

# Типовые динамические звенья САУ

- Объект называется типовым динамическим звеном, если его передаточная функция содержит полиномы небольшой степени (не выше второй) комплексной переменной  $p$  в числителе или в знаменателе.

## Классификация типовых динамических звеньев

- Минимально фазовые звенья — это звенья, передаточные функции которых могут содержать в своей структуре как нули, так и полюсы, причем полюсы могут иметь отрицательные вещественные части, быть нулевыми или чисто мнимыми.

Для минимально фазовых звеньев  $-\pi \leq \varphi(\omega) < \frac{\pi}{2}$

- Неминимально фазовые звенья бывают:
- **устойчивыми** – их передаточные функции содержат положительные нули и отрицательные полюсы;
- **неустойчивыми** – их передаточные функции содержат положительные полюсы и отрицательные нули.
- Трансцендентные звенья – это звенья, передаточные функции (ПФ) которых содержат трансцендентные выражения. Пример – звено чистого запаздывания, его ПФ  $W(p) = ke^{-p\tau}$ .
- Иррациональные звенья – это звенья передаточные функции (ПФ) которых содержат иррациональные выражения. Пример:  $W(p) = \frac{k}{\sqrt{p}}$

# МИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

- Звенья нулевого и первого порядка
- Пропорциональное (безынерционное) звено

Уравнение звена и его передаточная функция

$$y(t) = k \cdot x(t) \quad W(p) = k.$$

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

$$\text{АФЧХ} \quad W(j\omega) = k \quad \text{ВЧХ} \quad P(\omega) = k$$

$$\text{МЧХ} \quad Q(\omega) = 0 \quad \text{АЧХ} \quad A(\omega) = k$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\omega) = 0 \quad \text{ЛАЧХ} \quad G(\omega) = 20 \lg k,$$

$$\text{Переходная функция} \quad h(t) = k \cdot 1(t)$$

$$\text{Импульсная переходная функция} \quad w(t) = k \cdot \delta(t)$$

## Идеальное интегрирующее звено

- Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt \quad W(p) = \frac{k}{p}.$$

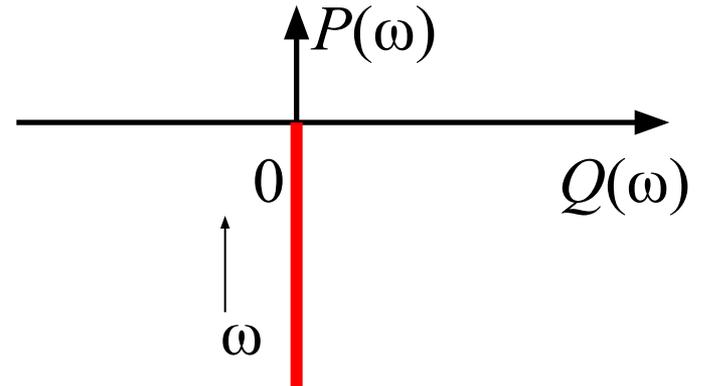
Параметр  $k$  является коэффициентом передачи звена по скорости и имеет размерность  $\text{с}^{-1}$ .

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

АФЧХ  $W(j\omega) = -j \frac{k}{\omega}$

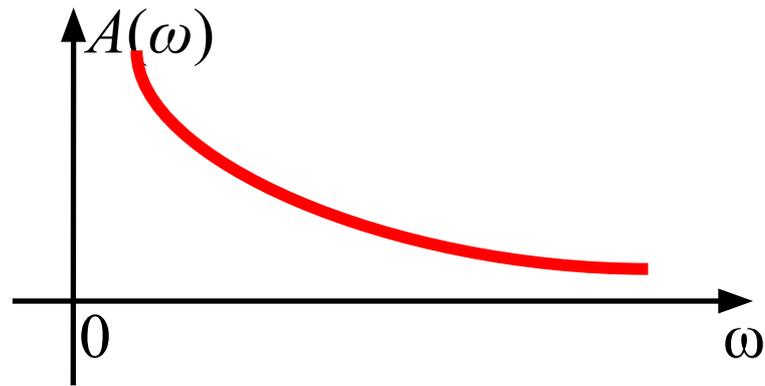
ВЧХ  $P(\omega) = 0$

МЧХ  $Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$



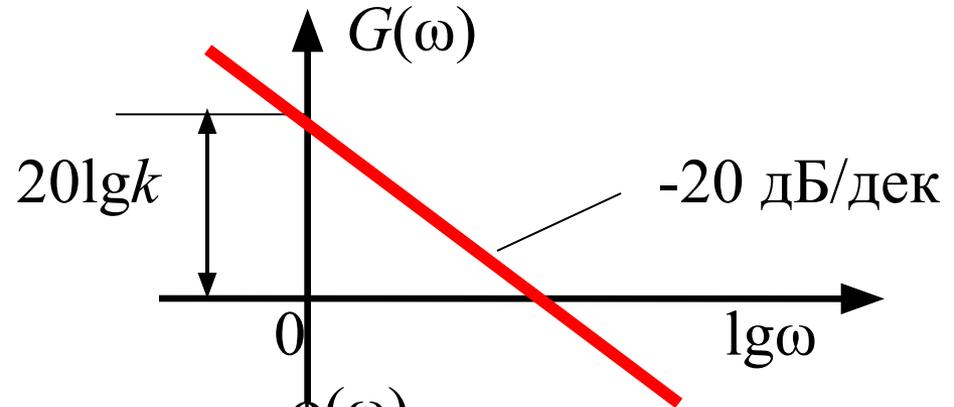
АЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega},$$



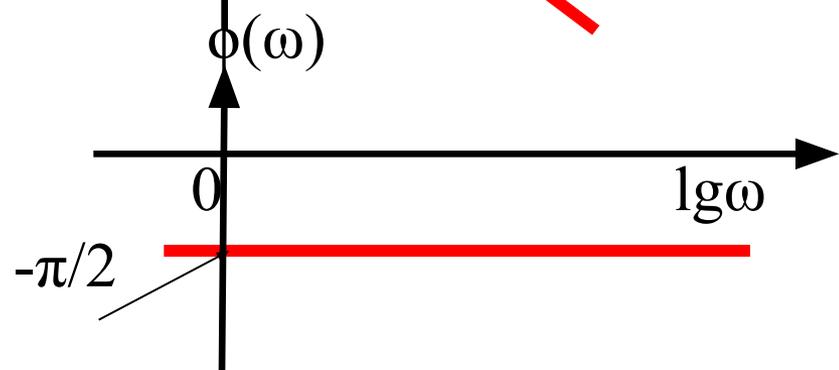
ЛАЧХ

$$G(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega,$$



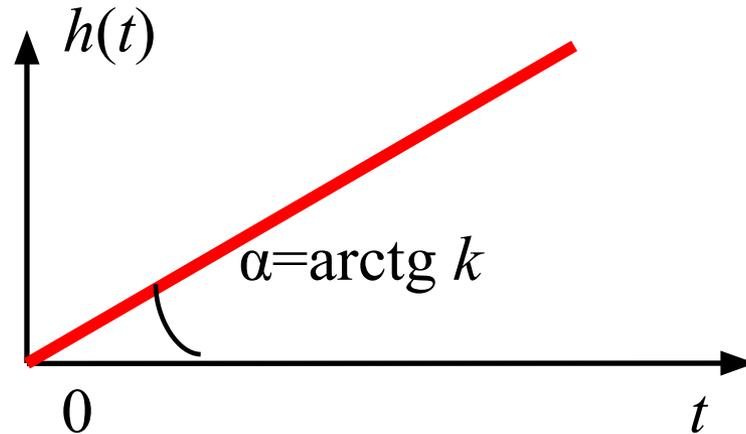
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2},$$



# Переходная функция и характеристика

$$h(t) = k \cdot t,$$



## Идеальное дифференцирующее звено

- Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}, \quad W(p) = k \cdot p.$$

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициент передачи  $k$  измеряется в **секундах**

