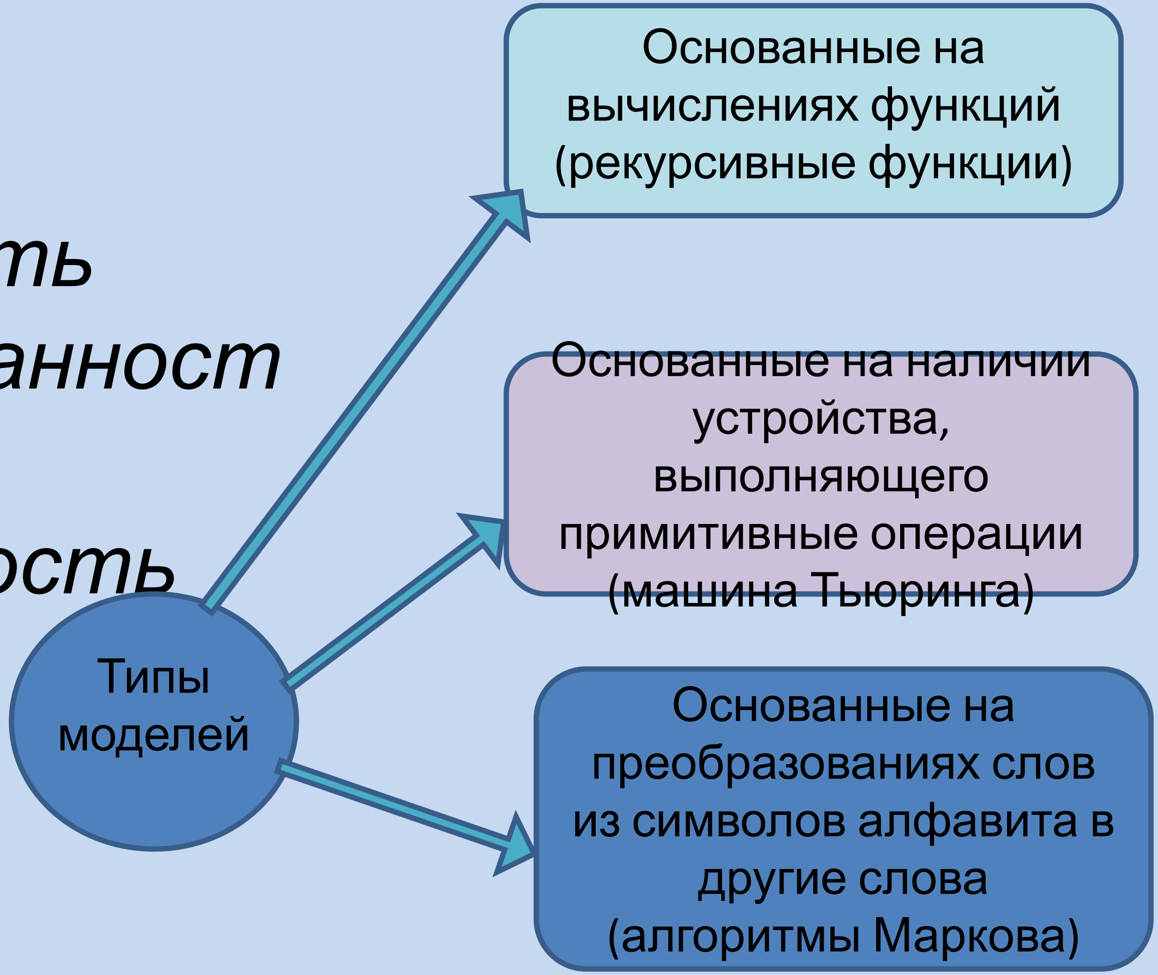
Модуль 1.

Свойства алгоритма. Примитивно-рекурсивные функции и операторы. Частично-рекурсивные функции. Тезис Черча.

