

Урок по теме: “Тригонометрические формулы.”

Ельцова Н.Г., учитель МОУ «Гимназия №11»,
Г Норильск.

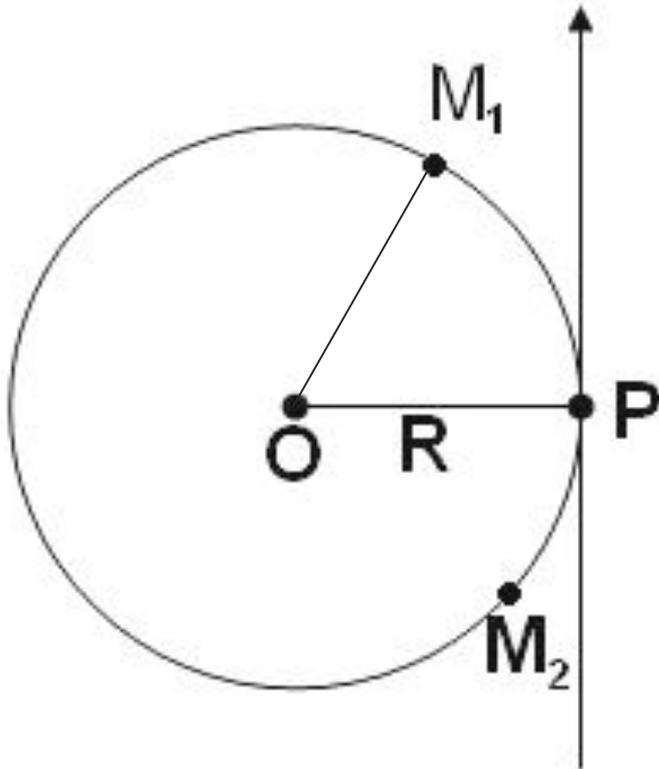
Рассмотрим следующие вопросы:

1. радианная мера угла;
 2. поворот точки вокруг начала координат;
 3. определение синуса, косинуса и тангенса произвольного угла;
 4. знаки синуса, косинуса и тангенса;
 5. зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла;
 6. синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$;
- 

Повторим основные понятия:

- координатная прямая;
 - координатная плоскость;
 - центральный угол;
 - $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, где $0 < \alpha < 180^\circ$;
 - Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом равным 1.
-

Вопрос 1: Радианная мера угла.



- Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
- Кроме градусной меры угла существует еще и радианная.
- Рассмотрим окр($O(0,0);R$) дугу PM_1 , равную радиусу R .
- **Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.**

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} \quad \alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right) \cdot \alpha^{\circ}$$

Задачи.

- Найти градусную меру угла, равного

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад}$$

решение:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135^{\circ}$$

- Найти радианную меру угла, равного

$$15^{\circ}$$

решение:

$$15^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}$$

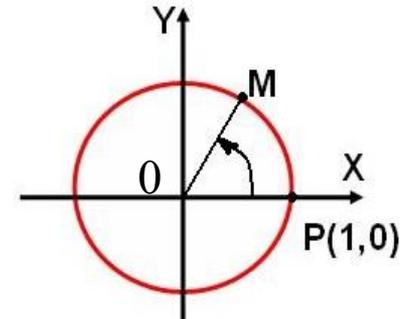
Задание: заполните таблицу наиболее встречающихся углов в градусной и радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радян	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

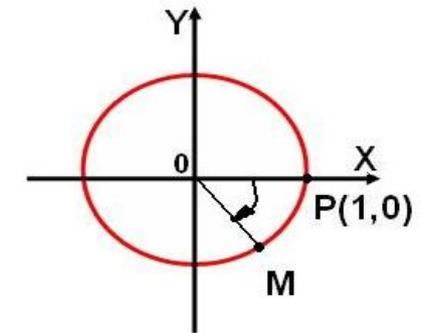
Вопрос 2: Поворот точки вокруг начала координат.

- Установим соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.
- Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют **единичной окружностью**.
- Введем понятие поворота окружности вокруг начала координат на угол в α радиан, α - любое действительное число.

1. $\alpha > 0$



2. $\alpha < 0$



3. Поворот на 0 радиан, означает, что точка остается на месте.
-

Вопрос 3: определение синуса, косинуса, тангенса угла.

Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1,0)$ вокруг начала координат на угол α .

Обозначается $\sin \alpha$

Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1,0)$ вокруг начала координат на угол α .

Обозначается $\cos \alpha$

- При повороте т.Р(1,0) на угол α , т.е на угол 90° , получается точка $(0,1)$.
 - Ордината точки равна 1, поэтому $\sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.
 - Абсцисса точки равна 0, $\cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.
-

Задание:

Найти $\cos 270^\circ =$

$\sin 270^\circ =$

$\sin \pi + \sin 1,5\pi =$

$\sin 3\pi - \cos 1,5\pi =$

Определение тангенса и котангенса угла

- **Тангенсом** угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.