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

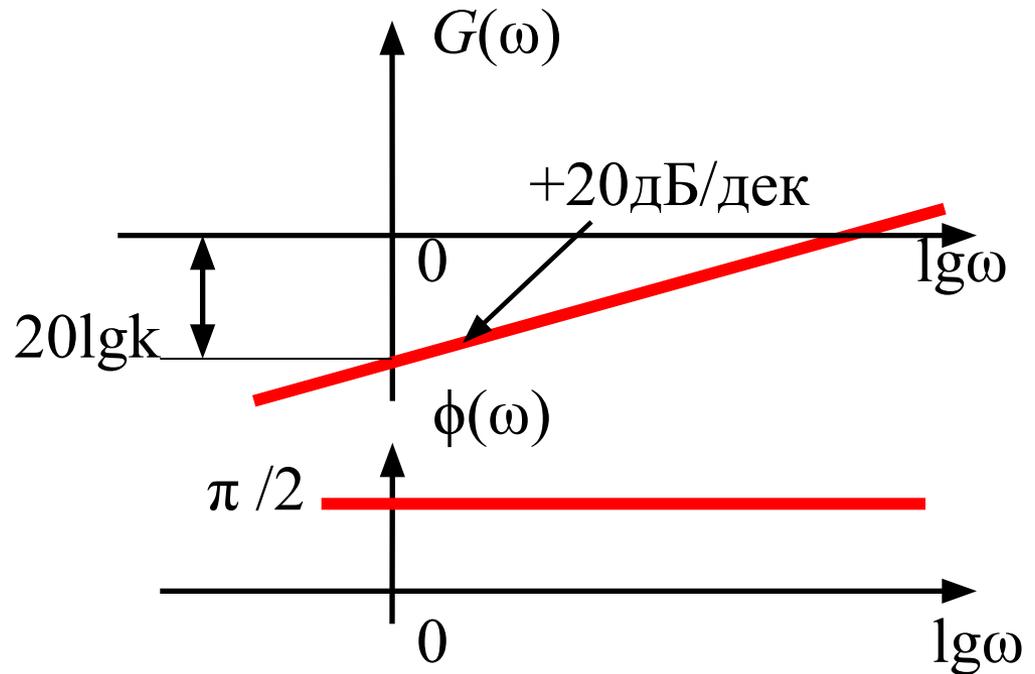
АФЧХ	$W(j\omega) = jk\omega,$	ВЧХ	$P(\omega) = 0,$
МЧХ	$Q(\omega) = \omega k,$	АЧХ	$A(\omega) = \omega k,$

ЛАЧХ

$$G(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega,$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2},$$



# Инерционное звено (апериодическое звено первого порядка)

Дифференциальное уравнение звена в оригиналах и изображениях:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t) \quad (Tp + 1)Y(p) = kX(p)$$

$T$  – постоянная времени

Передаточная функция

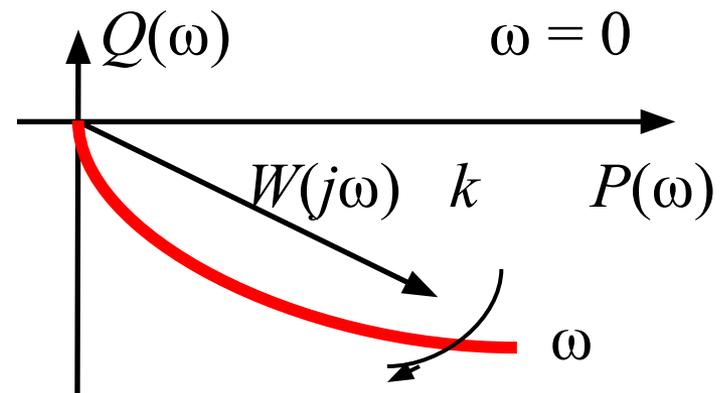
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp + 1}$$

Частотная передаточная функция и годограф АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} = \frac{k(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2}$$

ВЧХ

$$P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2};$$

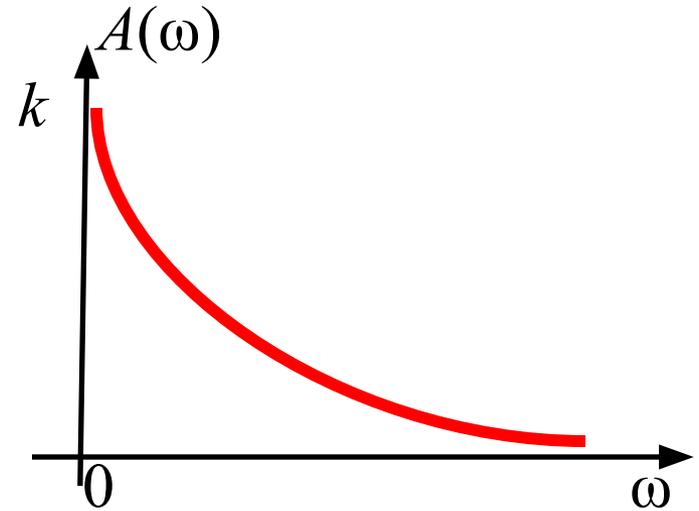


МЧХ

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + \omega^2 T^2};$$

АЧХ

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \\ &= \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \end{aligned}$$



Точная ЛАЧХ

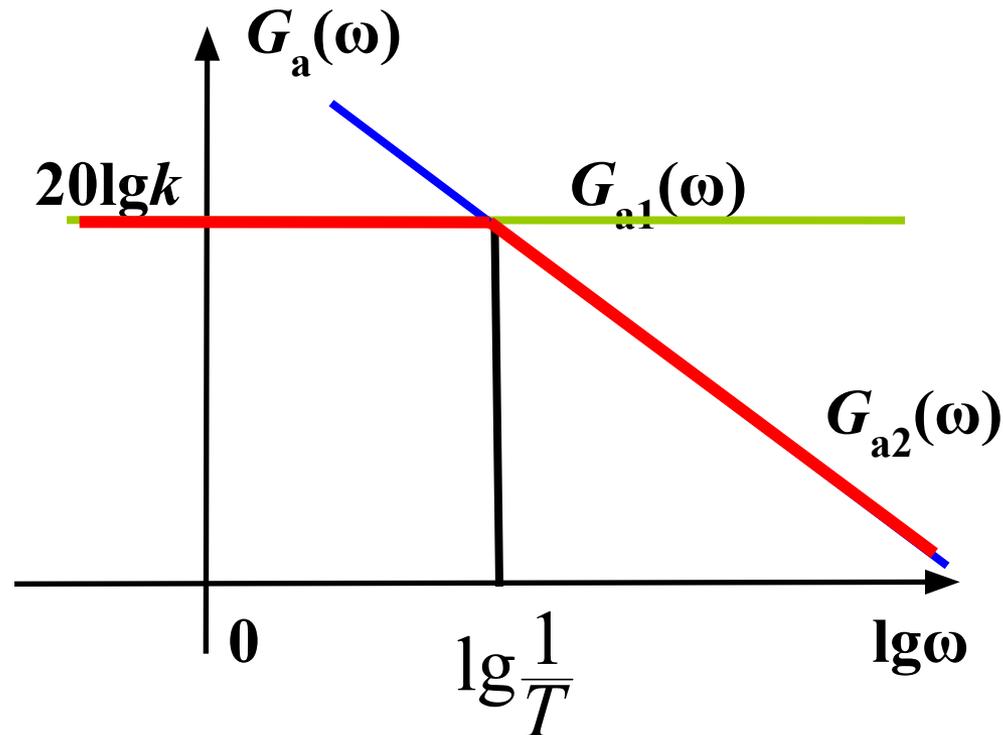
$$\begin{aligned} G(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = \\ &= 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned}$$

