

## Раздел 2

# Введение в теорию конечных элементов



# Введение в теорию конечных элементов

Стр.

- Основная концепция метода перемещений 6
- Интерпретация матрицы жесткости элементов  $[k_e]$  8
- Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами 10
- Один элемент: осевое нагружение 13
- Общие требования к исходным данным 20
- Исходные данные для примера с ROD элементом 23
- Глобальная матрица жесткости 44
- Процедура анализа сложной конструкции 48
- Выходные данные MSC Nastran 52
- Проверка модели 53

# Введение в теорию конечных элементов

(продолжение)

Стр.

- **Некоторые советы по моделированию** 54
- **Единицы измерения** 56
- **Обзор процедуры решения методом конечных элементов** 58
- **Литература по матричному анализу** 59
- **Литература по МКЭ** 60
- **Матрица жесткости балочного (BAR) элемента** 61
- **Элемент CBAR** 63
- **Описание CBAR элемента** 66
- **Описание оператора PBAR** 74
- **Расчет момента инерции  $J$  для некоторых сечений** 76
- **Поперечный сдвиг** 78

# Введение в теорию конечных элементов

## (продолжение)

Стр.

- Описание оператора PBARL 83
- Силы в балочном элементе 89
- Пример применения элемента CBAR 91
- Входной файл MSC Nastran для данного примера 93
- Вывод перемещений для данного примера 94
- Вывод сил в элементах для данного примера 95
- Вывод напряжений для данного примера 96

# Основная концепция метода перемещений

- Большинство конечноэлементных систем основываются на методе перемещений
- Каждый элемент модели может быть представлен в виде матрицы жесткости, которая в большинстве случаев называется матрицей жесткости элемента
- Матрица жесткости элемента зависит от типа элемента и от его характеристик, которые необходимо смоделировать
- Для одного элемента можно записать уравнение:

$$\{ P \} = [ k ]_e \{ u \} \quad (2-1)$$

# Основная концепция метода перемещений (продолжение)

где  $\{ P \}$  - известные силы, прикладываемые к модели  
 $[ k ]_e$  - матрица жесткости  $[ k_{ij} ]$ , где каждое значение  $[ k_{ij} ]$  есть сила реакции, действующая по координате  $i$  при единичном перемещении по координате  $j$  при условии, что все остальные перемещения равны 0;  
 $\{ u \}$  - перемещения полученные решением уравнения (2-1)

- Для решения уравнения (2-1) и нахождения  $\{ u \}$  должны быть приложены соответствующие граничные условия
- Граничные условия накладываются для устранения перемещений конструкции как твердого тела

# Интерпретация матрицы жесткости элемента $[k]_e$

- $[k]_e$  описывает как сила передается через элемент
- Для упругих задач, закон Максвелла требует, чтобы матрица жесткости была симметричной
- Математически это означает, что матрица  $[k]_e$  должна быть квадратной и удовлетворять следующему отношению:

$$k_{ij} = k_{ji}$$

# Интерпретация матрицы жесткости элемента $[k]_e$ (продолжение)

- Это естественно, поскольку для перемещения конца пружины 1 на заданное расстояние при закрепленном конце 2 требуется приложить такую же нагрузку, что и для перемещения конца 2 на то же расстояние при закрепленном конце 1.
- Значение одного элемента матрицы жесткости  $k_{ij}$  называется коэффициентом жесткости.  $k_{ij}$  имеет размерность нагрузка/перемещение. Размерность  $k_{ij}$  для пружины – нагрузка/длина (т.е., фунт/дюйм, Н/м)



# Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами

- Анализ сложных инженерных задач может быть затруднен (или даже невозможен) без некоторых упрощающих допущений
- Для конечноэлементного анализа, сложная конструкция подразделяется на некоторое число отдельных (конечных) элементов, которые, в совокупности, аппроксимируют поведение всей конструкции
- Непрерывная конструкция представляется, как набор точек (узлов), соединяемых элементами

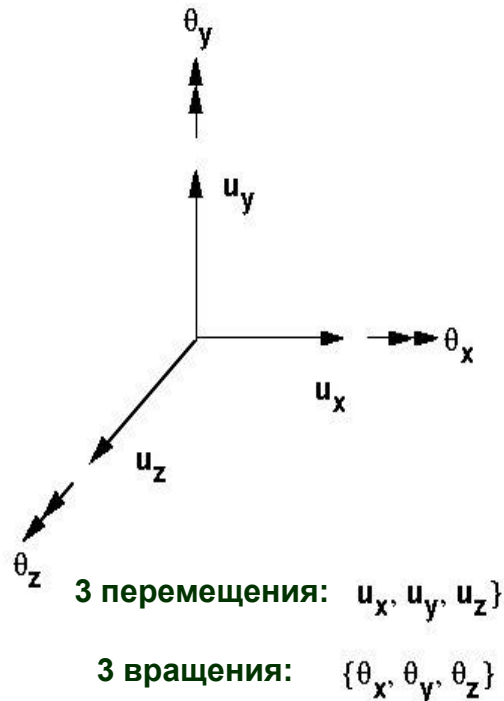
# Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами

(продолжение)

- Каждая узловая точка имеет шесть независимых степеней свободы (DOFs). Степени свободы определяются как независимые компоненты перемещений или поворотов узловой точки.
- Непрерывная конструкция теоретически имеет бесконечное количество степеней свободы
- Идея метода конечных элементов состоит в том, чтобы аппроксимировать поведение конструкции путем сведения бесконечного числа степеней свободы к конечному числу
- Рисунок 2-1 показывает, что перемещение узловой точки определяется с использованием 6-ти степеней свободы

# Моделирование непрерывной конструкции конечными элементами (продолжение)

- "Перемещение" (displacement) - основной термин означающий компонент перемещения или угла поворота.



$\{u\}$  = вектор перемещений =  $\{u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}$

Рисунок 2-1

# Один элемент: осевое нагружение

- Рассмотрим упругий стержень (ROD) сечением  $A$  и длиной  $L$  под действием только осевой нагрузки.

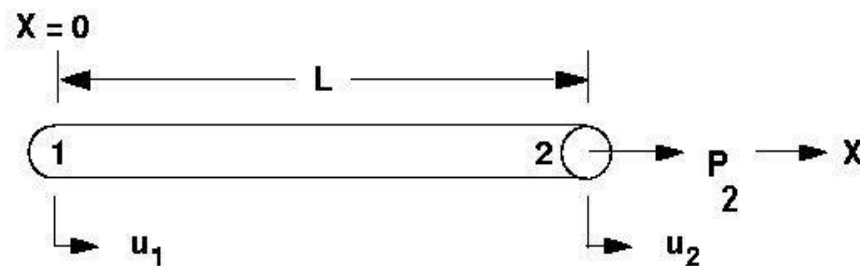


Рисунок 2-2

- Заметим, что в MSC Nastran элемент ROD может также воспринимать кручение, которое в данном примере не рассматривается.

# Один элемент: осевое нагружение

## (продолжение)

- Для этого ROD элемента, выражение (2-1) может быть представлено как:

$$\{P\} = [k]_e \{u\} \quad (2-2)$$

или

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

где  $[k]_e = [k_{ij}]$  - известная матрица жесткости ROD элемента, размером  $2 \times 2$   
 $\{P\}$  - вектор известной приложенной силы  
 $\{u\}$  - вектор неизвестных перемещений, определяемый из уравнения (2-2)

# Один элемент: осевое нагружение

(продолжение)

**A** - площадь сечения ROD элемента

**E** - модуль Юнга

**L** - длина ROD элемента

- **Неизвестные перемещения,  $\{u\}$ , в уравнении (2-2) (или (2-3)) могут быть найдены следующим образом:**

$$\{u\} = [k]_e^{-1} \{P\} \quad (2-4)$$

- **На самом деле, для большей эффективности, MSC Nastran использует декомпозицию и прямой-обратный ход (DCMP/FBS) для решения уравнения 2-2 (2-3) вместо обращения матрицы, как это показано в уравнении (2-4).**

# Один элемент: осевое нагружение

(продолжение)

- Для простоты объяснения в этом семинаре мы будем ссылаться на уравнение (2-4).
- Мы пока не можем решить данную задачу с ROD элементом, которая показана на рисунке 2-2, так как матрица  $[k]_e^{-1}$  сингулярна.
- Физический смысл сингулярности матрицы состоит в том, что если мы потянем ROD элемент за узел 2, весь элемент начнет перемещаться в осевом направлении, так как ничто не ограничивает его движение (нет закреплений).
- Математически, два уравнения линейно зависят друг от друга

# Один элемент: осевое нагружение

## (продолжение)

- Чтобы проиллюстрировать это, распишем уравнение (2-3) следующим образом:

$$P_1 = (AE/L)*u_1 - (AE/L)*u_2 \quad (2-5 \text{ a})$$

$$P_2 = - (AE/L)*u_1 + (AE/L)*u_2 \quad (2-5 \text{ b})$$

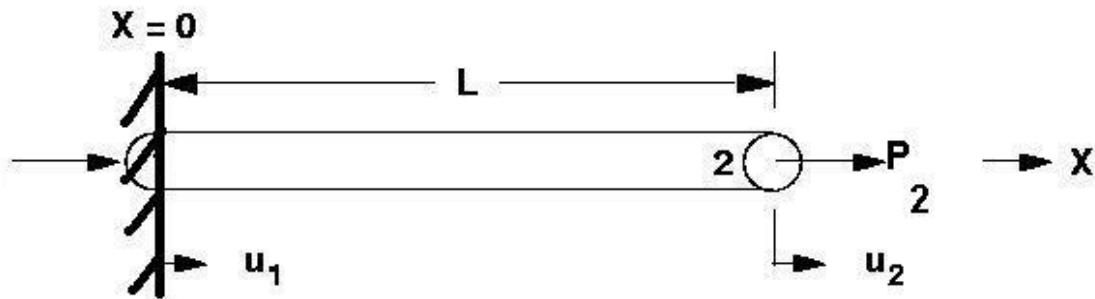
- Заметим, что уравнение (2-5 a) является линейной комбинацией уравнения (2-5 b). Поэтому эти два уравнения линейно зависят друг от друга.
- Чтобы стабилизировать модель нужно задать соответствующие граничные условия, и тем самым, при действии нагрузки, исключить ее движение как твердого тела.



# Один элемент: осевое нагружение

(продолжение)

- Вернемся к рисунку с ROD элементом и закрепим его левый узел:



- Это равносильно вычеркиванию первой строки и первого столбца из уравнения (2-3) перед выполнением инверсии

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2-6)$$

# Один элемент: осевое нагружение

(продолжение)

- После закрепления ROD элемента, уравнение (2-6) может быть решено

$$\{u\} = [k]_e^{-1} \{P\}$$

или

$$u_2 = \{L/(AE)\} * P_2$$

для  $A = 5.0$ ,  $L = 100.$ ,  $E = 29. E6$ ,  $P = 2.E5$

$$u_2 = \{(100)/(5 * 29E6)\} * 2E5 = 0.13791 \quad (\text{перемещение})$$

$$F_{e2} = \{(A * E)/L\} * u_2 = 2.E5 \quad (\text{сила в элементе})$$

$$\sigma = F_{e2}/A = 2.E5/5. = 4.E4 \quad (\text{напряжение в элементе})$$

- Заметим, что  $F_{e2} = P_2$ , так как в данном случае рассматривался только 1 элемент

# Общие требования к исходным данным

- **Какие требования существуют для выполнения конечноэлементного анализа?**
  - **Геометрия**
    - Расположение узловых точек (узла 1 и узла 2 в примере с ROD элементом)
    - Направление осей координат, в которых будут получены компоненты сил и перемещений
  - **Топология**
    - Типы элементов, которые будут использоваться
    - Порядок объединения узловых точек в элементы
  - **Свойства элементов**
    - Например, толщина для оболочечных элементов или площадь сечения для стержневого элемента. Для каждого типа элемента имеется специфический список свойств.

