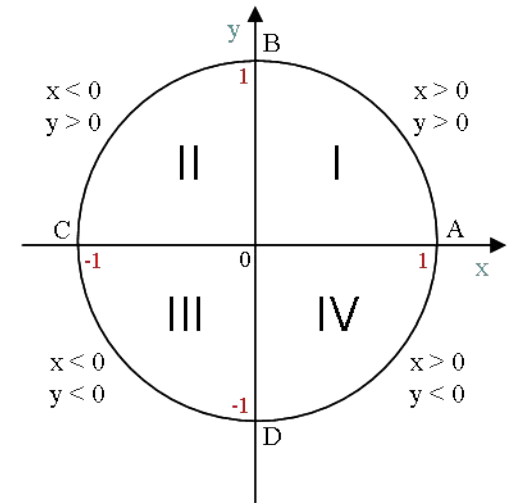


Занимательная математика АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ.



Числовая окружность.

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Числовая окружность в жизни.

Определение числовой окружности.

Общий вид числовой окружности.

Длина числовой окружности.

Местонахождение основных точек окружности.

Примеры задач.

Числовая окружность.

Числовая окружность в жизни.

В реальной жизни часто встречается движение по окружности. Например в спорте: соревнования велосипедистов, которые проезжают определенный круг на время или соревнования гоночных автомобилей которым надо проехать наибольшее количество кругов за отведенное время.



Числовая окружность.

Числовая окружность в жизни.

Рассмотрим конкретный пример.

Бегун бежит по кругу длиной 400 метров. Спортсмен стартует в точке А (рис. 1) и движется против часовой стрелки. Где он будет находиться через **200м**, **800м**, **1500м**? А где провести финишную черту если бегуну пробежать **4195м**?

Решение:

Через **200м**. бегун будет находиться в точке С, так как он пробежит ровно половину дистанции.

Пробежав **800м.**, бегун сделает ровно два круга и окажется в точке А.

1500м. это 3 круга по 400 м (1200м.) и еще 300 метров, то есть $\frac{3}{4}$ от беговой дорожки, финиш этой дистанции в точке D.

Где будет находиться наш бегун пробежав **4195м**? 10 кругов это 4000 метров, останется пробежать 195 метров, это на 5 метров меньше чем половина дистанции. Значит финиш будет в точки М, расположенной около точки С.

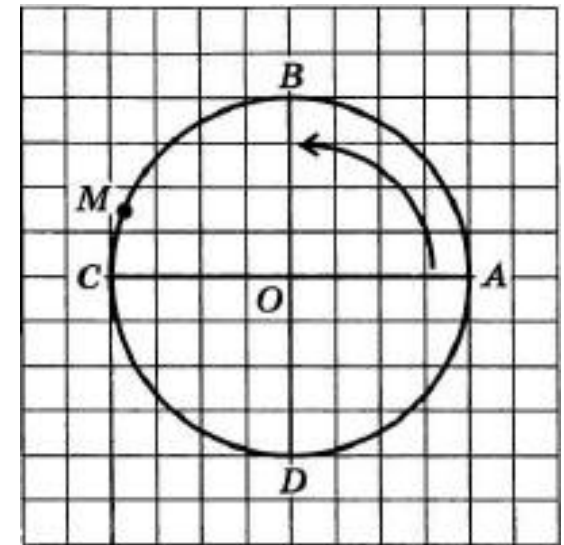


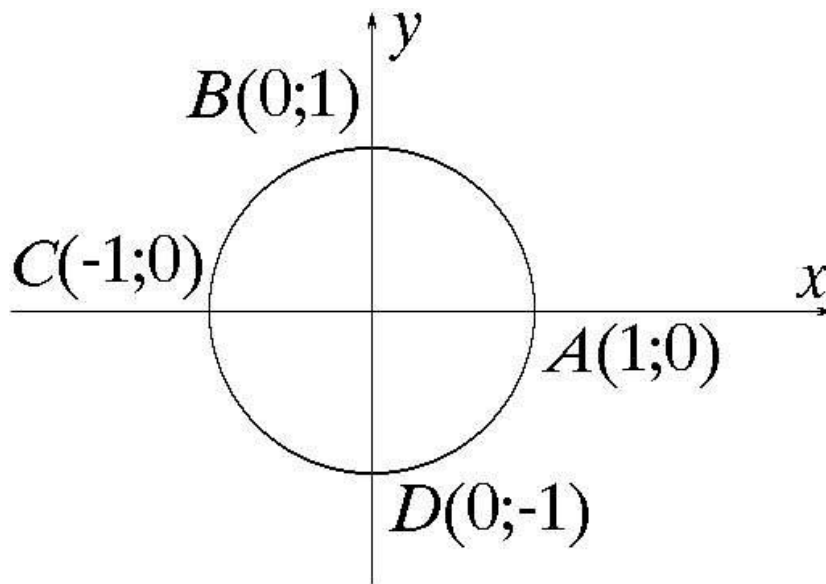
Рисунок 1.