ФЧХ

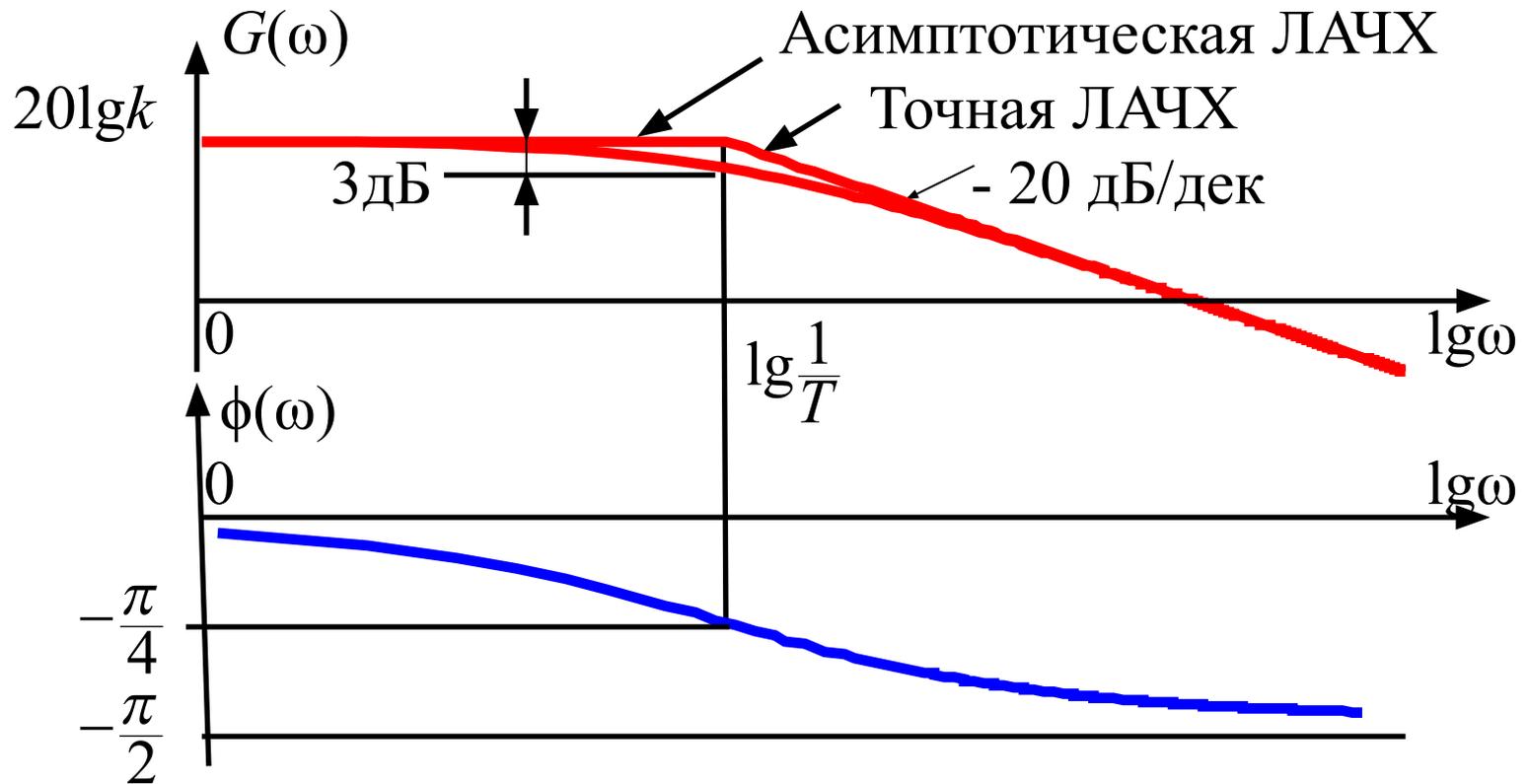
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg} \omega T;$$

## Построение асимптотической ЛАЧХ

- Пусть  $\omega \rightarrow 0$ , тогда  $\omega^2 T^2 \ll 1$  и  $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx 1$ , следовательно  $G_{a1}(\omega) \approx 20 \lg k$ .
- Пусть  $\omega \rightarrow \infty$ , тогда  $\omega^2 T^2 \gg 1$  и  $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx \omega T$ , следовательно  $G_{a2}(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega T$ .



- Частота  $\omega_c = \frac{1}{T}$  называется **частотой сопряжения**  
 На частоте сопряжения  $G(\omega) - G_a(\omega) = 20 \lg \sqrt{2} = 3 \text{ дБ}$
- Точная, асимптотическая ЛАЧХ и ЛФЧХ



## Переходная функция и переходная характеристика звена

- **Переходная функция** инерционного звена

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

- **Переходная характеристика** инерционного звена



# Форсирующее звено

Передаточная функция

$$W(p) = k(\tau p + 1)$$

где  $\tau$  – постоянная времени (с)

Частотные функции и характеристики

Частотная передаточная функция и годограф АФЧХ

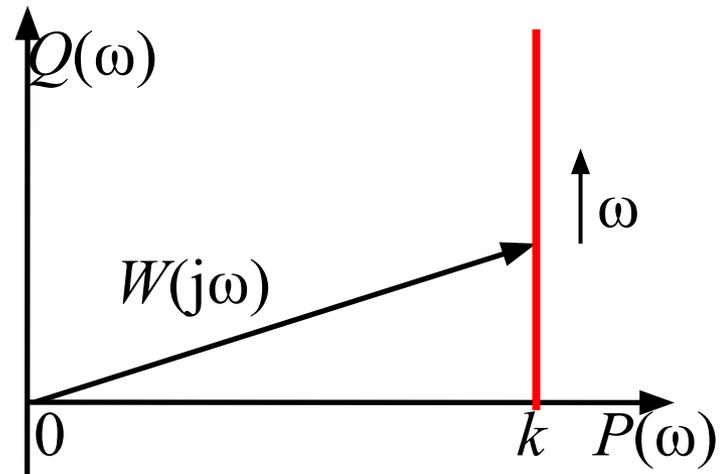
$$W(j\omega) = k(j\tau\omega + 1)$$

ВЧХ

$$P(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)] = k$$

МЧХ

$$Q(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)] = k\omega\tau$$



## АЧХ

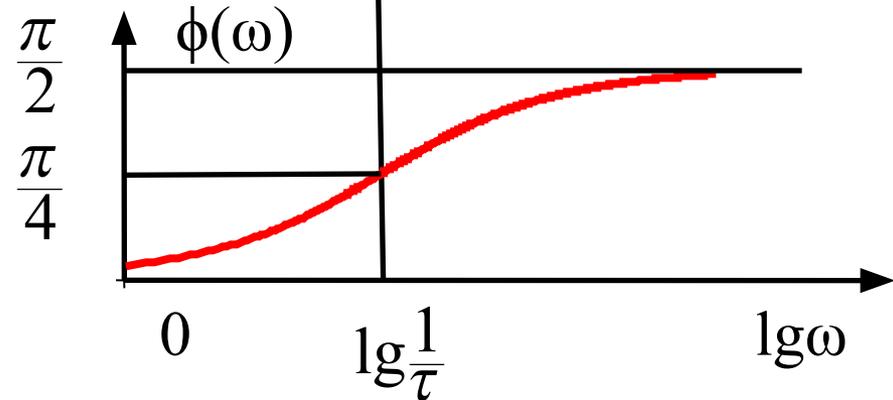
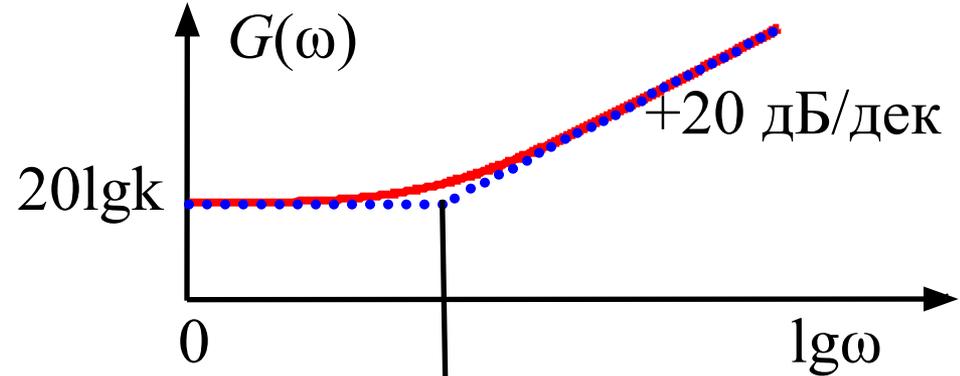
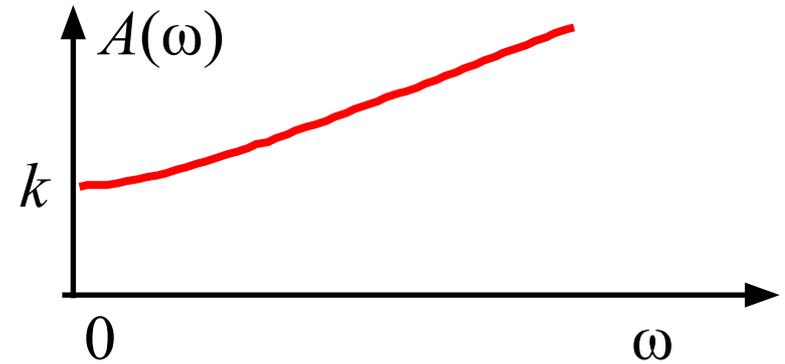
$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \\ &= k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \end{aligned}$$