# Общие требования к исходным данным (продолжение)

- **Свойства материала**

- Какой тип материала использовать: алюминий, сталь, графит, эпоксидная смола и т.д.?
- Свойствами материала являются модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность, коэффициент температурного расширения и т.д. В MSC Nastran имеются различные типы материалов и каждый имеет специфический список свойств
- В данном примере использовалось только одно свойство элемента – модуль Юнга

- **Граничные условия (закрепления)**

- Закрепления используются для задания граничных условий, условий симметрии и различных других полезных связей. Закрепления необходимы, так как незакрепленная конструкция может перемещаться в пространстве и ее анализ невозможен.
- В данном примере ROD элемент был закреплен с левой стороны (за первый узел)

# Общие требования к исходным данным (продолжение)

- **Нагрузки**
  - Приложенные нагрузки
  - Принудительные перемещения
  - Температурные нагрузки
  - Нагрузки могут прикладываться к узловым точкам или к элементам.
  - В данном примере нагрузка  $P_2$  прикладывалась с правой стороны ROD элемента (в узле 2)
- **Что мы хотим получить в результате анализа?**
  - Деформации, силы действующие в элементе, напряжения, силы реакции, и т.д.

# Исходные данные для примера с ROD элементом

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran? (Те же, что и в общем случае)**
  - **Геометрия (запись GRID)**
  - Топология элементов
  - Свойства элементов
  - Свойства материалов
  - Граничные условия
  - Нагрузки
  - Что нужно получить в результате анализа?

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- Геометрия
  - Определяется записью GRID

| 1    | 2   | 3  | 4   | 5    | 6   | 7  | 8   | 9    | 10 |
|------|-----|----|-----|------|-----|----|-----|------|----|
| GRID | ID  | CP | X1  | X2   | X3  | CD | PS  | SEID |    |
| GRID | 101 | 0  | 5.0 | 10.0 | 2.0 | 1  | 123 |      |    |

## Поле

## Содержимое

|                   |   |
|-------------------|---|
| <b>ID</b>         | Идентификационный номер узла  |
| <b>CP</b>         | Идентификационный номер системы координат относительно которой задается положение узла в пространстве (целое число > 0, по умолчанию используется глобальная система координат)                           |
| <b>X1, X2, X3</b> | Координаты узла в координатной системе CP (веществен.)  |
| <b>CD</b>         | Идентификационный номер системы координат, относительно которой определяются перемещения, закрепления, вектора сил и напряжений (целое число > 0, по умолчанию используется глобальная система координат) |
| <b>PS</b>         | Постоянные закрепления, связанные с данным узлом (цифры от 1 до 6, без пробелов)  |
| <b>SEID</b>       | Номер суперэлемента   |

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran?**
  - Геометрия (GRID запись)
  - **Топология**
  - Свойства элементов
  - Свойства материалов
  - Граничные условия
  - Нагрузки
  - Что нужно получить в результате анализа?



# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Топология**

- В данном примере топология ROD элемента задается записью CROD

## CROD

Определяет ROD элемент

**Format:**

| 1    | 2   | 3   | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-----|----|----|---|---|---|---|----|
| CROD | EID | PID | G1 | G2 |   |   |   |   |    |

**Example:**

|      |    |    |    |    |  |  |  |  |  |
|------|----|----|----|----|--|--|--|--|--|
| CROD | 12 | 13 | 21 | 23 |  |  |  |  |  |
|------|----|----|----|----|--|--|--|--|--|

### Поле

EID

PID

G1, G2

### Содержимое

Идентификационный номер элемента (целое число > 0)

Идентификационный номер записи PROD (целое число > 0)

Номера двух узловых точек, входящих в элемент (целое число > 0)

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran?**
  - Геометрия (GRID запись)
  - Топология
  - **Свойства элементов**
  - Свойства материалов
  - Граничные условия
  - Нагрузки
  - Что нужно получить в результате анализа?

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Свойства элементов**

- В данном примере свойства ROD элемента определяются с помощью записи PROD

| 1    | 2   | 3   | 4    | 5 | 6 | 7   | 8 | 9 | 10 |
|------|-----|-----|------|---|---|-----|---|---|----|
| PROD | PID | MID | A    | J | C | NSM |   |   |    |
| PROD | 101 | 201 | 0.10 |   |   |     |   |   |    |

Поле

Содержимое

- PID** Идентификационный номер свойства (целое число > 0)
- MID** Идентификационный номер материала (целое число > 0)
- A** Площадь сечения ROD элемента
- J** Полярный момент инерции
- C** Коэффициент для определения напряжений кручения
- NSM** Неконструкционная масса на единицу длины (веществ.)

# Исходные данные для примера с ROD ЭЛЕМЕНТОМ (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran?**
  - Геометрия (GRID запись)
  - Топология
  - Свойства элементов
  - **Свойства материалов**
  - Граничные условия
  - Нагрузки
  - Что нужно получить в результате анализа?

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Свойства материала**

- Для данной задачи свойства материала описываются записью MAT1
- Мы можем задать **E**, **G**, и  $\nu$ .
- Из этих величин нужно задать только две, третья автоматически вычисляется из следующего выражения:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

**E** – Модуль упругости (Юнга) (при растяжении и изгибе)

**G** – Модуль сдвига (при кручении и сдвиге)

$\rho$  - Массовая плотность

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Свойства материала (продолжение)**
  - **A** – Коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha$
  - **T<sub>ref</sub>** – Начальная температура для расчета  $\Delta T$
  - **S<sub>T</sub>, S<sub>C</sub>, S<sub>S</sub>** – Максимальные (предельные) напряжения при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно.

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- Свойства материала (продолжение)

| 1    | 2   | 3     | 4 | 5    | 6   | 7      | 8    | 9 | 10  |
|------|-----|-------|---|------|-----|--------|------|---|-----|
| MAT1 | MID | E     | G | NU   | RHO | A      | TREF |   |     |
| MAT1 | 3   | 2.9+7 |   | 0.33 |     | 6.5E-6 | 50.0 |   | +M1 |

## Поле

## Содержимое

|      |  |
|------|--|
| MID  | Идентификационный номер материала (целое число > 0)        |
| E    | Модуль упругости (веществ.)                                |
| G    | Модуль сдвига (веществ.)                                   |
| NU   | Коэффициент Пуассона (-1.0 < веществ. ≤ 0.5)               |
| RHO  | Массовая плотность (веществ.)                              |
| A    | Коэффициент линейного температурного расширения (веществ.) |
| TREF | Исходная температура (веществ.)                            |

|     | ST     | SC | SS |  |  |  |  |  |  |
|-----|--------|----|----|--|--|--|--|--|--|
| +M1 | 36000. |    |    |  |  |  |  |  |  |

## ST,SC,SS

Максимальные (предельные) напряжения при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно. (необязательны: используются только для определения запаса прочности)

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran?**
  - Геометрия (GRID запись)
  - Топология
  - Свойства элементов
  - Свойства материалов
  - **Граничные условия**
  - Нагрузки
  - Что нужно получить в результате анализа?



# Исходные данные для примера с ROD ЭЛЕМЕНТОМ (продолжение)

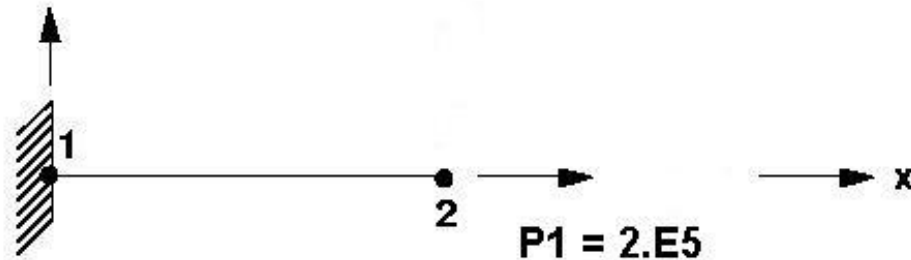
- В MSC Nastran граничные условия могут определяться с использованием записей SPC и SPC1, и/или в поле 8 записи GRID.
- Для данного примера мы определяем граничные условия в записи GRID (см. страницу 2-23)

# Исходные данные для примера с ROD ЭЛЕМЕНТОМ (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran?**
  - Геометрия (GRID запись)
  - Топология
  - Свойства элементов
  - Свойства материалов
  - Граничные условия
  - **Нагрузки**
  - Что нужно получить в результате анализа?

# Исходные данные для примера с ROD ЭЛЕМЕНТОМ (продолжение)

- В данном примере будем использовать запись FORCE



| 1     | 2   | 3 | 4   | 5    | 6   | 7  | 8  | 9 | 10 |
|-------|-----|---|-----|------|-----|----|----|---|----|
| FORCE | SID | G | CID | F    | N1  | N2 | N3 |   |    |
| FORCE | 10  | 2 |     | 2.E5 | 1.0 |    |    |   |    |

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

где

| <u>Поле</u>     | <u>Содержимое</u>  |
|-----------------|--|
| <b>SID</b>      | Номер варианта (set) нагрузки (целое число > 0)  |
| <b>G</b>        | Номер узла, к которому прикладывается нагрузка (целое число > 0)   |
| <b>CID</b>      | Идентификационный номер координатной системы относительно которой задаются компоненты силовой нагрузки (целое число > 0, по умолчанию используется глобальная система координат) |
| <b>F or M</b>   | Масштабный коэффициент (веществ.)  |
| <b>N1,N2,N3</b> | Компоненты вектора силы, определяемые в координатной системе CID (веществ., хотя бы одно значение не должно быть равно нулю)   |

$$\vec{f} = F\vec{N}$$

$$\vec{m} = M\vec{N}$$

$$\vec{N} = (N1, N2, N3)$$

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- Для данного примера,
  - Свойства элемента ( $A = 5.0$ )
  - Свойства материала ( $E = 29E+6$  psi,  $G = 11. E+6$  psi,  $\sigma_y = 36000$  psi)
  - Приложенная нагрузка ( $P = 2.E+5$  lbs)

# Исходные данные для примера с ROD ЭЛЕМЕНТОМ (продолжение)

- В результате входной файл выглядит таким образом:

```

begin bulk
$
$   GEOMETRY AND BOUNDARY CONDITION
$
GRID   1           0.   0.   0.   123456
GRID   2          100.  0.   0.   23456
$
$   ELEMENT CONNECTIVITY
$
CROD   100   1   1   2
$
$   ELEMENT PROPERTY
$
PROD   1   201   5.
$
$   MATERIAL PROPERTY
$
MAT1   201   2.9+7  11.+6
+M1    36000.
$
$   LOADING
$
FORCE  1   2           2.E5  1.   0.   0.
$
enddata

```

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- **Какие общие требования существуют для расчета в системе MSC Nastran?**
  - Геометрия (GRID запись)
  - Топология
  - Свойства элементов
  - Свойства материалов
  - Граничные условия
  - Нагрузки
  - **Что нужно получить в результате анализа?**

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- В данном примере в результате анализа мы хотим получить перемещения, силы действующие в элементе и напряжения
- Для этого необходимо сделать запрос в секции **Case Control** входного файла (позднее данная секция будет рассмотрена более детально)