- $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- **Котангенсом** угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу.

- $$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

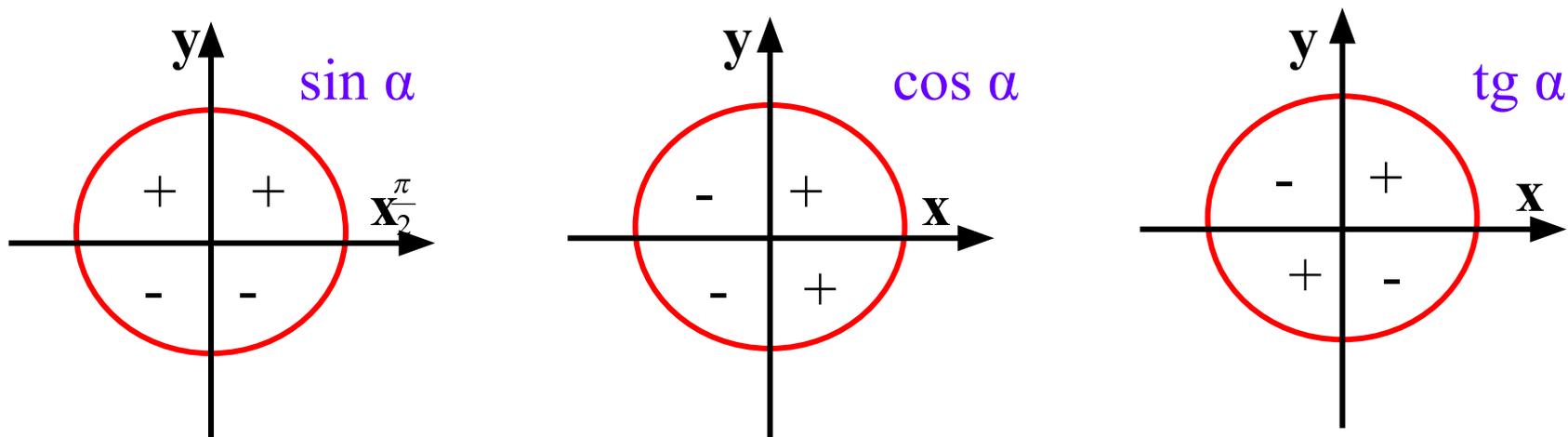
- Найдите

$$\operatorname{tg} 0^\circ =$$

$$\operatorname{ctg} 270^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ =$$

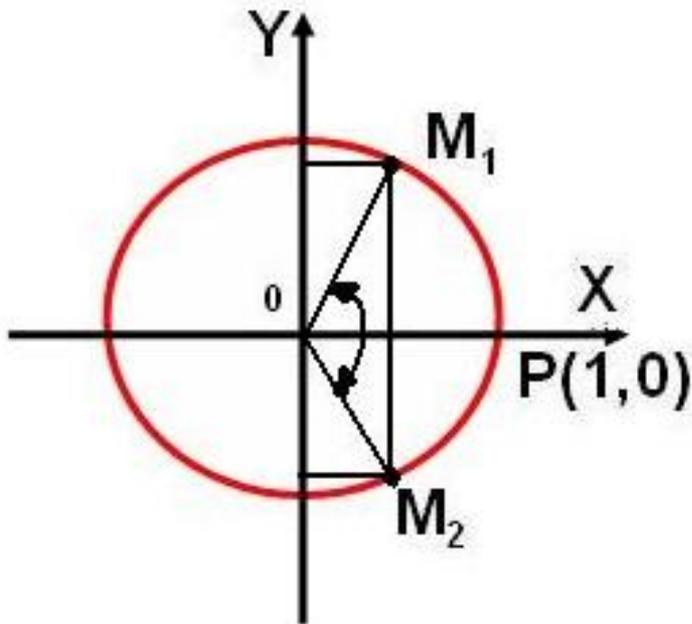
Вопрос 4: знаки синуса косинуса и тангенса. Синус косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.



Пусть $t P(1,0)$ движется по единичной окружности против часовой стрелки.

- $\alpha \in 1\text{четв}$, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.
 - $\alpha \in 2\text{четв}$, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.
 - $\alpha \in 3\text{четв}$, $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.
 - $\alpha \in 4\text{четв}$, $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.
-

Вопрос 5: Синус косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.



□ Пусть $t M_1$ и $t M_2$ единичной окружности получены поворотом $t P(1,0)$ на углы α и $-\alpha$.

Тогда ось Ox делит угол $M_1 O M_2$ пополам, поэтому $t M_1$ и M_2 симметричны относительно оси Ox

$M_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $M_2(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$.

Значит **(1) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$**

(2) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Используя определения тангенса и котангенса

(3) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

(4) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

Формулы 1-2 справедливы при любых α .