## ЛАЧХ

$$\begin{aligned} G(\omega) &= 20\lg A(\omega) = \\ &= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} \end{aligned}$$

## ФЧХ

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \\ &= \operatorname{arctg} \omega\tau \end{aligned}$$



Переходная функция форсирующего звена

$$h(t) = k[\tau\delta(t) + 1]$$

## Инерционное форсирующее звено

Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{ин}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{Tp + 1}$$

АЧХ

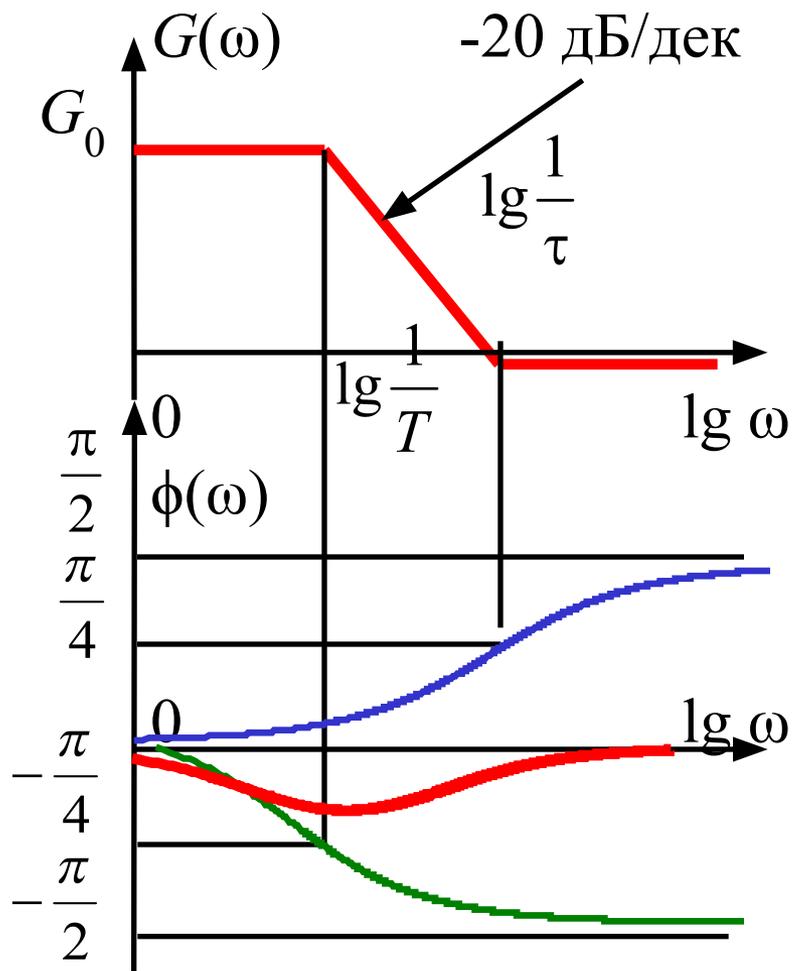
$$A(\omega) = A_{\text{ин}}(\omega) \cdot A_{\text{форс}}(\omega) = \frac{k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2T^2 + 1}}$$

ЛАЧХ

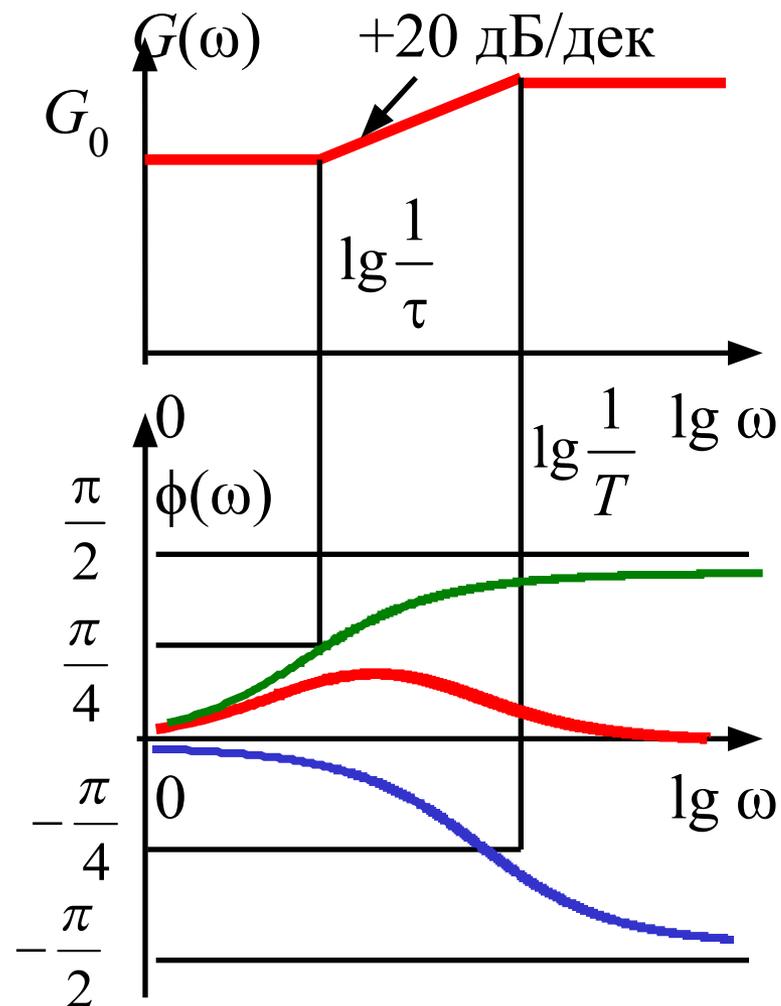
$$\begin{aligned} G(\omega) &= G_{\text{ин}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) = \\ &= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} - 20\lg\sqrt{\omega^2T^2 + 1} \end{aligned}$$

**ФЧХ**  $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ин}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) = \text{arctg}(\omega \cdot \tau) - \text{arctg}(\omega \cdot T)$

$\tau < T$



$\tau > T$

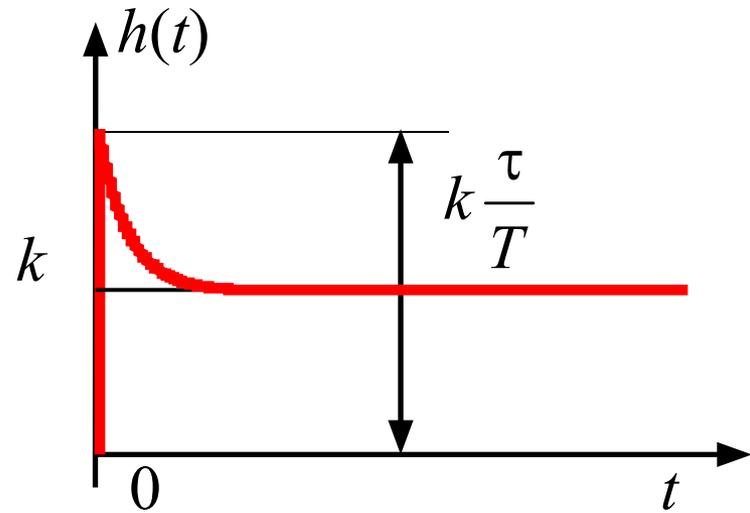
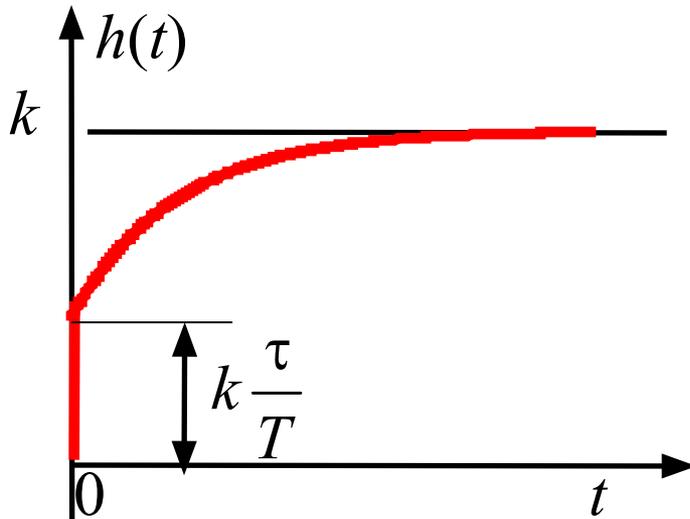


