Предельные теоремы теории вероятностей

Суть предельных теорем теории вероятности (ПТТВ)

ПТТВ устанавливают связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний над ними. Являются основой математической статистики. Условно делятся на две группы: закон больших чисел (ЗБЧ) и центральную предельную теорему (ЦПТ).

Закон больших чисел

- Устанавливает устойчивость средних значений: при большом количестве испытаний их средний результат перестаёт быть случайным и может быть предсказан с достаточной точностью.
- Утверждает,что при достаточно большом числе испытаний n практически достоверными являются события:

1. Среднеарифметическое случайных величин сколь угодно мало отличается от среднеарифметического их математических ожиданий (устойчивость среднеарифметического)
2. Относительная частота наступления событий сколь угодно мало отличается от вероятности наступления этих событий

Количественное выражение закона больших чисел

- **Лемма Чебышева или неравенство Маркова.**

Пусть случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание. Тогда для любого положительного числа A справедливо неравенство:

$$P(X > A) < \frac{M(X)}{A} \qquad (1)$$

$$P(X \le A) \le 1 - \frac{M(X)}{A} \qquad (2)$$

Теорема Чебышева для среднего арифметического случайных величин.

Пусть даны попарно независимые СВ , имеющие конечные математические ожидания и конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной с, то как бы ни мало было постоянное положительное число ε, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице можно утверждать, что отклонение средней арифметической этих n величин от средней арифметической их математических ожиданий не превосходит по абсолютной величине заданного числа ε, если число n достаточно велико.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|\le\varepsilon\right)=1\,.$$

Количественное выражение закона больших чисел

- **Неравенство Чебышева для среднего арифметического случайных величин.**

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ *имеющие математические ожидания* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *и дисперсии, каждая из которых ограниченна числом* C $\quad D(X) \le C$

Тогда справедливо неравенство

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} \qquad (5)$$

Количественное выражение закона больших чисел

- **Теорема Чебышева об устойчивости среднего арифметического случайных величин.**

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)=1 \qquad (6)$$

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\overset{P}{\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ \textit{говорят},$$

что среднее арифметическое СВ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Количественное выражение закона больших чисел

- **Неравенство Чебышева для частости.**

$$\text{Для случайной величины } X = \frac{m}{n}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (7)$$

Количественное выражение закона больших чисел

- **Теорема Бернулли**

При достаточно большом числе испытаний n практически достоверно, что частость сколь угодно мало отличается от вероятности наступления события (устойчивость частости)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1$$

$$\frac{m}{n}\ \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\Rightarrow}}\ P$$

т.е говорят, что частость сходится по вероятности к вероятности P этого события.

Центральная предельная теорема

- Устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному.