Затухаючі коливання пружинного маятника

1. Затухаючі коливання пружинного маятника

Модель пружинного маятника. *B* - механізм, що забезпечує загасання. *F* - зовнішня сила (в прикладі не присутній).

Нехай є система, що складається з пружини (підкоряється закону Гука), один кінець якої жорстко закріплений, а на іншому знаходиться тіло масою *m.* Коливання відбуваються в середовищі, де сила опору пропорційна швидкості з коефіцієнтом *c* (див. в'язке тертя).

Тоді другий закон Ньютона для даної системи запишеться так:

де F_c - Сила опору, F_y - Сила пружності

$$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_y$$

$F_c = -cv$, $F_y = -kx$, Тобто $ma + cv + kx = 0$ або в диференціальній формі

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

де *k* - коефіцієнт пружності в законі Гука, *c* - коефіцієнт опору, що встановлює співвідношення між швидкістю руху грузика і виникає при цьому силою опору.

Для спрощення вводяться наступні позначення:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Величину ω називають власною частотою системи, ζ - Коефіцієнтом загасання.

Тоді диференціальне рівняння приймає вид

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

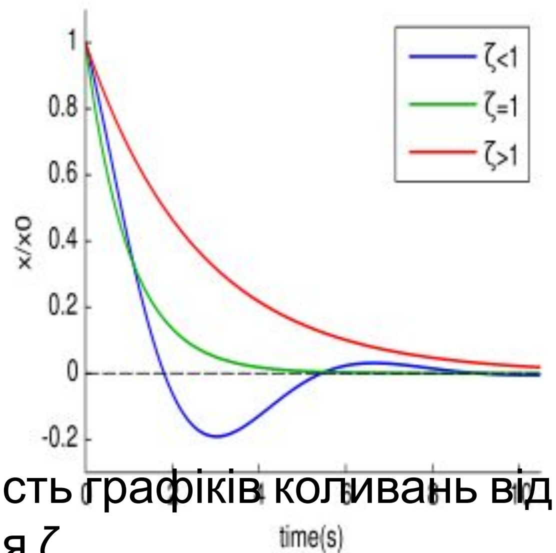
Зробивши заміну $x = e^{\lambda t}$, Отримують характеристичне рівняння

Коріння якого обчислюються за наступною формулою

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

1.1. Рішення

$$\lambda_{\pm} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$



Залежність графіків коливань від значення ζ.
Залежно від величини коефіцієнта загасання рішення розділяється на три можливих варіанти.

Аперіодічность

Якщо , То є два дійсних кореня, і рішення диференціального рівняння приймає вигляд:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_- t} + c_2 e^{\lambda_+ t}$$

У цьому разі коливання з самого початку експоненціально згасають.

Кордон аперіодічності

Якщо , Два дійсних кореня збігаються , І рішенням рівняння є:

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\omega_o t}$$

У даному випадку може мати місце тимчасове зростання, але потім - експоненціальне згасання.

Слабке загасання

Якщо , То рішенням характеристичного рівняння є два комплексно спряжених кореня

$$x(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\omega_o t}$$

Тоді рішенням вихідного диференціального рівняння є

Де - Власна частота затухаючих коливань.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}(c_1 \cos(\omega_\mathrm{d} t) + c_2 \sin(\omega_\mathrm{d} t))$$

Константи c_1 і c_2 в кожному з випадків визначаються з початкових умов:

$$\begin{cases} x(0) & = & a \\ \dot{x}(0) & = & b \end{cases}$$