# Переходная функция и переходные характеристики инерционного форсирующего звена

$$h(t) = k \left[ 1 + \left( \frac{\tau}{T} - 1 \right) e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

$$\tau < T$$

$$\tau > T$$



# Изодромное звено

Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{инт}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p}$$

ЛАЧХ

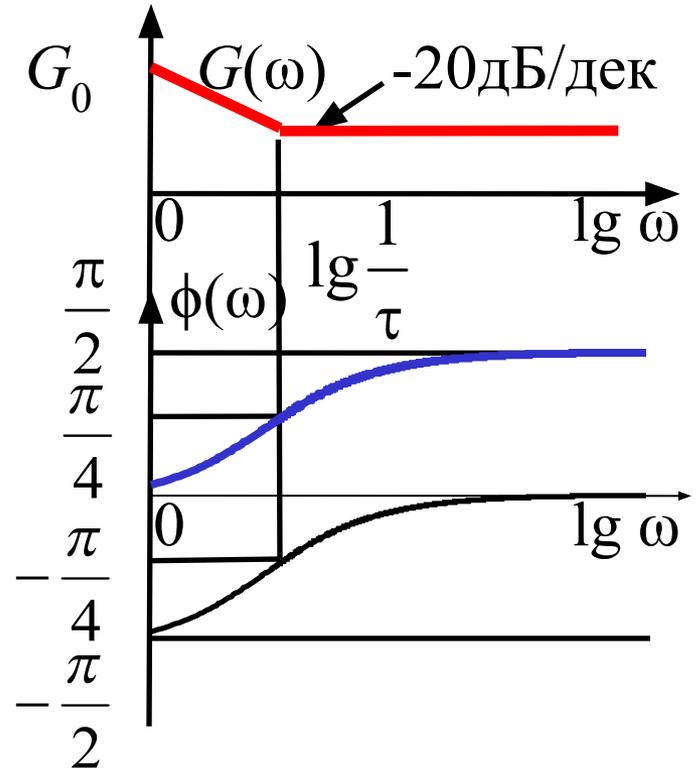
$$G(\omega) = G_{\text{инт}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) =$$

$$= 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} - 20 \lg \omega$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{инт}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) =$$

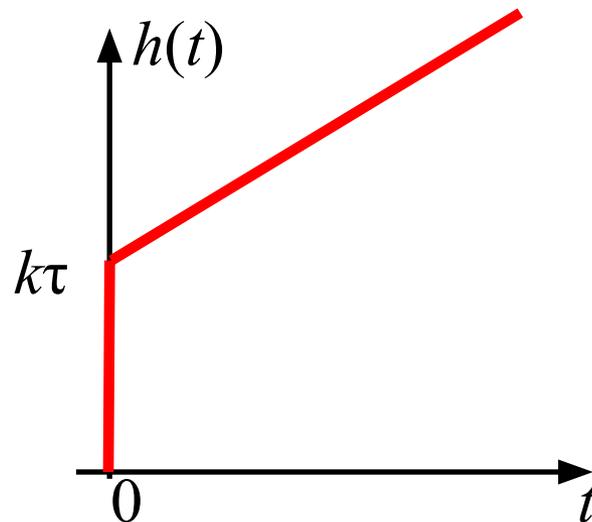
$$= \arctg(\omega \cdot \tau) - \frac{\pi}{2}$$



# Переходная функция и переходная характеристика изодромного звена

$$Y(p) = X(p) \cdot W(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p \cdot p} = \frac{B(p)}{p^2}$$

$$h(t) = \frac{d}{dp} \left[ B(p) e^{pt} \right] \Bigg|_{p=0} = \frac{d}{dp} \left[ k(\tau p + 1) e^{pt} \right] \Bigg|_{p=0} = k(\tau + t)$$



# Реальное дифференцирующее звено

## Передаточная функция

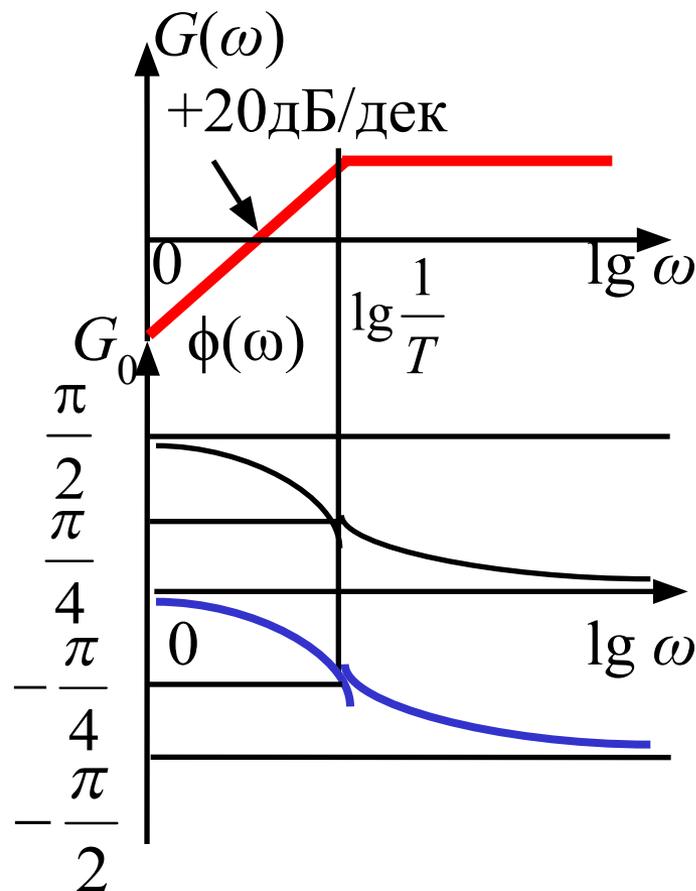
$$W(p) = W_{\text{дифф}}(p) \cdot W_{\text{ин}}(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$$

## ЛАЧХ

$$G(\omega) = G_{\text{дифф}}(\omega) + G_{\text{ин}}(\omega) =$$
$$= 20 \lg k + 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

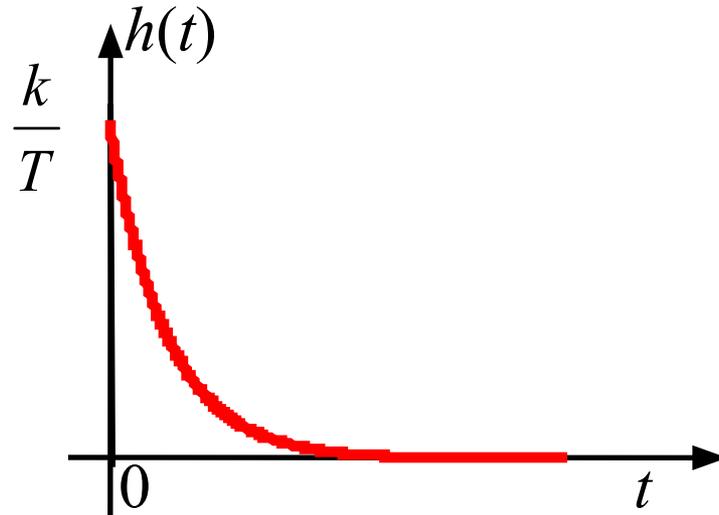
## ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{дифф}}(\omega) + \varphi_{\text{ин}}(\omega) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega \cdot T)$$