**DISP = ALL**

**FORCE = ALL**

**STRESS = ALL**



# Исходные данные для примера с ROD ЭЛЕМЕНТОМ (продолжение)

- Отрывок выходного файла MSC Nastran:

```

DISPLACEMENT VECTOR
POINT ID.  TYPE      T1      T2      T3      R1      R2      R3
      1      G      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
      2      G      1.379310E-01  0.0      0.0      0.0      0.0      0.0
  
```

$$\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(2.E+5)(100.)}{(5.)(29.E+6)} = 1.37931E-01$$

**Ручной счет**

```

FORCES IN ROD ELEMENTS (CROD)
ELEMENT      AXIAL      TORQUE      ELEMENT      AXIAL      TORQUE
  ID.      FORCE
   100      2.000000E+05
  
```

# Исходные данные для примера с ROD элементом (продолжение)

- Отрывок выходного файла MSC Nastran

## STRESSES IN THE ROD ELEMENTS (CROD)

| ELEMENT ID. | AXIAL STRESS | SAFETY MARGIN | TORSIONAL STRESS | SAFETY MARGIN | ELEMENT ID. | AXIAL STRESS | SAFETY MARGIN | TORSIONAL STRESS | SAFETY MARGIN |
|-------------|--------------|---------------|------------------|---------------|-------------|--------------|---------------|------------------|---------------|
| 100         | 4.000000E+04 | -1.0E-01      |                  |               |             |              |               |                  |               |

Ручной счет

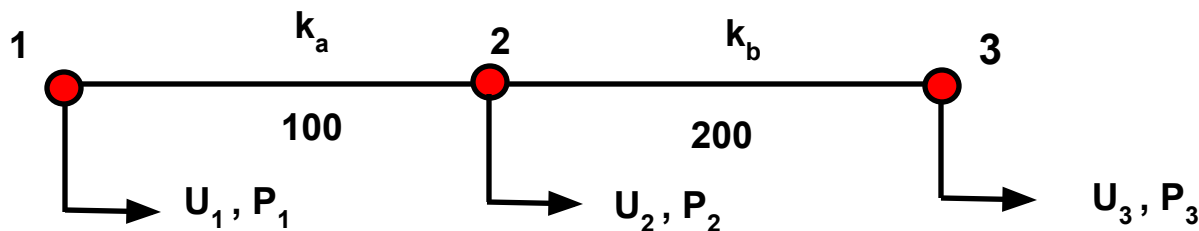
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2.E+5}{5} = 4.0E+4$$

$$M.S. = \frac{\text{Stress}_{\text{allow}}}{\text{Stress}_{\text{actual}}} - 1.0$$

$$M.S._{\text{axial}} = \frac{36000.}{40000.} - 1.0 = -0.1$$

# Глобальная матрица жесткости

- До этого рассматривалась матрица жесткости одного элемента. Теперь рассмотрим глобальную матрицу жесткости реальной конструкции
- Реальная конструкция может быть представлена как совокупность отдельных элементов
- Ансамбль матриц жесткости элементов, представляющих конструкцию, называется глобальной матрицей жесткости
- Для следующих двух ROD элементов с осевым нагружением:



# Глобальная матрица жесткости

(продолжение)

- Матрицы жесткости отдельных элементов с номерами 100 и 200 можно представить следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

- Отсюда глобальная матрица жесткости запишется как ансамбль матриц жесткости элементов:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & (k_a + k_b) & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

# Глобальная матрица жесткости

(продолжение)

- Глобальная матрица жесткости определяется суперпозицией матриц жесткости отдельных элементов
- Прямое определение матрицы жесткости элемента (т.е. вывод формул вручную) ограничено одно- и двумерными элементами с ограниченным числом степеней свободы
- Для элементов более высокого порядка (балки, пластины, объемные тела) более целесообразно использовать для формирования матрицы жесткости энергетические принципы и так называемые функции форм элементов

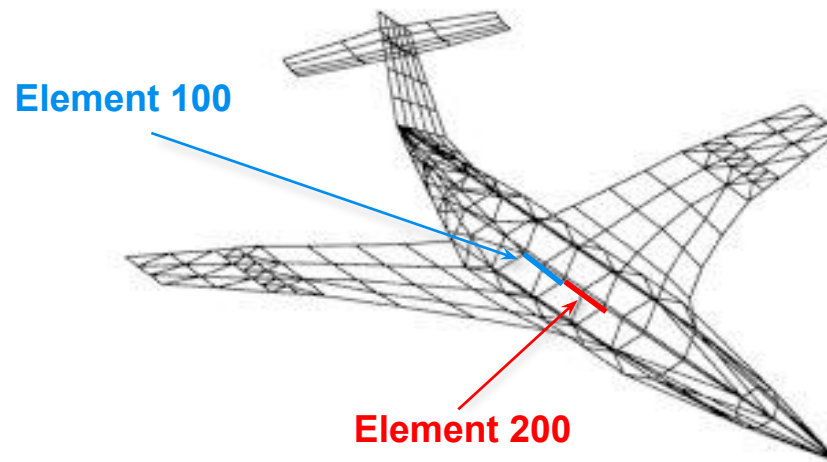
# Глобальная матрица жесткости

## (продолжение)

- Собрал глобальную матрицу жесткости так, как показано в уравнении (2-7), можно затем решить это уравнение с использованием той же процедуры, что и с одним элементом
- Эта процедура состоит в следующем:
  - Наложение достаточных граничных условий, путем удаления соответствующих строк и столбцов в уравнении (2-7)
  - При исключении движения конструкции как твердого тела, необходимо помнить, что конечноэлементные системы работают в 3-х мерном пространстве. Это значит, что создаваемый вариант граничных условий должен исключить любое перемещение модели как твердого тела в трех измерениях.
  - Решение  $\{ u \} = [ K ]^{-1} \{ P \}$
  - Заметим, что для решения MSC Nastran использует процедуру DCMP/FBS вместо обращения матрицы жесткости

# Процедура анализа сложной конструкции

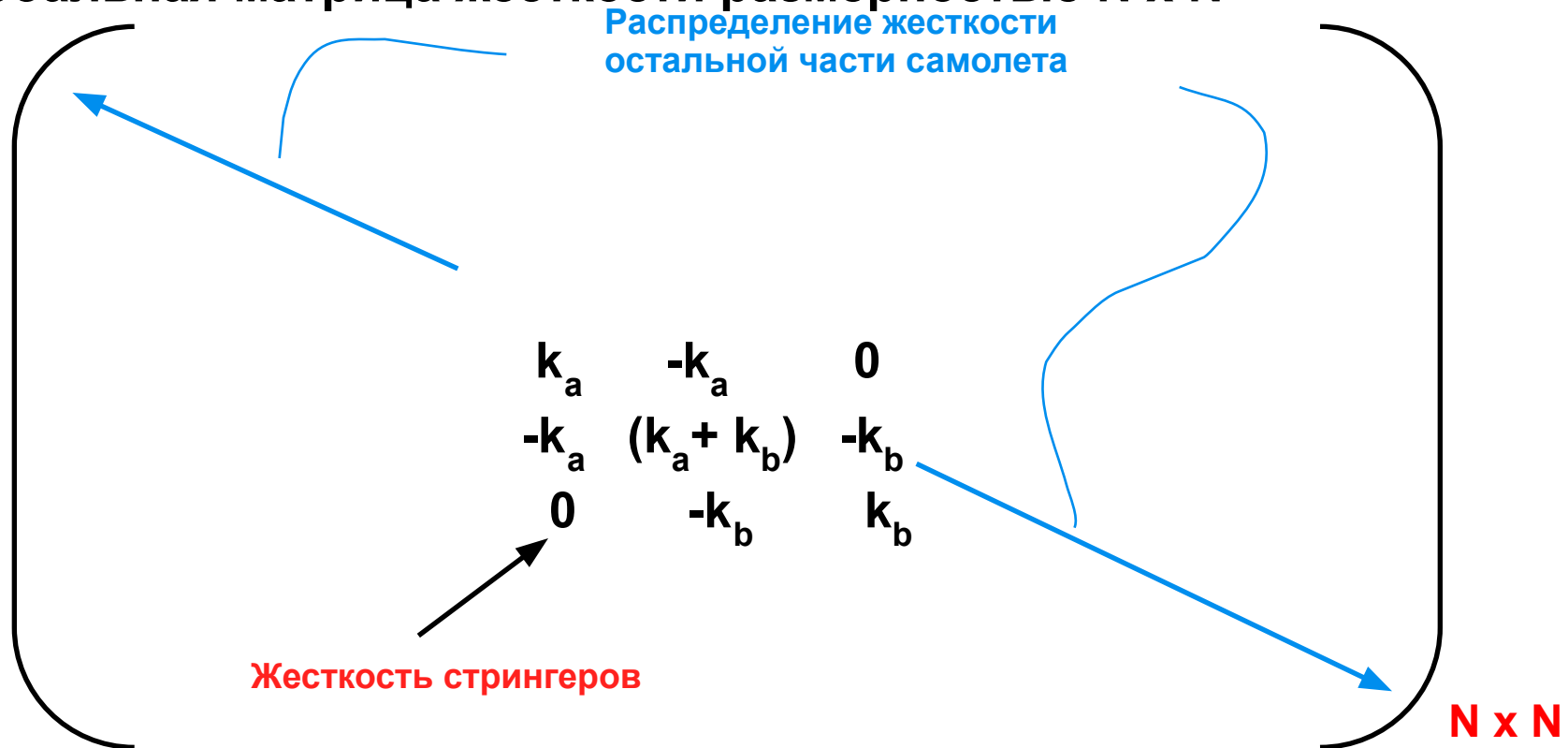
- Процедура, использованная для одного элемента и для двух элементов - может быть расширена для анализа сложной конструкции. Например, при анализе конструкции самолета:



- Два выделенных стрингера могут быть представлены, например, двумя матрицами жесткости ROD элементов, рассмотренных ранее

# Процедура анализа сложной конструкции (продолжение)

- Глобальная матрица жесткости размерностью  $N \times N$





# Процедура анализа сложной конструкции

## (продолжение)

- Жесткостные характеристики остальной части самолета находятся составлением ансамбля из отдельных жесткостей элементов, используя тот же самый принцип, рассмотренный для двухэлементной модели
- Общее поведение конструкции находится с учетом поведения каждого элемента, входящего в нее
- Пользователь несет ответственность за дискретизацию реальной конструкции на конечные элементы
- Графический препроцессор MSC Patran поможет Вам сгенерировать конечноэлементную сетку для самой сложной конструкции
- В общем случае, более качественная и мелкая сетка увеличивает время решения

# Процедура анализа сложной конструкции (продолжение)

- **Ресурсы компьютера (время работы центрального процессора), используемые MSC Nastran (при размерности модели в  $N$  степеней свободы).**
  - Задержки ( $\sim$  постоянные)
  - Формирование матрицы жесткости ( $\sim N$ );
  - Решение системы уравнений ( $\sim N^2$ , постоянно уменьшается с внедрением новых численных методов и применением новых компьютеров);
  - Получение требуемых результатов ( $\sim N$ ).
- **Заметим, что конечноэлементная сетка у рассмотренного самолета была очень грубая. Такая сетка была сделана только для более полного понимания процесса составления глобальной матрицы жесткости**

# Выходные данные MSC Nastran

- При запуске MSC Nastran Вы можете запросить любую рассчитываемую величину. Вот некоторые из них:
  - Компоненты перемещений узлов
  - Результаты для элементов
    - напряжения
    - деформации
    - энергия деформации
    - внутренние силы и моменты
  - Результаты для узлов
    - прикладываемые нагрузки
    - силы реакций
    - силы, возникающие в узлах