Формула 3, при

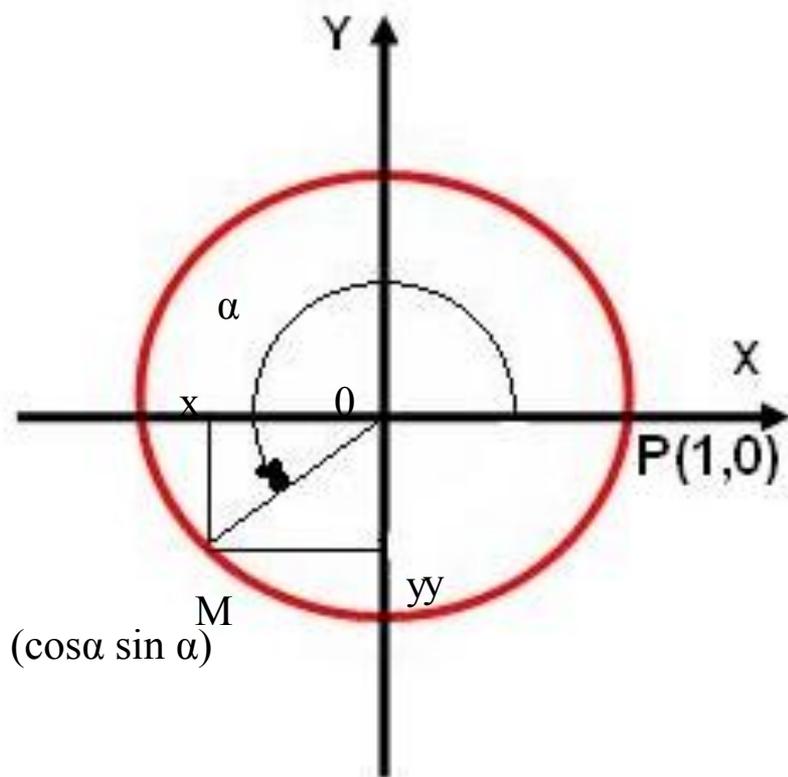
$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Задание:

1) докажите формулу (3) самостоятельно.

2) выясните знаки синуса, косинуса и тангенса углов: а) $\frac{3\pi}{4}$,
б) 745° , в) $-\frac{5\pi}{4}$

Вопрос 5 зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла.



- Пусть $M(x;y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1;0)$ на угол α . Тогда по определению синуса и косинуса $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 = 1$, следовательно

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется

ОСНОВНЫМ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ
ТОЖДЕСТВОМ.

- Зависимость между тангенсом и котангенсом определяется равенством: **(2) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$,**

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

ЗАДАЧА

Дано:

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Найти: $\sin \alpha$

Решение:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

т.к. $\alpha \in 3$ четв

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 13$

Решение:

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, следовательно

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Найти: $\operatorname{ctg} \alpha$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{13}$$

Итог урока:

- ✓ Чему равна радианная мера угла, градусная мера угла?
 - ✓ Какой угол называется углом в один радиан?
 - ✓ Что называют синусом, косинусом, тангенсом произвольного угла α ?
 - ✓ Каким равенством определяется зависимость между синусом и косинусом одного и того же угла? Как называется это равенство?
 - ✓ Каким равенством определяется зависимость между тангенсом и котангенсом одного и того же угла?
-

Математический диктант.

1 вариант

1. Найдите радианную меру угла.

2 вариант

40°
ответ: $\frac{2\pi}{9}$
 $\frac{\pi}{6}$

150°
ответ: $\frac{5\pi}{6}$

2. Найдите градусную меру угла

$\frac{3\pi}{4}$

ответ:

3. найдите координаты точки, полученной поворотом $\pi(1,0)$ единичной окружности на угол 30° и 135°

ответ:

$\frac{\pi}{2}, -3\pi, 180^\circ, -360^\circ$

$-\pi, \frac{3\pi}{2}, -90^\circ, 270^\circ$

ответ:

$(0;1), (-1;0), (-1;0), (1,0)$

ответ:

$(-1;0), (0;-1), (0;-1), (0;-1)$

1 вариант.

4. вычислите:

2 вариант.

$$1) \cos 0^{\circ} + 3 \sin 90^{\circ} =$$

$$= 1 + 3 \cdot 1 = 1$$

$$2) \sin 270^{\circ} - 2 \cos 180^{\circ} =$$

$$= -1 + 2 = 1$$

$$3) 1 + \operatorname{ctg} 270^{\circ} - 5 \operatorname{tg} 360^{\circ} =$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

$$4) \sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$1) \cos 180^{\circ} + 5 \sin 90^{\circ} =$$

$$= -1 + 5 \cdot 1 = 5$$

$$2) \sin 180^{\circ} - 3 \cos 0^{\circ} =$$

$$= 0 - 3 = -3$$

$$3) \sin 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$4) \operatorname{tg} 360^{\circ} - 2 \operatorname{ctg} 270^{\circ} + 3 =$$

$$= 0 - 0 + 3 = 3$$