031
51	68	7225	9031

a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
16	63	4225	5281
25	60	4225	5281
39	52	4225	5281

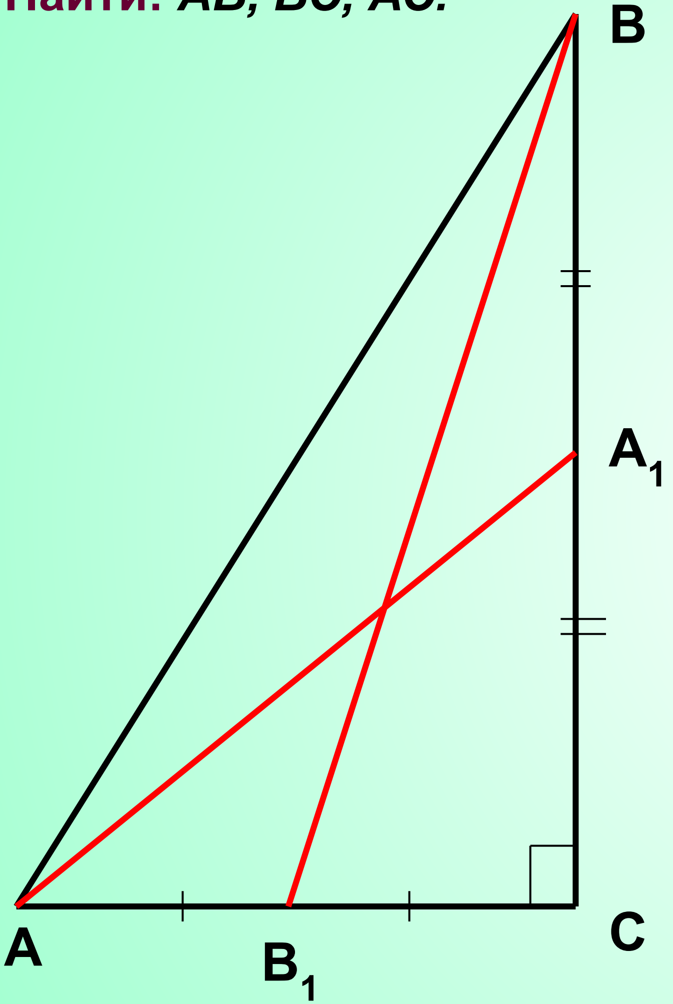
a	b	c^2	$m_1^2+m_2^2$
30	25	1525	1906
39	2	1525	1906
38	9	1525	1906



Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2.$

Найти: AB, BC, AC.



Если в прямоугольном треугольнике гипотенуза постоянна, а меняются только катеты, то сумма квадратов медиан величина постоянная

$$\begin{cases} m_1^2 = b^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ m_2^2 = a^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

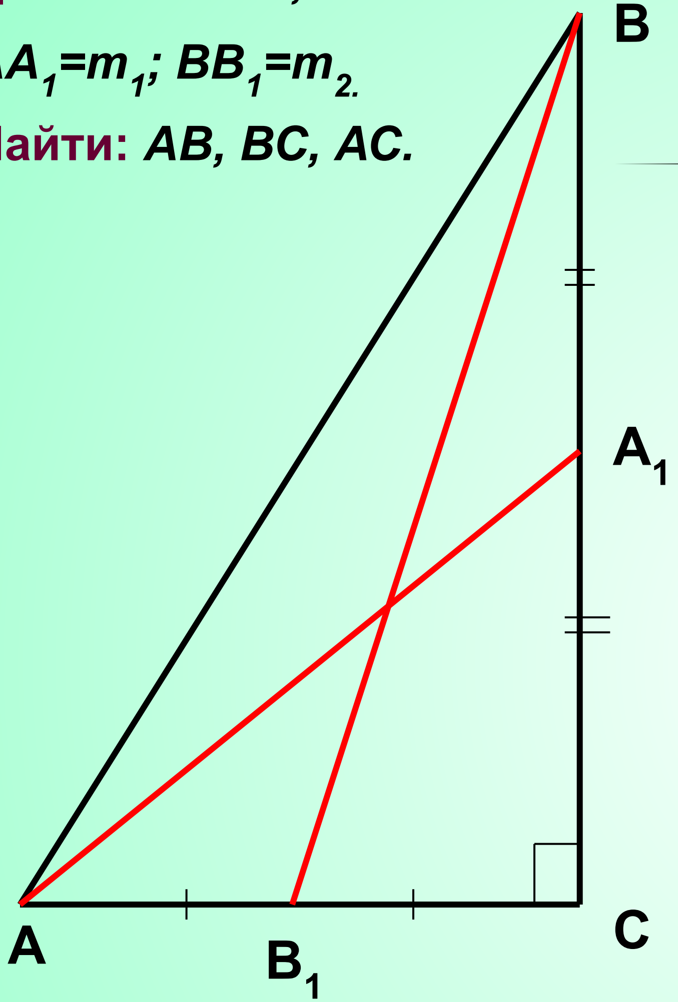
$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{5}{4}c^2$$