# Проверка модели

- Пользователь должен проверить точность результатов, полученных в результате анализа
- Некоторые виды проверки выполняются так:
  - Графическое отображение модели для визуальной проверки
  - Проверка ответной реакции модели на приложенную нагрузку
  - Проверка баланса входной нагрузки и сил реакции
  - Проведение ручной проверки результатов, когда это возможно
  - Смотри: *Proceedings of the 1986 MSC World Users' Conference, "MSC Nastran Model Checkout" by the Jet Propulsion Laboratory.*

# Некоторые советы по моделированию

- Прежде чем начать моделирование необходимо иметь инженерное представление о поведении конструкции
- Определите все точки приложения нагрузки и закреплений
- Разложите общую нагрузку на составляющие: изгибающую, крутящую, сдвиговую и осевую
- Более тщательно разбейте область, где ожидается большой градиент напряжений. Увеличение числа элементов, как правило, дает возможность повысить точность расчета
- Попробуйте использовать симметрию модели
- Обдумайте затраты компьютерных ресурсов - увеличение числа степеней свободы увеличивает загрузку компьютера, время моделирования и время, необходимое для представления результатов моделирования

# Некоторые советы по моделированию

## (продолжение)

- **Используйте небольшие простые тестовые модели для проверки незнакомых методов и технологий моделирования, прежде чем приступить к дорогостоящему реальному моделированию**
- **Вам все равно придется потратить время на создание небольшой модели**
- **В конце концов это позволит сэкономить время на отслеживание ошибок и создать более точную модель**
- **MSC Nastran ничего не знает о применяемой системе единиц. Физические величины в исходных данных должны задаваться в одной системе единиц**
- **Задание всех используемых величин в одной системе измерения остается полностью на совести пользователя**
- **Для получения выходных данных в нужной системе единиц входные данные должны быть заданы в ней же**

# Единицы измерения

- Пример

| <u>Исходные данные</u> | <u>Система единиц</u>                   |                        |                                      |
|------------------------|---|------------------------|--------------------------------------|
|                        | <u>Английская</u>                       | <u>Метрическая</u>     |                                      |
| Геометрия              | дюйм                                    | мм                     | } Должны быть в одной системе единиц |
| Модуль упругости       | Фунт/дюйм <sup>2</sup>                  | Н/мм <sup>2</sup>      |                                      |
| Прикладываемые моменты | дюйм*фунт                               | мм*Н                   |                                      |
| Прикладываемые силы    | фунт                                    | Н                      |                                      |
| Массовая плотность     | фунт*с <sup>2</sup> / дюйм <sup>4</sup> | тонн / мм <sup>3</sup> |                                      |

| <u>Результаты расчетов</u> | <u>Система единиц</u>  |                   |
|----------------------------|------------------------|-------------------|
| Перемещения                | дюймы                  | мм                |
| Напряжения                 | Фунт/дюйм <sup>2</sup> | Н/мм <sup>2</sup> |

# Единицы измерения (продолжение)

| Система единиц | Масса  | Длина | Время | Сила   | g                         |
|----------------|--|-------|-------|--------|---------------------------|
| Английская     | $\frac{\text{Фунт } \text{с}^2}{\text{фут}}$ | фут   | с     | фунт   | 32.174 фут/с <sup>2</sup> |
| Техническая    | $\frac{\text{кГс } \text{с}^2}{\text{см}}$   | см    | с     | кГс    | 981 см/с <sup>2</sup>     |
| СИ             | кг   | метр  | с     | Ньютон | 9.81 м/с <sup>2</sup>     |

$$F = Ma: \quad \text{масса (M)} = \text{вес} / g$$

**Примечание:** Для динамического анализа требуется массовая плотность (не весовая).

**Пример:** массовая плотность стали = весовая плотность / g =

$$\frac{0.283 \text{ фунт} / \text{дюйм}^3}{32.174 \frac{\text{фунт}}{\text{с}^2} \left( \frac{12 \text{ дюйм}}{1 \text{ фут}} \right)} = 7.324 \text{E} - 4 \frac{\text{фунт } \text{с}^2}{\text{дюйм}^4}$$



# Обзор процедуры решения методом конечных элементов

## БЛОК-СХЕМА СТАТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА



# Литература по матричному анализу

H. C. Martin

*Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*

McGraw-Hill Book Company

1966

J. S. Przemieniecki

*Theory of Matrix Structural Analysis*

McGraw-Hill Book Company and Dover Publications

1968

M. F. Rubinstein

*Matrix Computer Analysis of Structures*

Prentice-Hall, Inc.

1966

M. D. Vanderbilt

*Matrix Structural Analysis*

Quantum Publishers, Inc.

1974

# Литература по МКЭ

K. J. Bathe (theoretical)

*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*

Prentice-Hall, Inc.

1982

R. D. Cook (theoretical, applications)

*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd Edition

John Wiley and Sons, Inc.

1981

R. H. Gallagher (applications)

*Finite Element Analysis Fundamentals*

Prentice-Hall, Inc.

1975

O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor (theoretical)

*The Finite Element Method*, 4rd Edition

McGraw-Hill Book Company

1989

R. H. MacNeal (theoretical applications)

*Finite Elements: Their Design and Performance*

Marcel Dekker, Inc.

1994

A. O. Cifuentes (MSC/NASTRAN applications)

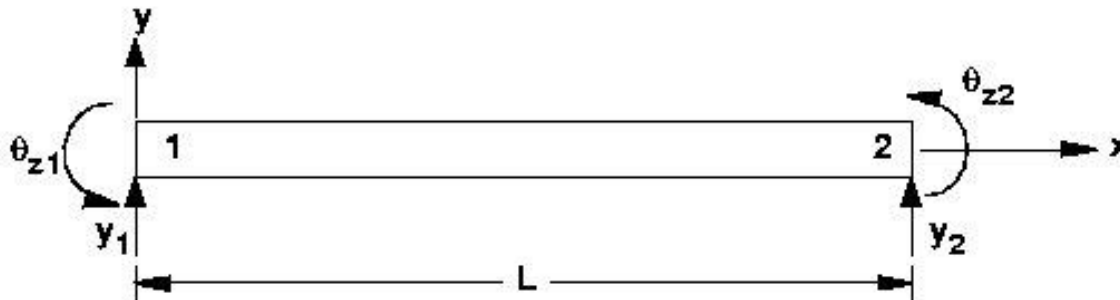
*Using MSC/NASTRAN: Statics and Dynamics*

Springer-Verlag

1989

# Матрица жесткости балочного (BAR) элемента

- Рассмотрим матрицу жесткости BAR элемента.
- В качестве иллюстрации рассмотрим нагружение перерезывающей силой и моментом только в одной плоскости (x-y, 2-D).



Четыре степени свободы

{ 2 вращения вокруг  $z$  ( $\theta_{z1}, \theta_{z2}$ )  
 2 перемещения в  $(y_1, y_2)$

На каждом конце элемента прикладываются нагрузки в виде сил  $P_y$  и моментов  $M_z$

# Матрица жесткости балочного (BAR) элемента

## элемента (продолжение)

- Матрица жесткости для BAR элемента для двумерной модели, включающей только сдвиг и момент в плоскости x-y:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} P_{y1} \\ M_{z1} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}}_{\{P\}} = \frac{2EI}{L^3} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_{z1} \\ y_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}}_{\{u\}}$$

- Подобный подход может быть использован для трехмерного BAR элемента, для которого размер матрицы будет 12x12.

# Элемент СВАР

- Соединяет две узловые точки.
- Формулировки получены из классической балочной теории (плоские сечения остаются плоскими после деформации).
- По умолчанию используется теория Бернулли-Эйлера (дополнительно можно учесть поперечный сдвиг).
- Компоненты сил
  - Осевая сила,  $P$
  - Кручение,  $T$
  - Изгибающие моменты в двух перпендикулярных плоскостях,  $M_i$
  - Сдвиг в двух перпендикулярных плоскостях,  $V_i$

# Элемент СВАР (продолжение)

- Компоненты перемещения
  - $u_i$
  - $\theta_i$
- Нейтральная ось может иметь отступ относительно узловых точек (создается внутренняя жесткая связь)
- Возможность задания шарниров используется для представления звеньев и т.п.
- Можно не задавать один из параметров ( $A, I_1, I_2, J$ )
- Принципиальные ограничения
  - Постоянная призматическая форма (т.е. свойства не зависят от длины)

# Элемент CВАR (продолжение)

- **Принципиальные ограничения (продолжение)**
  - Центр сдвига и нейтральная ось должны совпадать (поэтому не рекомендуется для моделирования швеллеров)
  - Эффект повышения жесткости при кручении за счет коробления поперечных сечений не учитывается
  - Нет крутильного массового момента инерции
- **Если вышеуказанные ограничения важны, используйте для моделирования BEAM элемент, который этих ограничений не имеет.**
- **Смотрите:**  
*MSC Nastran Linear Static Analysis User's Guide* или *MSC Nastran Reference Manual* для более детального описания **BAR** элемента.



# Описание CBAR элемента

- Топология CBAR элемента

**Format:**

| 1    | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9    | 10 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|----|
| CBAR | EID | PID | GA  | GB  | X1  | X2  | X3  | OFFT |    |
|      | PA  | PB  | W1A | W2A | W3A | W1B | W2B | W3B  |    |

**Example:**

|      |   |     |   |   |     |     |     |     |  |
|------|---|-----|---|---|-----|-----|-----|-----|--|
| CBAR | 2 | 39  | 7 | 3 | 0.6 | 18. | 26. | EEG |  |
|      |   | 513 |   |   |     |     |     |     |  |

Поле

Содержимое

EID

Идентификационный номер элемента

PID

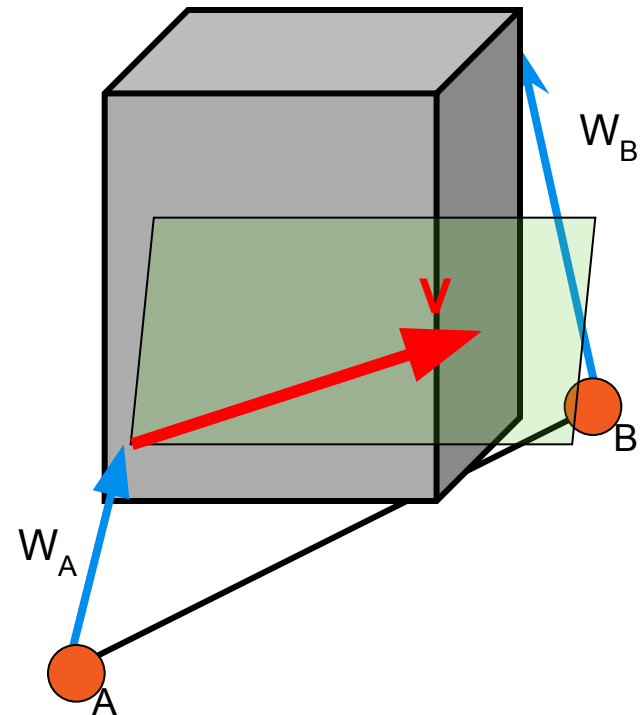
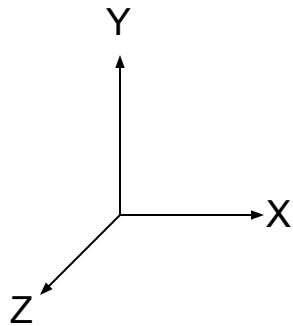
Идентификационный номер карты свойств  
элемента PBAR