# Переходная функция и переходная характеристика реального дифференцирующего звена

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



## Звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение звена в оригиналах и изображениях:

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)Y(p) = kX(p).$$

$T_1, T_2$  – постоянные времени

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Пусть  $p_1, p_2$  – корни характеристического уравнения

$$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = 0$$

## Апериодическое звено второго порядка

- $p_1, p_2$  – вещественные отрицательные корни

Передаточная функция

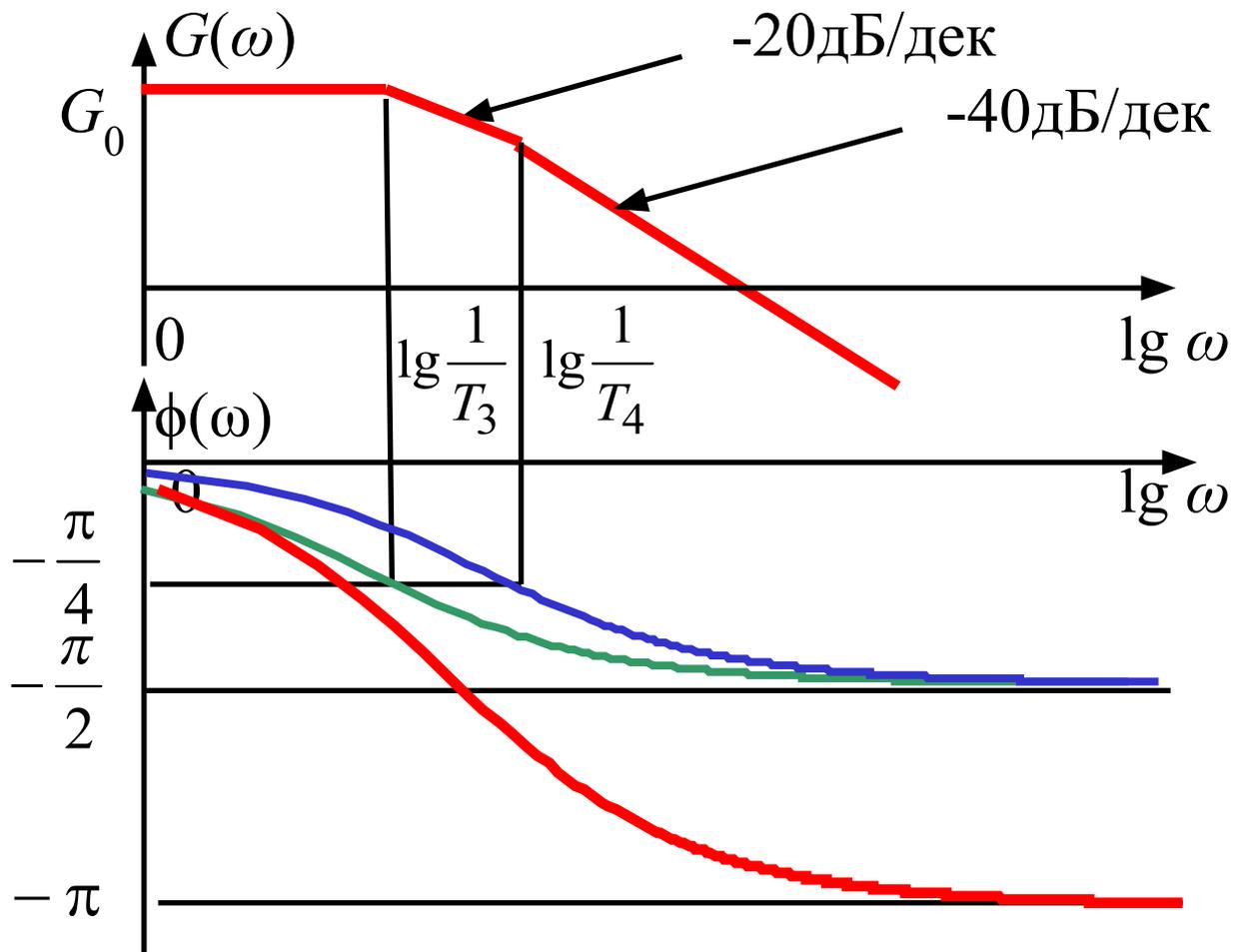
$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

где эквивалентные постоянные времени

$$T_{3,4} = \frac{T_2}{2} \pm \sqrt{\frac{T_2^2}{4} - T_1^2}$$

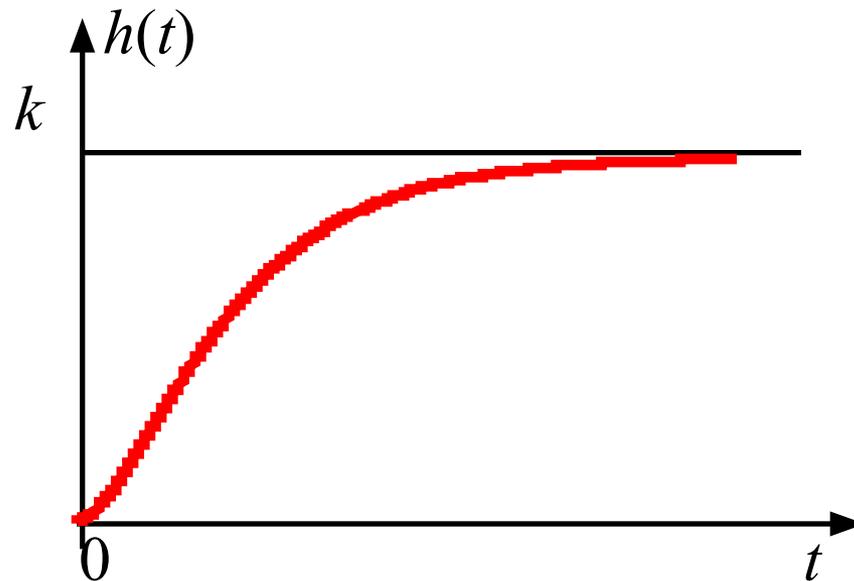
- Апериодическое звено второго порядка есть последовательное соединение двух инерционных звеньев с постоянными времени  $T_3, T_4$ , поэтому его **ЛАЧХ** и **ЛФЧХ** – *сумма* ЛАЧХ и ЛФЧХ этих звеньев

# ЛАЧХ и ЛФЧХ



# Переходная функция и переходная характеристика апериодического звена второго порядка

$$h(t) = k \left[ 1 + \frac{T_3}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_4}} \right].$$



## Колебательное звено

- $p_1, p_2$  – комплексные сопряжённые корни с отрицательными вещественными частями

### Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

Здесь  $T = T_1$

Параметр  $\xi = \frac{T_2}{2T_1}$  называется коэффициентом демпфирования

Для колебательного звена  $0 < \xi < 1$

Для апериодического звена второго порядка  $\xi \geq 1$  и

корни  $p_1, p_2$  становятся вещественными

# Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2 + 2j\xi\omega T} = \frac{k(1 - \omega^2 T^2 - 2j\xi\omega T)}{\underbrace{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}_{\text{МЧХ}}}$$

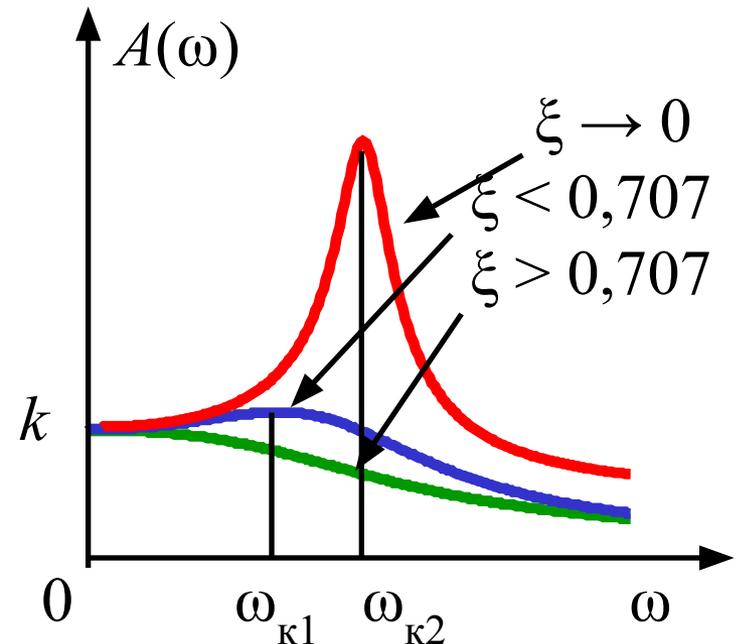
ВЧХ

МЧХ

$$P(\omega) = k \frac{1 - \omega^2 T^2}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2} \quad Q(\omega) = -k \frac{2\xi\omega T}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2},$$

