

# Тригонометрические уравнения

## Методы решений

# История тригонометрии

- Тригонометрия – слово греческое и в буквальном переводе означает измерение треугольников (trigwnon - треугольник, а metrew- измеряю)
- Возникновение тригонометрии связано с землемерием, астрономией и строительным делом
- Название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны ещё две тысячи лет назад
- Впервые способы решения треугольников были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (2 в. до н. э.) и Клавдием Птолемеем (2 в. н. э.)
- Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли:
  - ~Аль-Батани
  - ~Абу-ль-Вафа
  - ~Мухамед-бен Мухамед
  - ~Насиреддин Туси Мухамед

# Тригонометрические уравнения

- Тригонометрические уравнения - это равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное(переменную) под знаком тригонометрических функций
- Решить тригонометрическое уравнение, значит, найти все его корни

# Уравнения вида $\sin$

$$x=a$$



- Уравнение  $\sin x=a$  имеет решение при  $a$  принадлежащем  $[-1; 1]$
- Общая формула для решения подобных уравнений:  
$$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$$
, где  $n$  принадлежит  $Z$  и  $\arcsin a$  принадлежит  $[-\pi/2; \pi/2]$
- Примеры:  
 $\sin 2x=0,5$   
 $\sin x=-0,3$

# Уравнения вида $\cos$

$$x=a$$



- Уравнение  $\cos x=a$  имеет решение при  $a$  принадлежащем  $[-1; 1]$
- Общая формула для решения подобных уравнений:  
 $x=+ / -\arccos a + 2\pi n$ , где  $n$  принадлежит  $Z$  и  $\arccos a$  принадлежит  $[0; \pi]$
- Полезно знать, что  $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$
- Примеры  
 $\cos 4x=-1$   
 $\cos 0,5x=0$

# Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$



- Уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет решение при всех значениях  $a$
- Общая формула для решения подобных уравнений:  
 $x = \operatorname{arctg} a + \Pi n$ , где  $n$  принадлежит  $\mathbb{Z}$
- Полезно помнить, что  $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$
- Примеры  
 $\operatorname{tg} 7x = 25$   
 $\operatorname{tg} x = 0,7$

# Уравнения вида $ctg$

$$x = a$$



- Уравнение  $ctg x = a$  имеет решение при всех значениях  $a$
- Общая формула для решения подобных уравнений:  
 $x = \text{arcctg } a + \Pi n$ , где  $n$  принадлежит  $Z$  и  $\text{arcctg } a$  принадлежит  $[0; \Pi]$

Полезно помнить, что  $\text{arcctg}(-a) = -\text{arcctg } a$

- Примеры  
 $ctg 9x = -0,1$   
 $ctg 0,6x = 127$

# Метод подстановки

- Уравнения вида  $a \sin^2 x + b \sin^4 x + c = 0$ ,  $a \cos^3 x + b \cos x + c = 0$ ,  
 $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg}^4 x + c = 0$ ,  $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg}^4 x + c = 0$  сводятся к одной и той же функции относительно одного и того же выражения, входящего только под знак функции

То есть при замене  $\sin x = q$ ,  $\cos x = w$ ,  $\operatorname{tg} x = e$ ,  $\operatorname{ctg} x = r$  получаются алгебраические уравнения:

Уравнения вида  $a q^2 + b q^4 + c = 0$ ,  $a w^3 + b w + c = 0$ ,  
 $a e^2 + b e^4 + c = 0$ ,  $a r^2 + b r + c = 0$

После нахождения корней уравнений необходимо вернуться к  $\sin x = q$ ,  $\cos x = w$ ,  $\operatorname{tg} x = e$ ,  $\operatorname{ctg} x = r$

не забыв что  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ , при  $a$  принадлежащем  $[-1; 1]$



# Однородные уравнения

- Уравнения вида  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ,  $a \sin^2 x + b \cos^2 x + c = 0$  и т.д. называются однородными относительно  $\sin x$  и  $\cos x$
- Делением на  $\cos^2 x$ , где  $*$ -степень уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции  $\operatorname{tg} x$
- Рассмотрим уравнение  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$  и разделим его на  $\cos^2 x$ , получим:  $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$  при  $a \neq 0$  оба уравнения равносильны, т.к.  $\cos x \neq 0$ , если же  $\cos x = 0$ , то из первого уравнения видно, что  $\sin x = 0$ , что невозможно т.к. теряет смысл основное тригонометрическое тождество.