# Описание CBAR элемента

|  |  |
|--|--|
| <b>GA, GB</b>                          | Идентификационные номера соединяемых узлов   |
| <b>X1, X2, X3</b>                      | Компоненты вектора $V$ на конце $A$ , задаваемые в системе координат перемещений для узла $GA$ .<br>Используются для ориентации системы координат элемента |
| <b>G0</b>                              | Идентификационный номер узла для альтернативного определения $X1, X2, X3$ .  |
| <b>PA, PB</b>                          | Флаги шарниров для узлов $A$ и $B$ . Используются для моделирования звеньев и/или рычагов  |
| <b>W1A, W2A, W3A<br/>W1B, W2B, W3B</b> | Компоненты векторов отступов нейтральной оси $wa$ и $wb$ в системе координат перемещений для узлов $GA$ и $GB$ .   |

# Описание СВАР элемента

- Вектор ориентации “ $V$ ” задается через координатные системы
  - Глобальную (перемещения)
  - Базовую
- Векторы смещений “ $W_A$ ” и “ $W_B$ ” задается через координатные системы
  - Глобальную (перемещения)
  - Элемента



# Описание СВАР элемента

- **Вектор ориентации**

- По умолчанию используется глобальная (перемещения) система координат (поле CD)
- Можно использовать базовую систему координат (символ “B” в поле OFFT)

- **Векторы смещений**

- По умолчанию используется глобальная (перемещения) система координат (поле CD)
- Можно использовать координатную систему элемента (символ “E” в поле OFFT)

- **Эти возможности поддерживаются в MSC Patran начиная с версии 2004**

# Описание СВАР элемента

|      |     |     |     |     |     |     |     |            |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------------|
| СВАР | EID | PID | GA  | GB  | X1  | X2  | X3  | <b>OFF</b> |
| +    | PA  | PB  | W1A | W2A | W3A | W1B | W2B | W3B        |

| String | Orientation Vector | End A Offset | End B Offset |
|--------|--------------------|--------------|--------------|
| GGG    | Global             | Global       | Global       |
| BGG    | Basic              | Global       | Global       |
| GGE    | Global             | Global       | Element      |
| BGE    | Basic              | Global       | Element      |
| GEG    | Global             | Element      | Global       |
| BEG    | Basic              | Element      | Global       |
| GEE    | Global             | Element      | Element      |
| BEE    | Basic              | Element      | Element      |

По  
умолчанию

# Описание СВАР элемента (с версии 2005)

|      |     |     |     |     |     |     |     |            |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------------|
| СВАР | EID | PID | GA  | GB  | X1  | X2  | X3  | <b>OFF</b> |
| +    | PA  | PB  | W1A | W2A | W3A | W1B | W2B | W3B        |

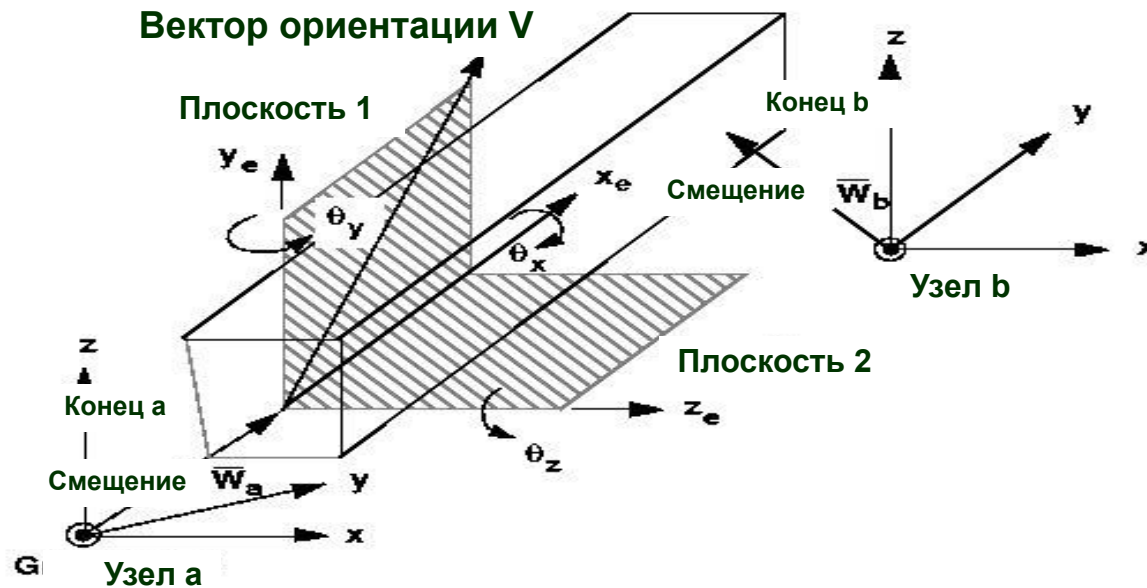
| String     | Orientation Vector | End A Offset  | End B Offset  |
|------------|--------------------|---------------|---------------|
| <b>GGG</b> | <b>Global</b>      | <b>Global</b> | <b>Global</b> |
| <b>GGO</b> | <b>Global</b>      | <b>Global</b> | <b>Offset</b> |
| <b>GOG</b> | <b>Global</b>      | <b>Offset</b> | <b>Global</b> |
| <b>GOO</b> | <b>Global</b>      | <b>Offset</b> | <b>Offset</b> |
| <b>BGG</b> | <b>Basic</b>       | <b>Global</b> | <b>Global</b> |
| <b>BGO</b> | <b>Basic</b>       | <b>Global</b> | <b>Offset</b> |
| <b>BOG</b> | <b>Basic</b>       | <b>Offset</b> | <b>Global</b> |
| <b>BOO</b> | <b>Basic</b>       | <b>Offset</b> | <b>Offset</b> |

По умолчанию

# Описание СВАР элемента (продолжение)

- Система координат СВАР элемента

- Определяется пользователем путем задания вектора  $V$
- Ориентирует свойства сечения
- Ориентирует выходные силы и напряжения



# Описание CBAR элемента (продолжение)

**Ось X элемента:** Всегда совпадает с линией соединяющей A и B.  
Положительное направление от A к B.

**Плоскость X-Y элемента:** Определяется вектором  $\bar{V}$ , который лежит в плоскости  $X_e - Y_e$ . Плоскость 1 всегда совпадает с плоскостью  $X_e - Y_e$

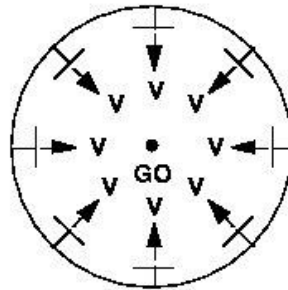
**Ось Z элемента:** Результат векторного произведения  $X_e * \bar{V}$ .  
Плоскость 2 всегда совпадает с плоскостью  $X_e - Z_e$

**Примечание:** Плоскости 1 и 2 не обязательно являются главными плоскостями. На совпадение этих плоскостей с главными плоскостями указывает нулевая величина момента инерции ( $I_{12}$ ) в карте PBAR.



# Описание СВАР элемента (продолжение)

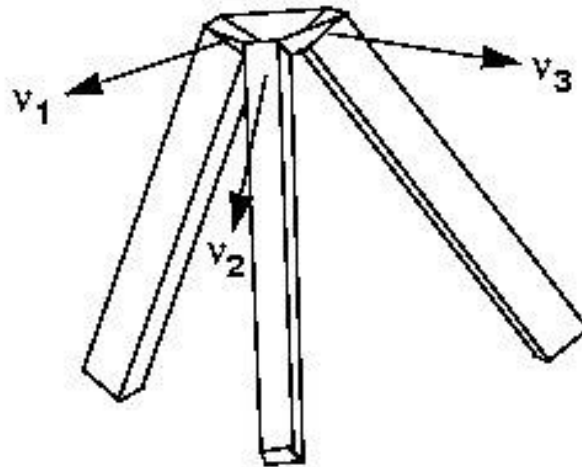
- Далее следуют два примера в которых, задается вектор ориентации системы координат элемента СВАР каждым из двух возможных способов (G0 или X1, X2, X3).



- Если задавать стрингеры фюзеляжа элементами СВАР, при этом используя способ G0 для определения вектора ориентации, то это значительно облегчит ввод данных
  - **Примечание:** Если в данном случае третий узел G0 вводится только с целью задания вектора ориентации системы координат элемента, то все степени свободы в G0 не связаны с исследуемой конструкцией и должны быть закреплены. В противном случае матрица жесткости системы будет сингулярной.

# Описание СВАР элемента (продолжение)

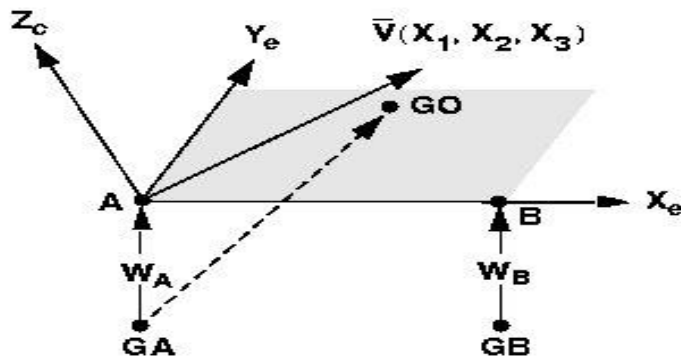
- Для определения ориентации ножек треножника, моделируемого элементами СВАР, как показано, будет более эффективно использовать координаты точки ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ) для задания вектора ориентации  $V$ , так как ориентация каждой ножки уникальна.



# Описание СВАР элемента (продолжение)

- **Смещения:**

- Концы элемента СВАР могут быть смещены относительно узлов (GA, GB) посредством задания векторов смещения  $W_A$  и  $W_B$  в записи СВАР.
- Вектор смещения можно интерпретировать как жесткую связь между узлами и концами элемента.
- Система координат элемента определяется с учетом смещения концов BAR элемента.



**Начало вектора  $V$  находится в смещенной точке A, если он определяется компонентами  $(X_1, X_2, X_3)$ .**

**Начало вектора  $V$  находится в точке GA если он описан с использованием GO.**

# Описание CBAR элемента (продолжение)

- **Флаги шарниров:**

- Пользователь указывает степени свободы на каждом из концов BAR элемента которые не передают соответствующие силы или моменты.
- Флаги шарниров  $P_A$  и  $P_B$  задаются в системе координат элемента и записываются в полях 2 и 3 в продолжении карты CBAR.
- Примечание: Флаги шарниров – это силовые ограничения.  
SPC – это ограничение перемещений.