АЧХ

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}}$$



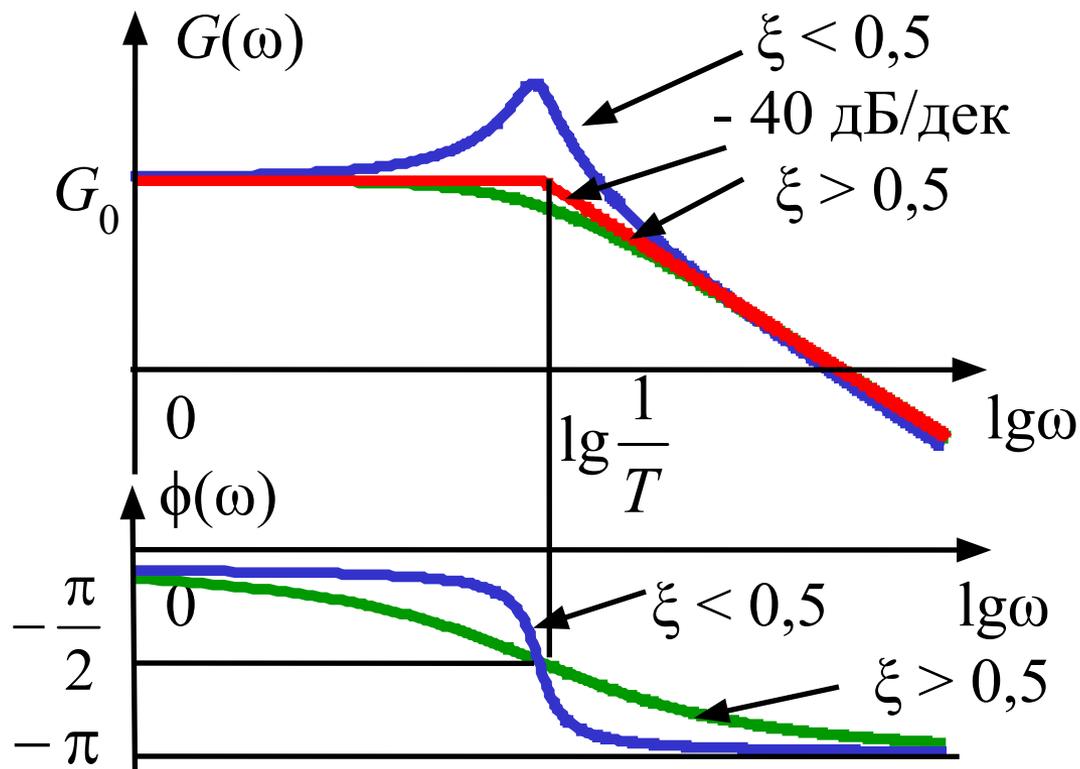
Частота собственных колебаний  $\omega_K = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$

ЛАЧХ  $G(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}$

ФЧХ

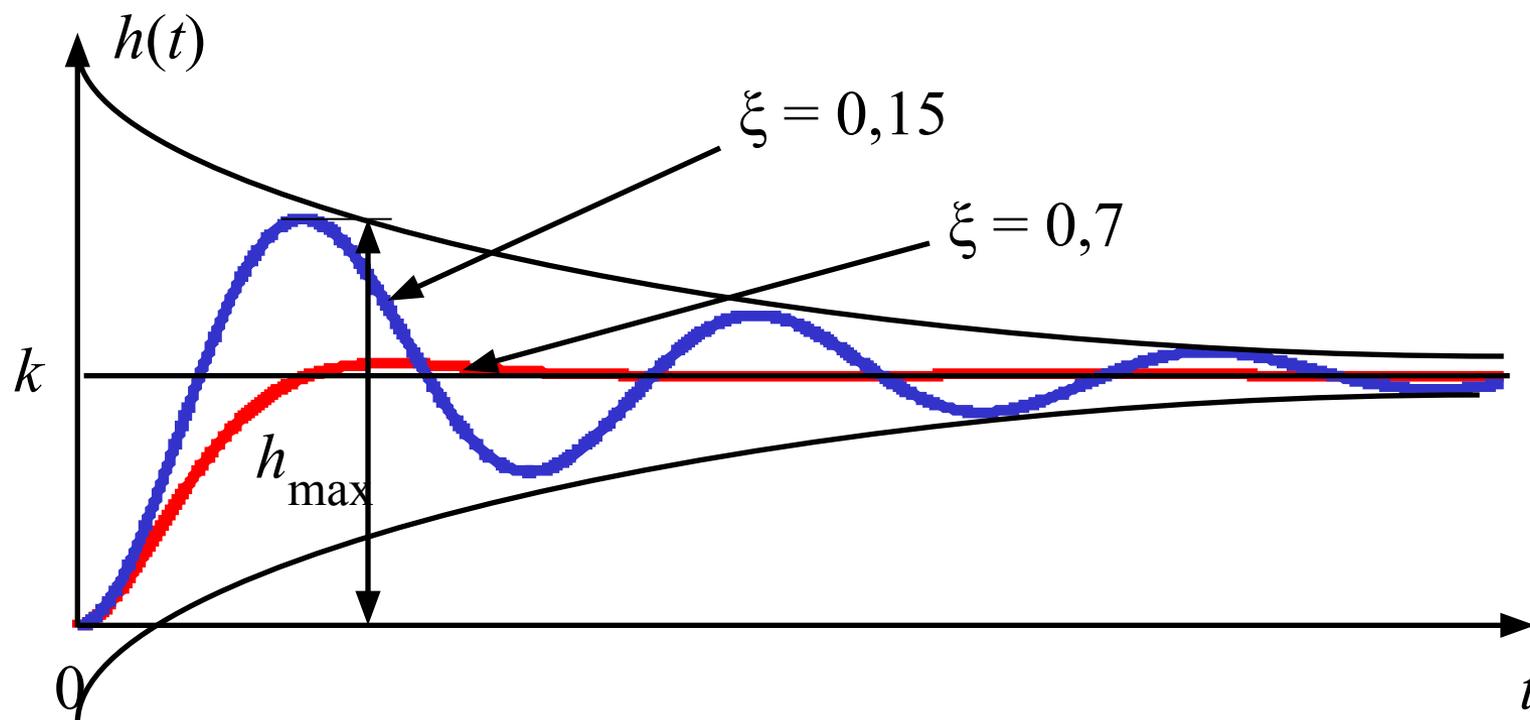
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} =$$

$$= -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$



# Переходная функция и переходная характеристика колебательного звена

$$h(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}} \left( \cos \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} t \right) \right]$$