Свойства алгоритма и типы алгоритмических моделей

<u>Свойства алгоритма:</u>

- *Массовость*
- *Дискретность*
- *Элементарность*
- *Детерминированност ь*
- *Результативность*



Примитивно-рекурсивные функции

<u>Простейшие базисные функции</u>:

1) нуль-функция 0(x)=0;

2) функция следования $s'(x)=x+1;$

3) функция выбора $U^n_m\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)=x_m\ (m<=n).$

<u>Оператор суперпозиции</u> S^n_m

Для функций $h(y_1, \ldots, y_m)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $g_m(x_1, \ldots, x_n)$

$S^n_m\ (h, g_1, \ldots, g_m) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n).$

<u>Оператор примитивной рекурсии</u> R_n определяет (n+1)-местную функцию f через n-местную функцию g и (n+2)-местную функцию h так:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0)=g(x_1, \ldots, x_n);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1)=h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Краткая запись: $f(x_1, \ldots, x_n, y)=R_n(g, h).$

Примеры ПРФ. Доказательство ПРФ по определению

1) f(x)=k (функция-константа)
   f(x)=s'(s'(…s'(0(x)))), если применить функцию следования конечное число раз, равное константе k.

2) f(x)=x
   Первый способ доказательства: f(x)= U^1_1 (x)
   Второй способ доказательства:
   f(0)=0=const – что const – ПРФ – доказано
   f(x+1)=x+1=s'(x)=s'(f(x))=U^2_2 (x, s'(f(x))) – получено с помощью конечного числа ПРФ, операторов ПР и суперпозиции
3) f(x,y)=x+y
   f(x,0)=x – ПРФ
   f(x,y+1)=x+y+1=f(x,y)+1=s'(f(x,y))= U^3_3 (x, y, s'(f(x,y)))

Расширение набора ПРФ

4) $f(x,y)=x*y$

5) $f(x,y)=x^y$

6) $f(x)=x!$

7) $$sg(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x>0 \\ 0, \text{ если } x=0 \end{cases}$$

8) $$\overline{sg}(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x=0 \\ 0, \text{ если } x>0 \end{cases}$$

9) $$f_{\div 1}(x)=\begin{cases} x-1, \ x>0 \\ 0, \ x=0 \end{cases}$$

10) $$x \div y=\begin{cases} x-y, \text{ если } x>=y \\ 0, \text{ если } x<y \end{cases}$$

11) $\max(x,y)$

12) $\min(x,y)$

13) $|x-y|$

14) $h(a,b)=a^{a+1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a+b}}}}}$

15) $q(a,b)=(a+b)^{(a+b-1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$

<u>Логические функции:</u>

Если $x,y\in\{0,1\}$

$x = 1\div x$

$x \lor y = \max(x,y)$

$x \land y = \min(x,y)$

Предикаты и примитивно-рекурсивные операторы

А – множество объектов x_i (i=1,..,N),
утверждение P(x), истинное для некоторых x_i и ложное для остальных, называется одноместным предикатом на множестве А.
Декартово произведение множеств $A_1,\ldots,A_M$:
$A_1 x A_2 x\ldots x A_M$: $\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)|x_1 \in A_1,\ldots,x_m \in A_M\}$.
Для предиката вводится его характеристическая функция:

$$\chi_{P(x1,\ldots,xn)} = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x_1,\ldots,x_n) \text{ истинен,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Условный переход или разветвление. Обозначим его *B*, который по функциям $q_1(x_1,\ldots,x_n)$, $q_2(x_1,\ldots,x_n)$ и предикату $P(x_1,\ldots,x_n)$ строит функцию $f(x_1,\ldots,x_n)=B(q_1, q_2, P)$:

$$f(x_1,\ldots,x_n)= \begin{cases} q_1(x_1,\ldots,x_n), \text{ если } P(x_1,\ldots,x_n) \text{ истинно.} \\ q_2(x_1,\ldots,x_n), \text{ если } P(x_1,\ldots,x_n) \text{ ложно.} \end{cases}$$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=g_1(x_1,\ldots,x_n)\ \chi_p(x_1,\ldots,x_n)+g_2(x_1,\ldots,x_n)\ (1- \chi_p(x_1,\ldots,x_n)).$$

Операторы суммирования и умножения

$f(x_1,\ldots,x_n, y)$ – функция от $(n+1)$-й переменной. Операции суммирования и умножения по переменной y с пределом z – это операторы, которые из функции $f(x_1,\ldots,x_n\ y)$ порождают новые функции:

$$q(x_1, \ldots, x_n, z) = \sum_{y<z} f(x_1, \ldots, x_n, y),$$

$$h(x_1, \ldots, x_n, z) = \prod_{y<z} f(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Они примитивно-рекурсивны (если f – примитивно – рекурсивна) в силу следующих соотношений:

$g(x_1,\ldots, x_n, 0)=0$ (ПРФ по определению);

$g(x_1,\ldots, x_n, z+1)=g(x_1,\ldots, x_n, z)+f(x_1,\ldots,x_n, z);$

$h(x_1,\ldots, x_n, 0)=1$ (по определению);

$h(x_1,\ldots,x_n, z+1)=h(x_1,\ldots,x_n, z)\, f(x_1,\ldots,x_n, z).$

<u>*Пример:*</u> *количество делителей числа x:* $\tau(x)=\sum_{i=1}^{x} \overline{sg}\left\{\frac{x}{i}\right\}$

Ограниченный оператор минимизации (μ-оператор)

Ограниченный оператор минимизации:

$\mu_{y \le z}$ ($P(x_1, \ldots, x_n, y)$). *В общем случае* z *- функция.*

<u>Пример</u>*:* $k = \mu_{y \le 4}$ ($y > x + 2$).

<u>Для x=0 процесс вычислений</u>:

y=0. y ≤ 4 - истина. Предикат: 0>2 – ложь

y=1. y ≤ 4 - истина. Предикат: 1>2 – ложь

y=2. y ≤ 4 - истина. Предикат: 2>2 – ложь

y=3. y ≤ 4 - истина. Предикат: 3>2 – истина, значит k=3.

<u>Для x=3 процесс вычислений</u>:

y=0. y ≤ 4 - истина. Предикат: 0>5 – ложь

y=1. y ≤ 4 - истина. Предикат: 1>5 – ложь

y=2. y ≤ 4 - истина. Предикат: 2>5 – ложь

y=3. y ≤ 4 - истина. Предикат: 3>5 – ложь

y=4. y ≤ 4 - истина. Предикат: 4>5 – ложь

y=5. y ≤ 4 - ложь. Предикат в истину не обратился, значит k=4 – значению ограничителя.

<u>Доказательство ПРФ ограниченного оператора минимизации</u>:

$$\mu_{y \le z}(P(x_1, \ldots, x_n, y)) = \sum_{i=0}^{z} \prod_{j=0}^{i} (1 - \chi_P(x_1, \ldots, x_n, j))$$

Быстро растущие функции. Функции Аккермана

$P_0\ (a, x)=a+x$, $P_1\ (a, x)=ax$, $P_2\ (a, x)=a^x$

$P_1\ (a, x+1)=P_0\ (a, P_1(a, x))$; $P_1\ (a, 1)=a$; $P_1\ (a, 0)=0$;
$P_2\ (a,x+1)=P_1(a,P_2(a,x))$; $P_2(a,1)=a$; $P_2(a,0)=1$.

Продолжим эту цепочку, полагая по определению для *n=2, 3,…*
$P_{n+1}\ (a, 0)=1$;
$P_{n+1}\ (a, 1)=a$;
$P_{n+1}\ (a, x+1)=P_n\ (a, P_{n+1}\ (a, x))$.

Растут функции P_n крайне быстро. Например, при $n=3$ имеем:

$P_3\ (a, 0)=1$; $P_3\ (a, 1)=a$; $P_3\ (a, 2)=a^a$; $P_3\ (a, 3)=a^{a^a}$.

Введем новые функции:

$B\ (n, x)=P_n\ (2,x)$, $A(x)=B\ (x, x)$.

B (n, x) - функция Аккермана, A(x) – диагональная функция Аккермана

Рекурсивное определение функции Аккермана. ЧРФ

$B(0, x)=2+x$,
$B(n+1, 0)=sg(n)$,
$B(n+1, x+1)=B(n,B(n+1, x))$

Для любой примитивно-рекурсивной функции $f(x)$ найдется такое n , что для любого $x \geq n$, $A(x)>f(x)$

Неограниченный μ - оператор:

$f(x_1,\dots,x_n)=\mu_y(P(x_1,\dots, x_n,y))$

Пример неопределенности функции, вычисляемой с помощью оператора минимизации:

$f(x)=x-1=\mu_y(y+1=x)$ не определена при $x=0$