# Описание оператора PVAR

- Свойства CVAR элемента записываются операторами PVAR или PVARL:

| 1    | 2   | 3     | 4    | 5     | 6     | 7      | 8    | 9     | 10  |
|------|-----|-------|------|-------|-------|--------|------|-------|-----|
| PVAR | PID | MID   | A    | I1    | I2    | J      | NSM  |       |     |
| PVAR | 102 | 202   | 0.30 | .0090 | .0063 | 0.0124 |      |       | +P1 |
| \$   | C1  | C2    | D1   | D2    | E1    | E2     | F1   | F2    |     |
| +P1  | 0.3 | -0.25 | 0.3  | 0.25  | -0.3  | 0.25   | -0.3 | -0.25 | +P2 |
| \$   | K1  | K2    | I12  |       |       |        |      |       |     |
| +P2  |     |       |      |       |       |        |      |       |     |

## Поле

## Содержимое

PID            Идентификационный номер карты свойства

MID            Идентификационный номер карты материала

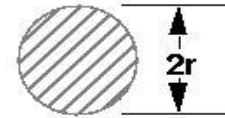
# Описание оператора PVAR (продолжение)

| <u>Поле</u> | <u>Содержимое</u>  |
|-------------|--|
| A           | Площадь сечения элемента   |
| I1,I2,I12   | Моменты инерции сечения ( $I_1 = I_{zz}$ , $I_2 = I_{yy}$ , $I_1 I_2 > I_{12}^2$ ).<br>Определяются с учетом системы координат элемента.                           |
| J           | Полярный момент инерции  |
| CI,DI,EI,FI | Коэффициенты для расчета напряжений. Должны быть определены, если будут выводиться изгибные напряжения.  |
| K1,K2       | Факторы сдвига в плоскостях 1 и 2 (по умолчанию - бесконечность, т.е. балка имеет бесконечную жесткость на сдвиг). Если $I_{12} \neq 0$ , то K1 и K2 игнорируются. |

# Расчет моментов инерции J для некоторых сечений

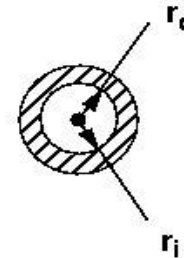
## КРУГ

$$J = \frac{1}{2}\pi r^4$$



## КОЛЬЦЕВОЕ СЕЧЕНИЕ

$$J = \frac{1}{2}\pi(r_o^4 - r_i^4)$$



## КВАДРАТ

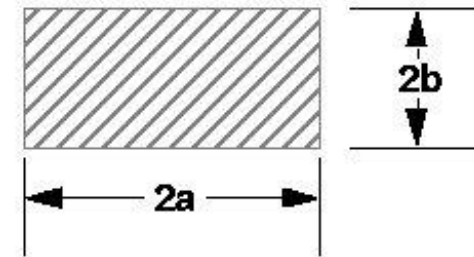
$$J = 2.25 a^4$$



# Расчет моментов инерции J для некоторых сечений (продолжение)

## ПРЯМОУГОЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ

$$J = ab^3 \left[ \frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$



Формулы для других не круговых сечений можно найти в книге *R.J. Roark and W. C. Young, Formulas for Stress and Strain, 5th ed., Table 20* страницы 290-296.



# Поперечный сдвиг

- Сдвиговые перемещения балки -  $V$ , рассчитываются по формуле

$$V = (F_z * L) / (K * A * G)$$

где:

$F_z$  - силы сдвига в направлении  $Z$  элемента

$L$  - длина балки

$K$  - коэффициент сдвига

$A$  - площадь сечения

$G$  - модуль сдвига балки

и величина  $1/K * A * G$  называется сдвиговой податливостью балки

# Поперечный сдвиг (продолжение)

- **K** определяет распределение сдвига по сечению элемента и ее величина зависит от формы сечения.
- **В** записи PVAR:
  - **K1** сопротивление сдвигу в направлении оси **Y** элемента.
  - **K2** сопротивление сдвигу в направлении оси **Z** элемента.

# Поперечный сдвиг (продолжение)

- Значения К для некоторых сечений

| Форма поперечного сечения | Значение К      |
|---------------------------|-----------------|
| Прямоугольник             | 5/6             |
| Круг                      | 9/10            |
| Тонкостенная труба        | 1/2             |
| Широкие балки             |                 |
| малая ось                 | $\sim A_f / 2A$ |
| большая ось               | $\sim A_w / A$  |

- Литература:

*Roark and Young, Formulas for Stress and Strain, 5th ed., стр. 185.*

# Описание СВАР элемента (продолжение)

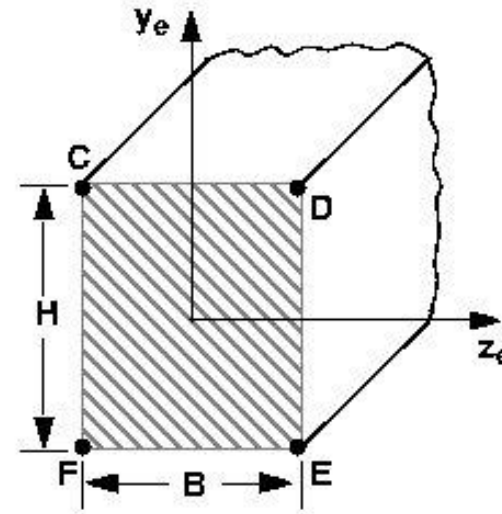
- Ориентация системы координат элемента определяет плоскости сечения 1 и 2, ориентацию моментов инерции, выводимые при расчете напряжения. Для этой системы координат элемента:

Моменты инерции в плоскости 1:

$$I_1 = I_{zz} = \frac{BH^3}{12}$$

Моменты инерции в плоскости 2:

$$I_2 = I_{yy} = \frac{HB^3}{12}$$



$$\begin{aligned} C &= .5H, -.5B \\ D &= .5H, .5B \\ E &= -.5H, .5B \\ F &= -.5H, -.5B \end{aligned}$$

# Описание СВАР элемента (продолжение)

- Для такой системы координат элемента:

$$I_1 = I_{zz} = \frac{HB^3}{12}$$

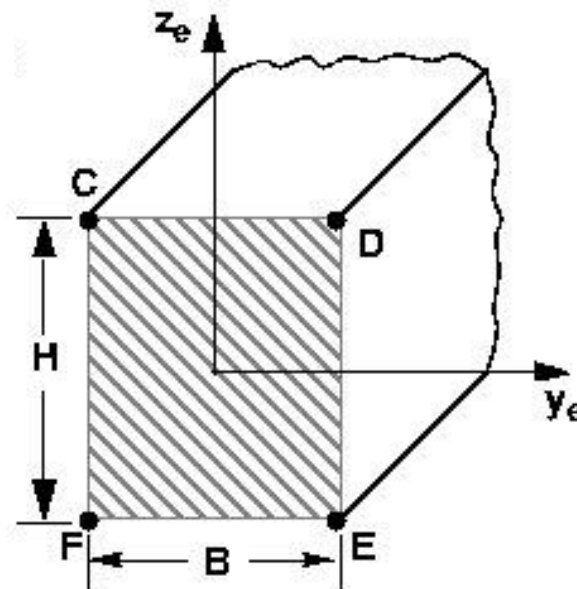
$$I_2 = I_{yy} = \frac{BH^3}{12}$$

$$C = -.5B, .5H$$

$$D = .5B, .5H$$

$$E = .5B, -.5H$$

$$F = -.5B, -.5H$$



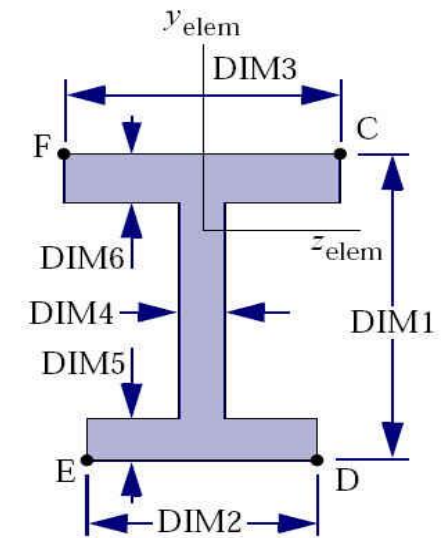
# Описание оператора PBARL

- Формат записи PBARL:

| 1     | 2    | 3     | 4     | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10 |
|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|----|
| PBARL | PID  | MID   | GROUP | TYPE |      |      |      |      |    |
|       | DIM1 | DIM2  | DIM3  | DIM4 | DIM5 | DIM6 | DIM7 | DIM8 |    |
|       | DIM9 | -etc- | NSM   |      |      |      |      |      |    |

Пример:

|       |     |    |    |    |    |    |  |  |  |
|-------|-----|----|----|----|----|----|--|--|--|
| PBARL | 39  | 8  |    | I  |    |    |  |  |  |
|       | 14. | 6. | .5 | .5 | .5 | .5 |  |  |  |



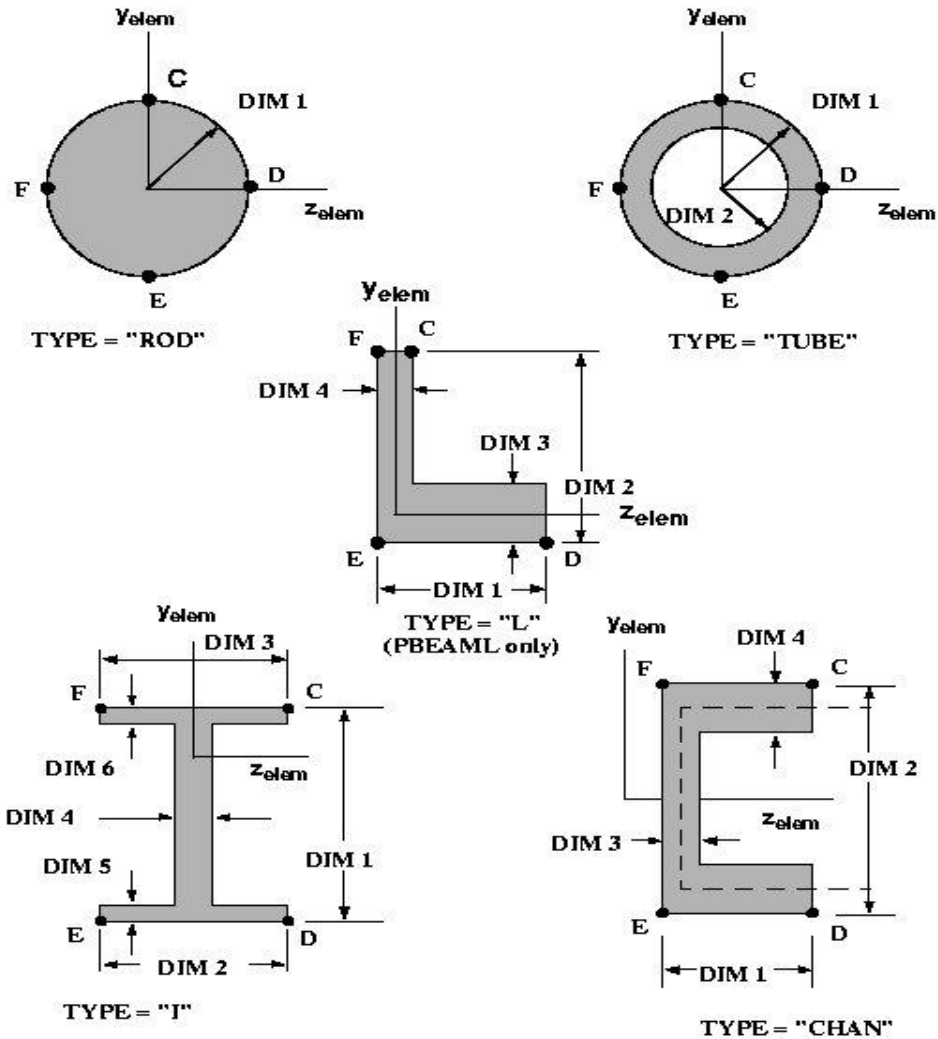
*TYPE="I"*

# Описание оператора PVARL (продолжение)

где:

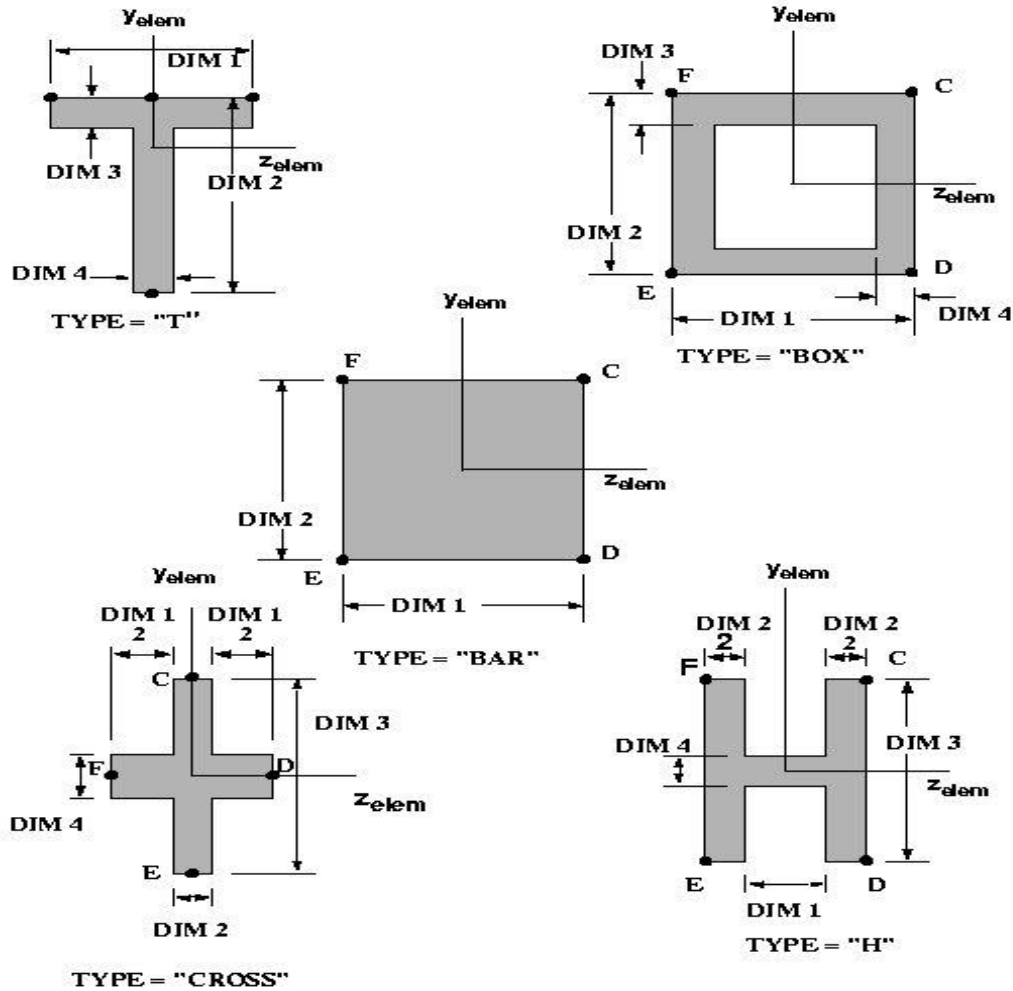
| <u>Поле</u> | <u>Содержимое</u>   |
|-------------|---|
| PID         | Идентификационный номер карты свойства  |
| MID         | Идентификационный номер материала   |
| GROUP       | Группа поперечного сечения Default="MSCBMLO")   |
| TYPE        | Строковая: 'ROD', 'TUBE', 'I', 'CHAN', 'T', 'BOX', 'BAR', 'CROSS', 'H', 'T1', 'I1', 'CHAN1', 'Z', 'CHAN2', 'T2', 'BOX1', 'HEXA', 'HAT' for GROUP="MSCBMLO") |
| DIMI        | Размеры поперечного сечения   |
| NSM         | Неконструкционная масса на единицу длины, NSM определяется после последнего DIMI  |

# Описание оператора PVARL (продолжение)

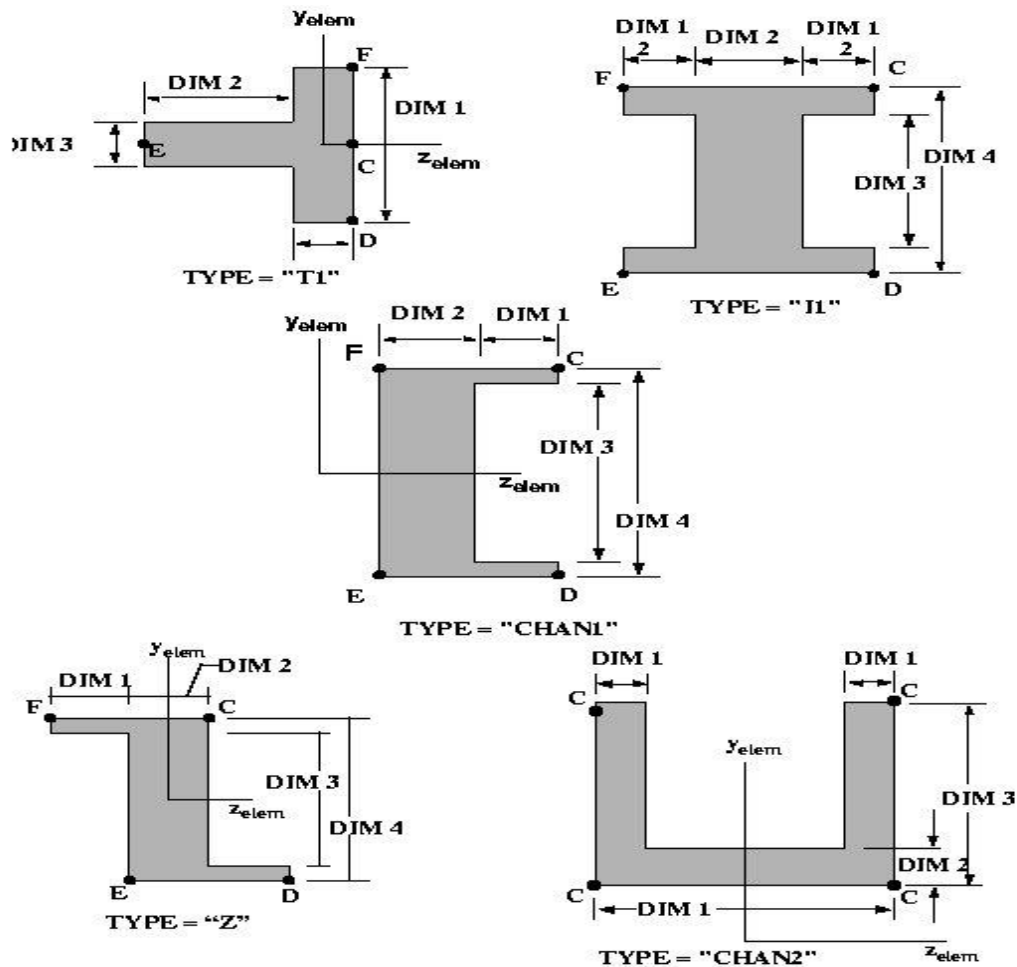




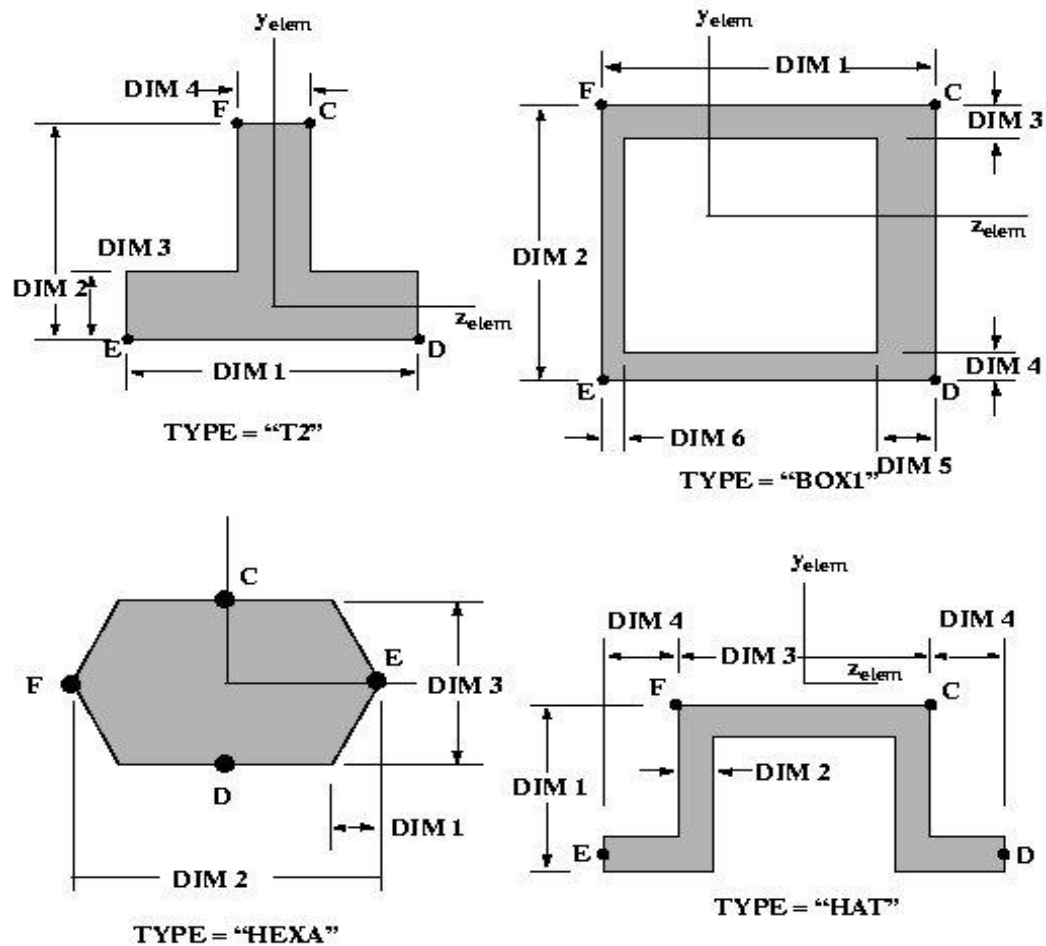
# Описание оператора PVARL (продолжение)