$$c^2 = \frac{4}{5}\left(m_1^2 + m_2^2\right)$$

Дано: ΔABC, $\angle C=90^0$

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$.

Найти: AB, BC, AC.



$$\begin{cases} b^2=c^2-a^2 \\ m_1{}^2=c^2-a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$a^2=\frac{4}{3}\left(c^2-m_1{}^2\right)$$

$$a^2=\frac{4}{15}\left(4m_2{}^2-m_1{}^2\right)$$

$$b^2=-\frac{1}{3}c^2+\frac{4}{3}m_1{}^2$$

$$b^2=\frac{4}{15}(4m_1{}^2-m_2{}^2)$$

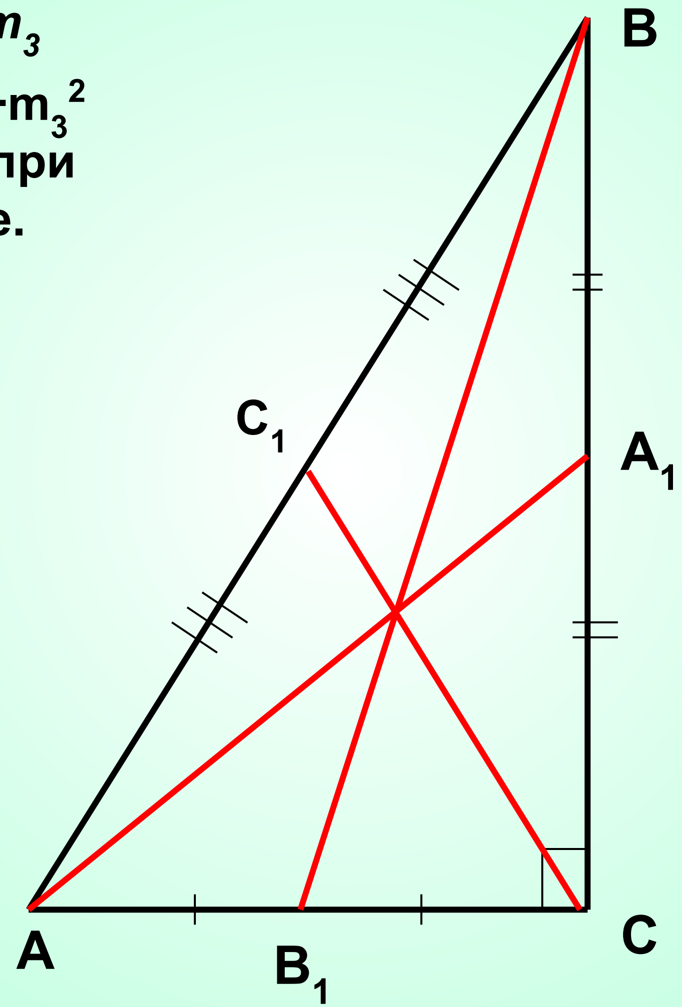
Домашнее задание

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C=90^0$

AA_1, BB_1, CC_1 - медианы

$AA_1=m_1$; $BB_1=m_2$, $CC_1=m_3$

Доказать, что $m_1^2+m_2^2+m_3^2$ величина постоянная при постоянной гипотенузе.



Тема: Свойства медиан в прямоугольном треугольнике

Пифагор Самосский

Ок. 580 – ок. 500 г. до н. э.

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них - это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении… Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень.

И.Кеплер