Числовая окружность.

Определение.

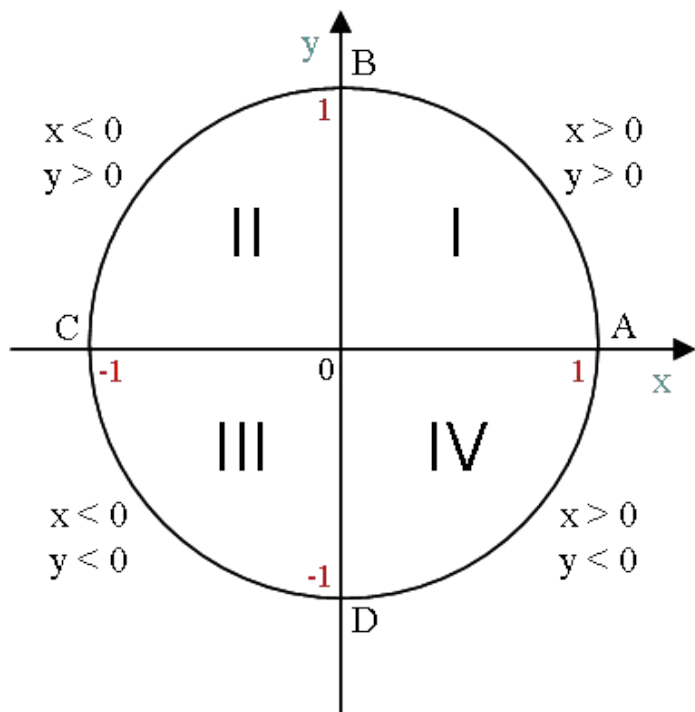
Числовая окружность – это единичная окружность, точки которой соответствуют определенным действительным числам.

Единичной окружностью называют окружность радиуса 1.



Числовая окружность.

Общий вид числовой окружности.



1) Радиус окружности принимается за **единицу** измерения.

2) **Горизонтальный** диаметр обозначают AC, причем A – это крайняя **правая** точка.

Вертикальный диаметр обозначают BD, причем B – это крайняя **верхняя** точка.

Диаметры AC и BD делят окружность на четыре четверти:

первая четверть – это дуга AB

вторая четверть – дуга BC

третья четверть – дуга CD

четвертая четверть – дуга DA

3) **Начальная точка** числовой окружности – точка A.

Отсчет от точки A **против** часовой стрелки называется **положительным направлением**.

Отсчет от точки A **по** часовой стрелке называется **отрицательным направлением**.

Числовая окружность.

Длина числовой окружности.

Длина числовой окружности вычисляется по формуле:

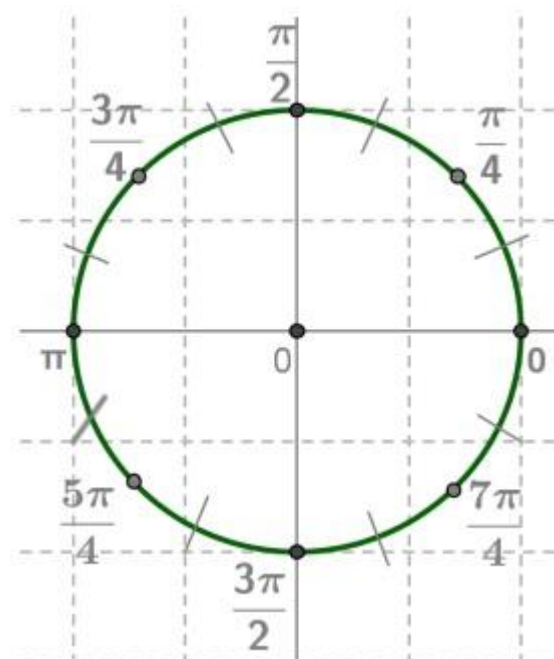
$$l = 2 \pi \cdot R = 2 \pi \cdot 1 = 2 \pi$$

Так как единичная окружность то $R = 1$.