# Описание оператора PVARL (продолжение)

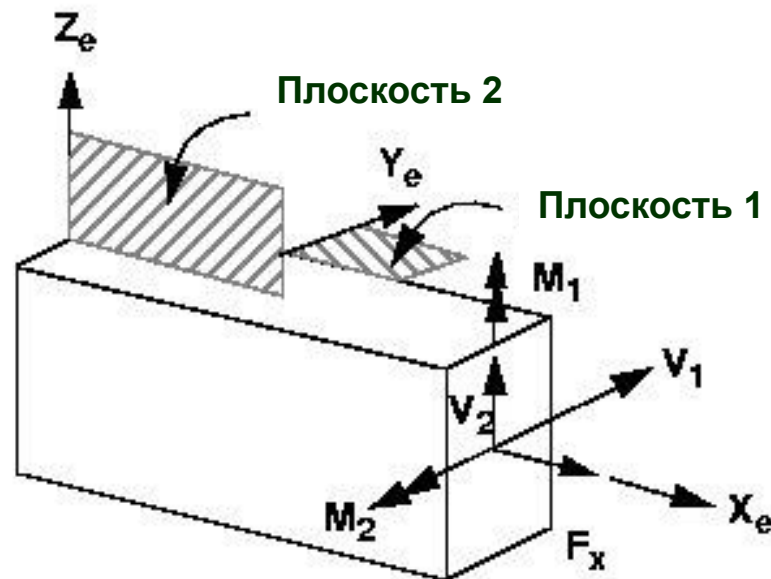


# Описание оператора PVARL (продолжение)



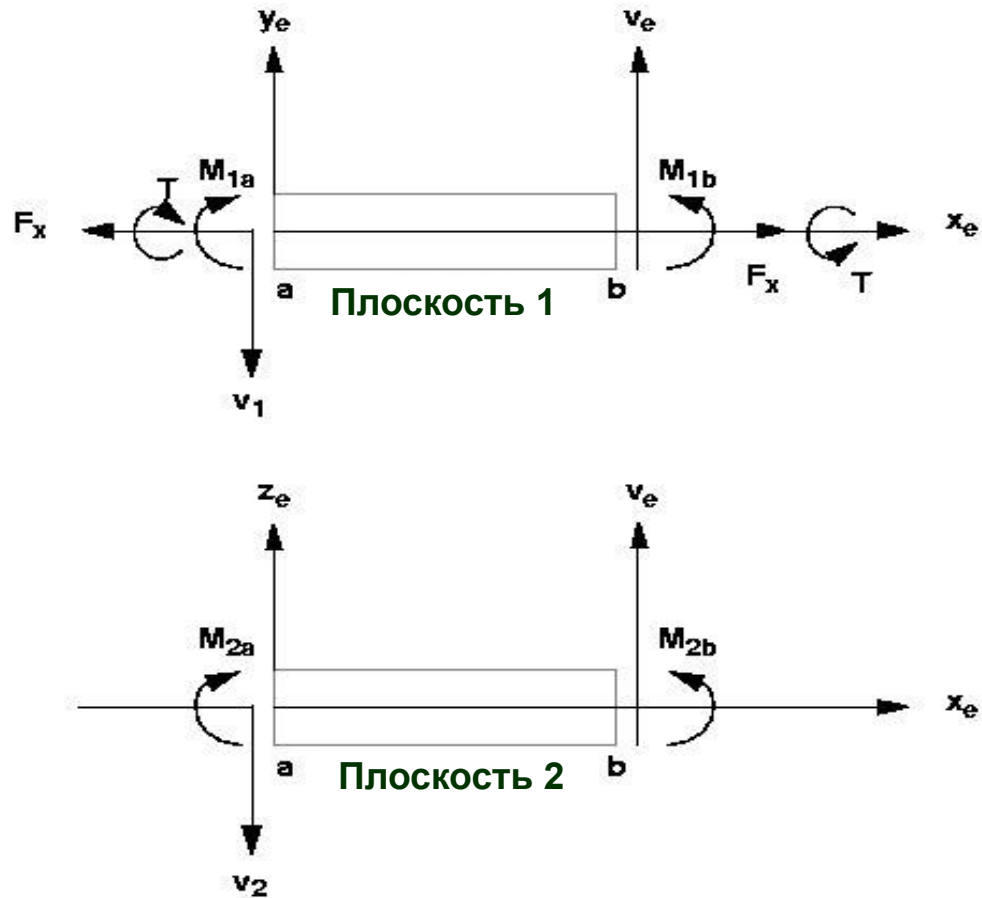
# Силы в балочном элементе

- Внутренние силы и моменты элемента BAR:



# Силы в балочном элементе (продолжение)

- Это можно также представить как:



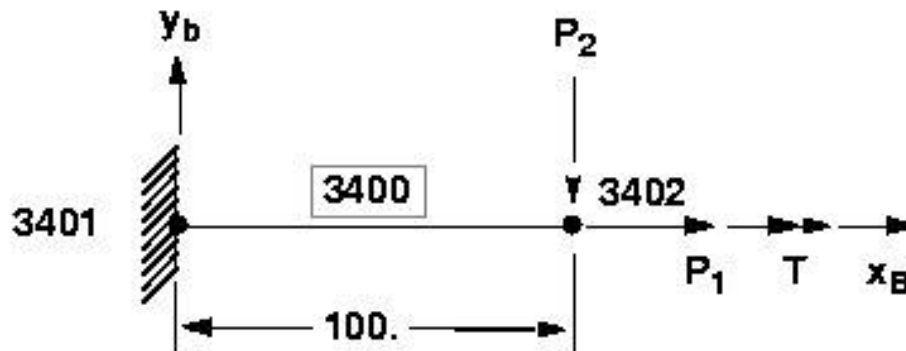
# Пример применения СВАР элемента

## Приложенная нагрузка

$$P_1 = 2.4E + 4 \text{ lb}$$

$$P_2 = 5000. \text{ lb}$$

$$T = 4.0E + 4 \text{ ln-lb}$$



# Пример применения СВАР элемента (продолжение)

- Свойства

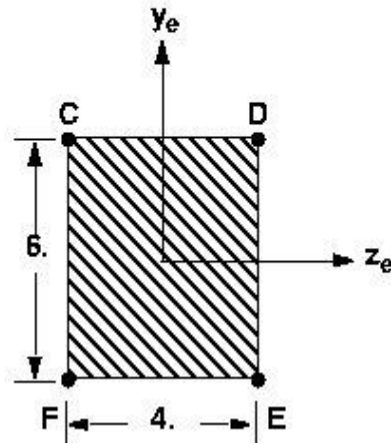
## Свойства элемента

$$A = 24. \text{ in}^2$$

$$I_1 = I_{zz} = 72. \text{ in}^4$$

$$I_2 = I_{yy} = 32. \text{ in}^4$$

$$J = 75.12 \text{ in}^4$$



## Свойства материала

$$E = 30.E + 6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 36000 \text{ psi}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 11.54E + 6 \text{ psi}$$

# Входной файл MSC Nastran для данного примера

```

1
SOL 101
CEND
TITLE = BAR EXAMPLE
$
LOAD = 100
DISP = ALL
FORCE = ALL
STRESS = ALL
$
BEGIN BULK
$
CBAR      3400      1      3401      3402      0.      1.      0.
GRID     3401      0.      0.      0.      0.      123456
GRID     3402      100.    0.      0.
MAT1     10      30.+6      .3
+M1      36000.
FORCE    100      3402      2.4E4      1.      0.      0.
FORCE    100      3402      5000.    0.      -1.    0.
MOMENT   100      3402      1.      4.+4    0.      0.
$
PBAR     1      10      24.      72.      32.      75.12
+PB1     3.      -2.      3.      2.      -3.      2.      -3.      -2.
$
OR
$PBARL   1      10      BAR
$+PB1    4.      6.
$
ENDDATA *

```



# Вывод перемещений для данного примера

## DISPLACEMENT VECTOR

| POINT ID. | TYPE | T1           | T2            | T3  | R1           | R2  | R3            |
|-----------|------|--------------|---------------|-----|--------------|-----|---------------|
| 3401      | G    | 0.0          | 0.0           | 0.0 | 0.0          | 0.0 | 0.0           |
| 3402      | G    | 3.333333E-03 | -7.716050E-01 | 0.0 | 4.614223E-03 | 0.0 | -1.157407E-02 |

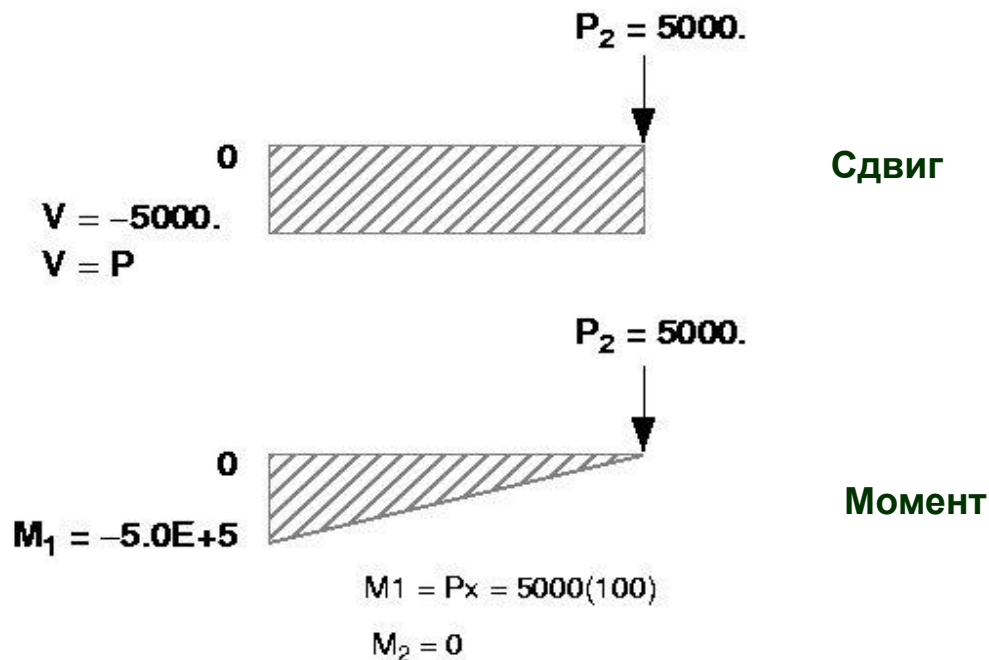
$$\Delta_1 = \frac{P_1 L}{AE} = \frac{(2.4E+4)(100.)}{(.24)(30.E+6)} = 3.33E-3 \text{ in.}$$

$$\Delta_2 = \frac{P_2 L^3}{3EI_1} = \frac{(5000.)(100.)^3}{(3)(30.E+6)(72.)} = 7.716E-1 \text{ in.}$$

# Вывод сил в элементе для данного примера

## FORCES IN BAR ELEMENTS (CBAR)

| ELEMENT ID. | BEND-MOMENT PLANE 1 | END-A PLANE 2 | BEND-MOMENT PLANE 1 | END-B PLANE 2 | - SHEAR - PLANE 1 | PLANE 2 | AXIAL FORCE  | TORQUE       |
|-------------|---------------------|---------------|---------------------|---------------|-------------------|---------|--------------|--------------|
| 3400        | -5.000000E+05       | 0.0           | 0.0                 | 0.0           | -5.000000E+03     | 0.0     | 2.400000E+04 | 4.000000E+04 |



# Вывод напряжений для данного примера

| STRESSES IN BAR ELEMENTS (CBAR) |              |              |               |               |              |               |               |                  |         |
|---------------------------------|--------------|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|------------------|---------|
| ELEMENT ID.                     | SA1 SB1      | SA2 SB2      | SA3 SB3       | SA4 SB4       | AXIAL STRESS | SA-MAX SB-MAX | SA-MIN SB-MIN | M.S.-T<br>M.S.-C |         |
| 3400                            | 2.083333E+04 | 2.083333E+04 | -2.083333E+04 | -2.083333E+04 | 1.000000E+03 | 2.183333E+04  | -1.983333E+04 | 6.5E-01          | 8.2E-01 |
|                                 | 0.0          | 0.0          | 0.0           | 0.0           |              | 1.000000E+03  | 1.000000E+03  |                  |         |

Изгибные напряжения

Напряжения  
от действия  
осевой силы

Суммарные напряжения  
от действия  
осевой силы и изгиба

$$\sigma_{\text{bending}} = \frac{My}{I_1} = \frac{(5.0E+5)(3.)}{72.} = 2.0833E+4$$

$$\sigma_{\text{axial}} = \frac{P}{A} = \frac{2.4E+4}{24.} = 1.0E+3$$

$$M.S.(T) = \frac{S_{\text{allow}}}{|S_{\text{actual}}|} - 1.0 = \frac{36000.}{21833.} - 1.0 = 0.65$$

$$M.S.(C) = \frac{S_{\text{allow}}}{|S_{\text{actual}}|} - 1.0 = \frac{36000.}{19833.} - 1.0 = 0.82$$

необязательно