## Консервативное звено

- $p_1, p_2$  – мнимые сопряжённые корни, что соответствует  $\xi = 0$

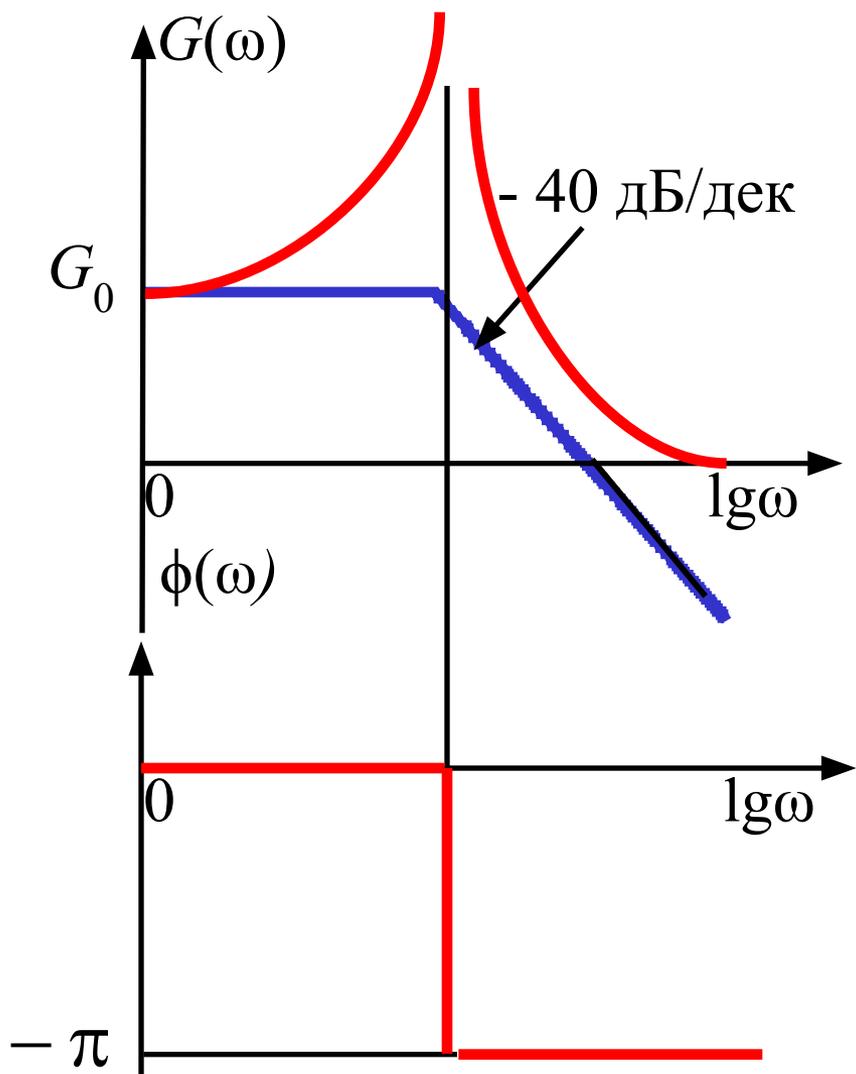
Передаточная функция  $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$

Частотная передаточная функция  $W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$

АЧХ  $W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$  ЛАЧХ  $G(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 - \omega^2 T^2}$

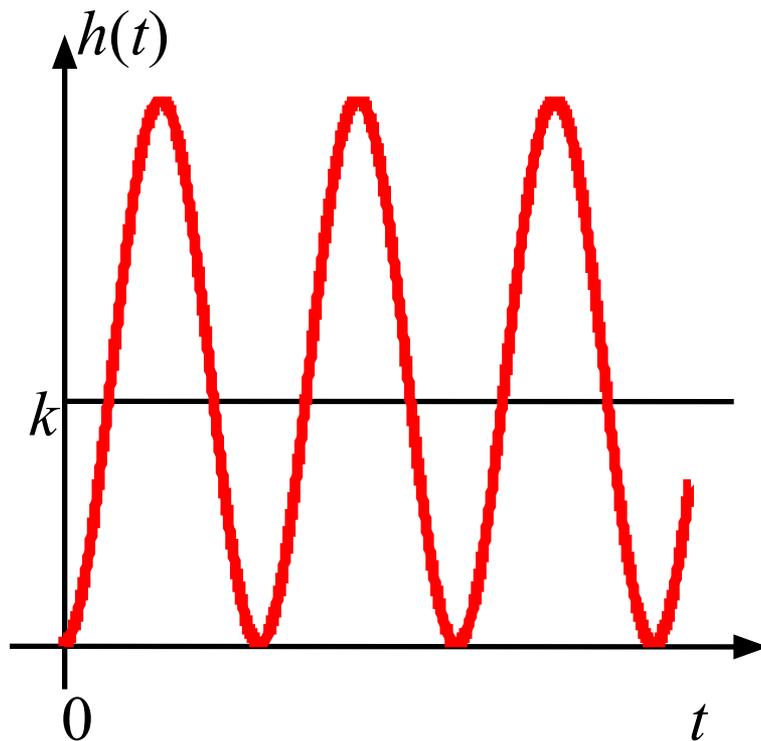
ФЧХ 
$$\varphi(\omega) = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \frac{1}{T}, \\ -\pi & \text{при } \omega \geq \frac{1}{T}. \end{cases}$$

# ЛАЧХ и ЛФЧХ



# Переходная функция и переходная характеристика

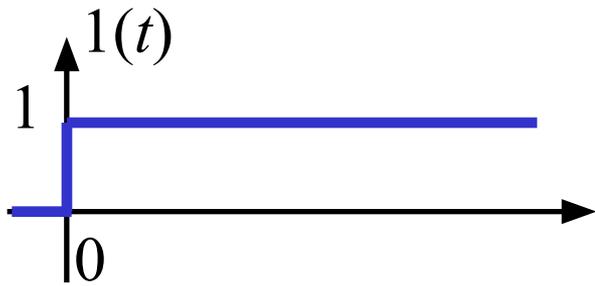
$$h(t) = k \left( 1 - \cos \frac{t}{T} \right)$$



# Звено чистого запаздывания

Понятие запаздывания и **переходная характеристика** звена

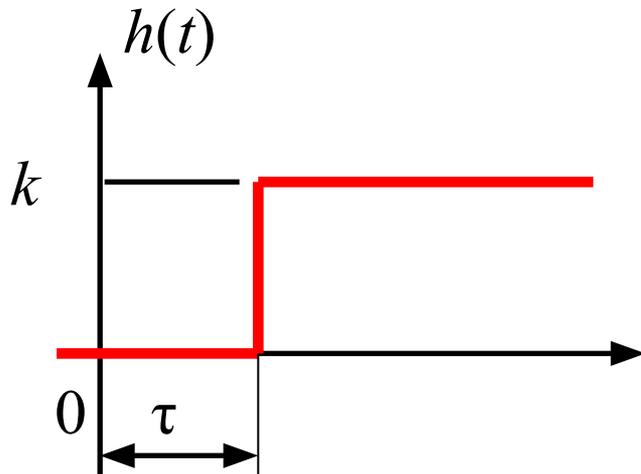
$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau)$$



**Передаточная функция**

$$W(p) = ke^{-p\tau}.$$

**Частотная передаточная функция**



$$W(j\omega) = \underbrace{ke^{-j\omega\tau}}_{\text{ВЧХ}} = k \left[ \underbrace{\cos(\omega\tau)}_{\text{МЧХ}} - j \sin(\omega\tau) \right]$$

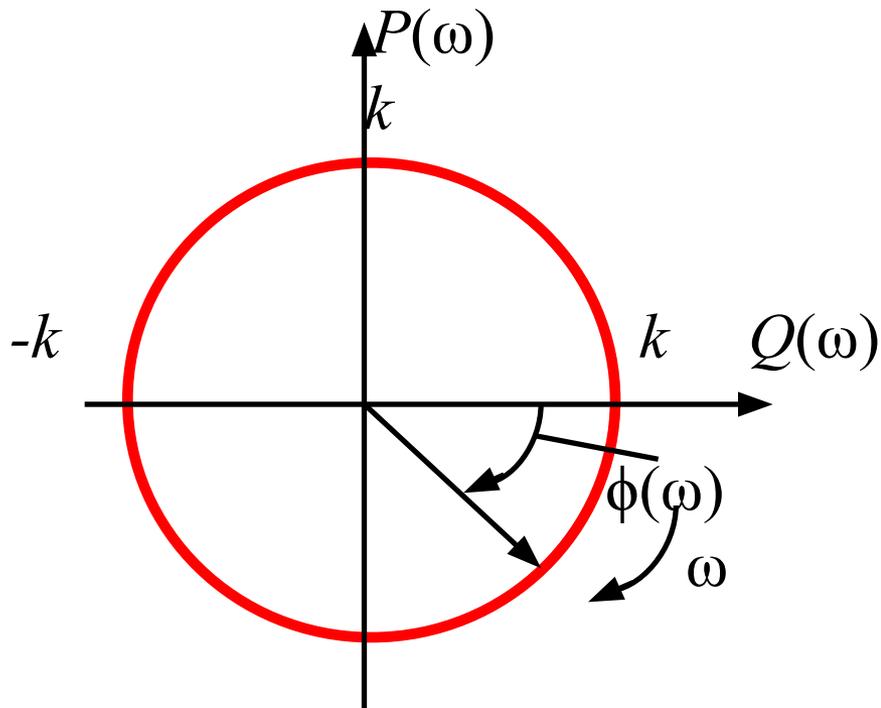
$$P(\omega) = k \cos(\omega\tau) \quad Q(\omega) = -k \sin(\omega\tau)$$

$$\underbrace{A(\omega)}_{\text{АЧХ}} = k \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = k,$$

# ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = -\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\omega\tau)] = -\omega\tau.$$

## Годограф АФЧХ



## ЛФЧХ