Если взять $\pi \approx 3,14$, то длина окружности l

может быть выражена числом $2 \pi \approx 2 \cdot 3,14 = 6,28$

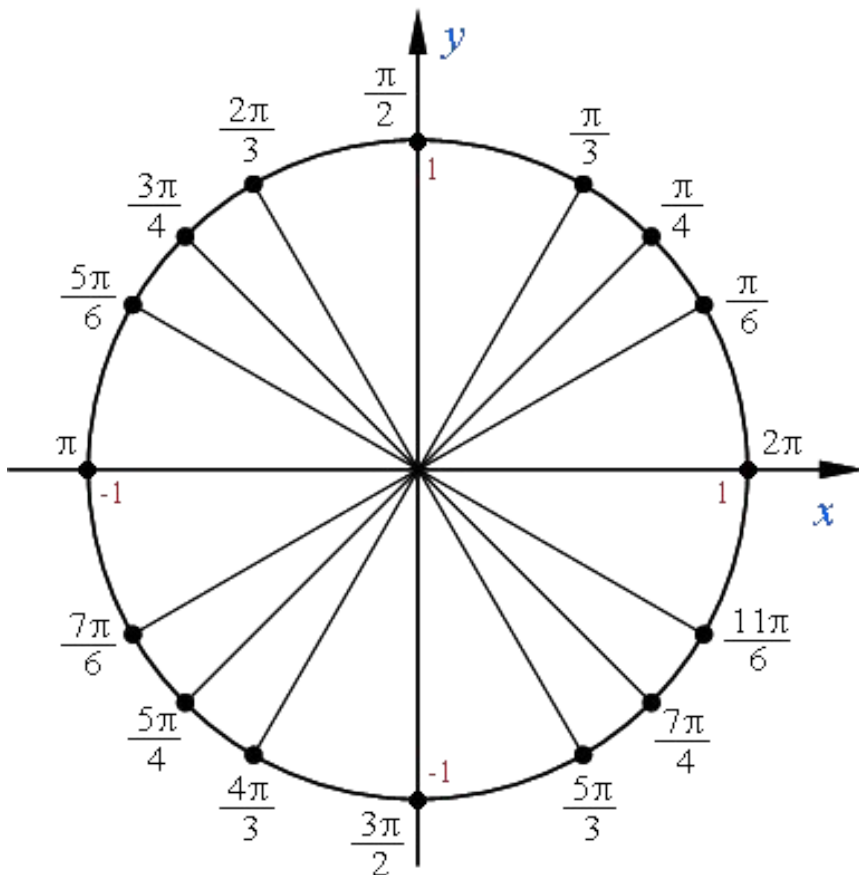
Длина каждой четверти равна $\frac{1}{4} \cdot 2 \pi = \frac{\pi}{2}$



Числовая окружность.

Местонахождение основных точек окружности.

Основные точки на окружности и их имена представлены на рисунке:



Каждая из четырёх четвертей числовой окружности разделена на три равные части и около каждой из полученных двенадцати точек записано число, которому она соответствует.

Для числовой окружности верно следующее утверждение:

Если точка M числовой окружности соответствует числу t , то она соответствует и числу вида $t+2\pi \cdot k$, где k – целое число

Важно!

$$M(t) = M(t+2\pi \cdot k)$$

Числовая окружность.

Пример

В единичной окружности дуга АВ разделена точкой М на две равные части, а точками К и Р — на три равные части.

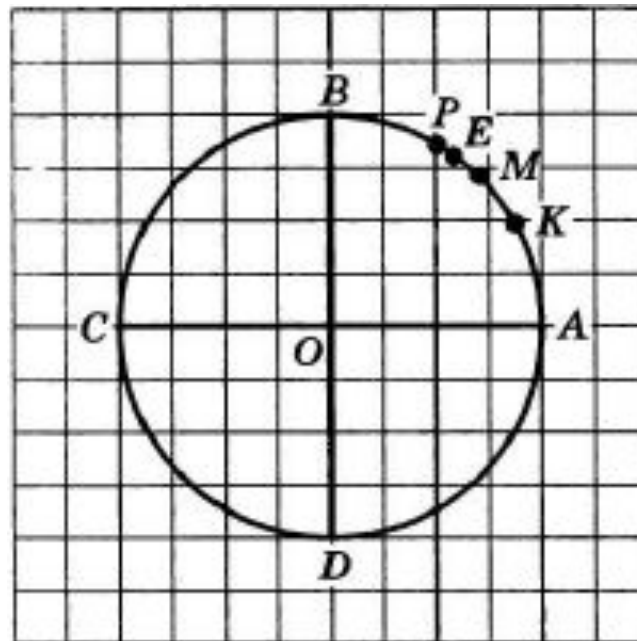
Чему равна длина дуги: АМ, МВ, АК, КР, РВ, АР, КМ?

Длина дуги АВ = $\pi/2$, разделив ее на две равные части точкой М, получим две дуги, длиной — $\pi/4$ каждая. Значит, $AM = MB = \pi/4$

Дуга АВ разбита на три равные части точками К и Р, то длина каждой полученной части равна $1/3 \cdot \pi/2$, т. е. $\pi/6$ значит, $AK = KR = RB = \pi/6$.

Дуга АР состоит из двух дуг АК и КР длиной — $\pi/6$. Значит, $AP = 2 \cdot \pi/6 = \pi/3$

Осталось вычислить длину дуги КМ. Эта дуга получается из дуги АМ исключением дуги АК. Таким образом, $KM = AM - AK = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$



Числовая окружность.

Пример

Найти на числовой окружности точку которая соответствует заданному числу: 2π , $7\pi/2$, $\pi/4$, $-3\pi/2$.

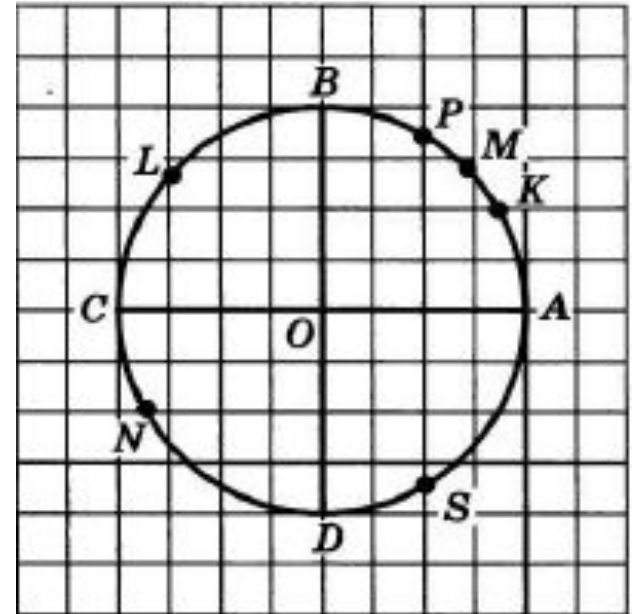
Решение:

Числу 2π соответствует точка A, т.к. пройдя по окружности путь длиной 2π , т.е. ровно одну окружность, мы опять попадем в точку A

Числу $7\pi/2$ соответствует точка D, т.к. $7\pi/2 = 2\pi + 3\pi/2$, т.е. двигаясь в положительном направлении, нужно пройти целую окружность и дополнительно путь длиной $3\pi/2$, который закончится в точке D

Числу $\pi/4$ соответствует точка M, т.к. двигаясь в положительном направлении, нужно пройти путь в половину дуги AB длиной $\pi/2$, который закончится в точке M.

Числу $-3\pi/2$ соответствует точка B, т.к. двигаясь в отрицательном направлении из точки A, нужно пройти путь длиной $3\pi/2$, который закончится в точке B



Числовая окружность.

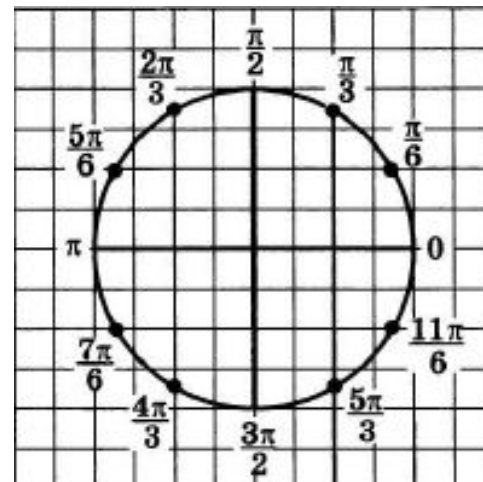
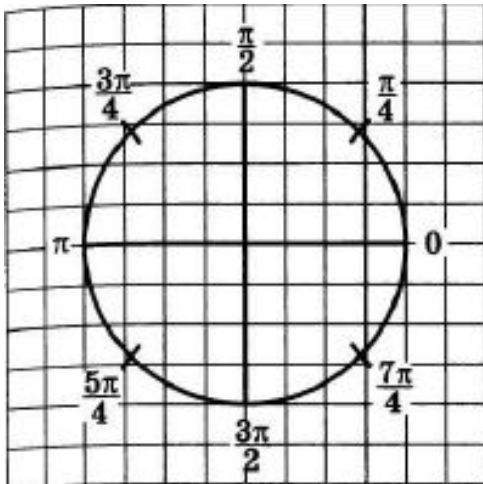
Пример

Найти на числовой окружности точки а) $21\pi/4$ б) $-37\pi/6$

Решение: Пользуясь формулой что число $M(t) = M(t+2\pi \cdot k)$ (8 слайд) получим

а) $21\pi/4 = (4+5/4) \cdot \pi = 4\pi + 5\pi/4 = 2 \cdot 2\pi + 5\pi/4$, значит числу $21\pi/4$ соответствует такое же число что и числу $5\pi/4$ - середина третьей четверти.

б) $-37\pi/6 = -(6+1/6) \cdot \pi = -(6\pi + \pi/6) = -3 \cdot 2\pi - \pi/6$, значит числу $-37\pi/6$ соответствует такое же число что и числу $-\pi/6$, тоже самое что и $11\pi/6$.



Числовая окружность.

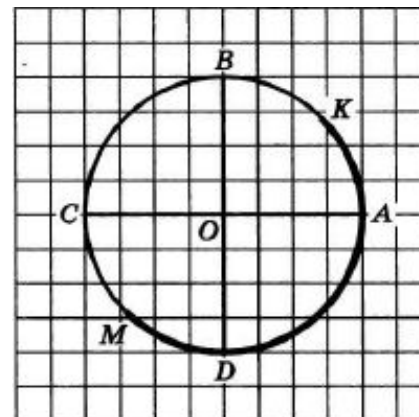
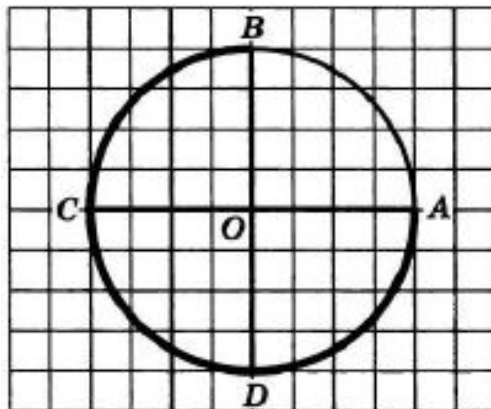
Пример

Найти все числа t , которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге: а) ВА б) МК

Решение:

а) Дуга ВА - это дуга с началом в точке В и концом в точке А при движении по окружности против часовой стрелки. Точка В соответственно равна $\pi/2$, а точка А равна 2π . Значит для точек t имеем: $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$. Но согласно формуле на слайде 8 числам $\pi/2$ и 2π соответствуют числа вида $\pi/2 + 2\pi \cdot k$ и $2\pi + 2\pi \cdot k$, соответственно. Тогда наше число t принимает значения: $\pi/2 + 2\pi \cdot k \leq t \leq 2\pi + 2\pi \cdot k$, где k – целое число

б) Дуга МК - это дуга с началом в точке М и концом в точке К. Точка М соответственно равна $-3\pi/4$, а точка К равна $\pi/4$. Значит для точек t имеем: $-3\pi/4 \leq t \leq \pi/4$. Но согласно формуле на слайде 8 числам $-3\pi/4$ и $\pi/4$ соответствуют числа вида $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k$ и $\pi/4 + 2\pi \cdot k$, соответственно. Тогда наше число t принимает значения: $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k \leq t \leq \pi/4 + 2\pi \cdot k$, где k – целое число



Числовая окружность.

Задачи для самостоятельного решения.

1) В единичной окружности дуга BC разделена точкой T на две равные части, а точками K и P — на три равные части.

Чему равна длина дуги: BT , TC , BK , KP , PC , BP , KT ?

2) Найти на числовой окружности точку которая соответствует заданному числу: π , $11\pi/2$, $21\pi/4$, $-7\pi/2$, $17\pi/6$.

3) Найти все числа t , которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге: а) AB б) AC в) PM , где P – середина дуги AB , M - середина DA