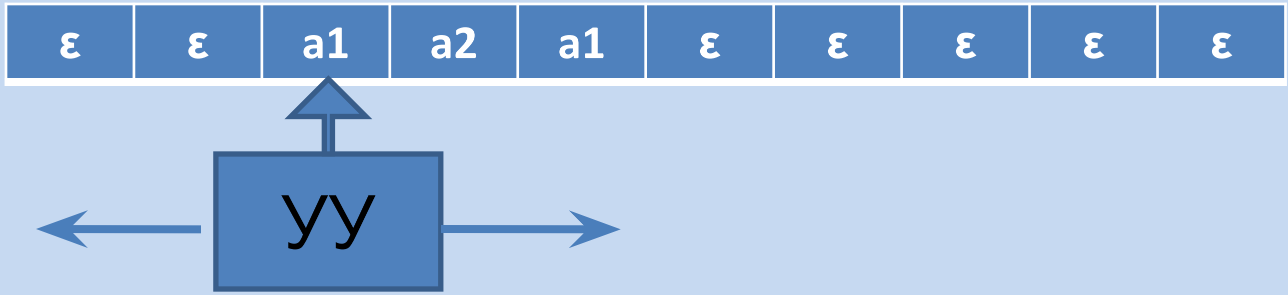
Модуль 2.

Машина Тьюринга как формальная модель алгоритма. Тезис Тьюринга

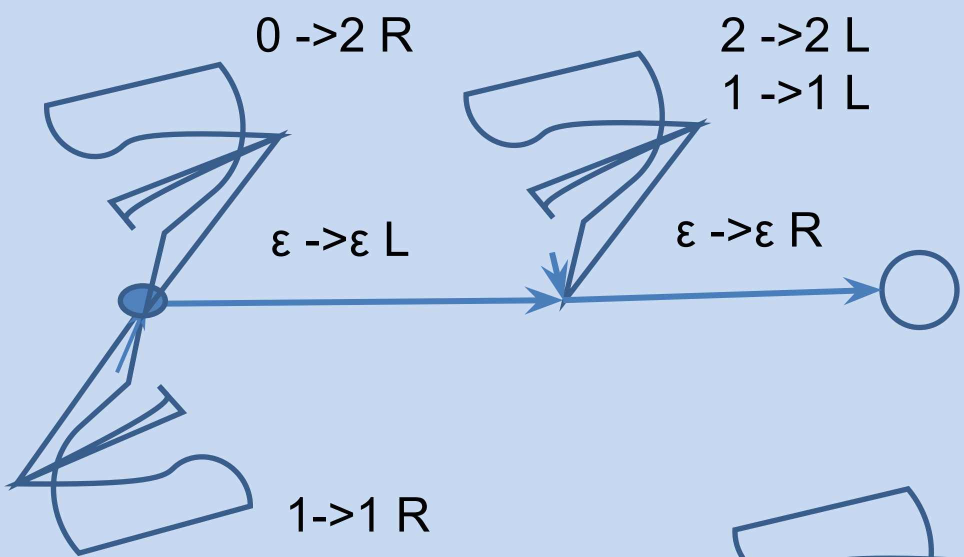
Неформальное и формальное определение МТ. Конфигурации.



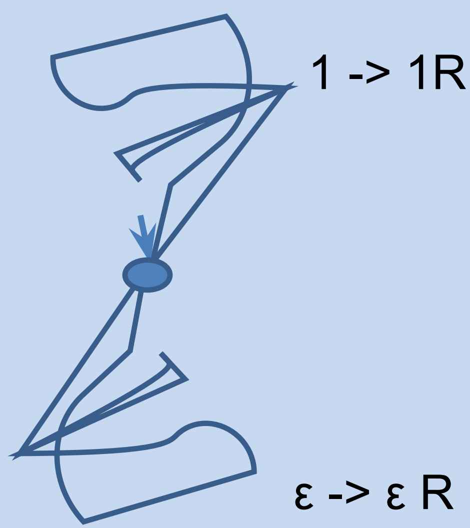
Конечное множество состояний УУ: $Q=\{q_1,\ldots, q_n\}$.
Алфавит: $\Sigma= \{a_1,\ldots,a_m\}$.
Формальное определение: $МТ=(Q,\Sigma,\delta,q_0,q_z,a_0,a_r)$
Команда МТ: $q_i\ a_j \rightarrow q'_i\ a'_j\ S$ *(S – направление сдвига :*L – влево ,R - вправо, E-на месте)
Конфигурации: *__произвольная__* - $\alpha_1\ q_i \alpha_2$, *__стандартная начальная__* $q_0\alpha$, *__стандартная заключительная__* $q_z\alpha$
Переходы: непосредственный $K \rightarrow K'$.
Если для K_1 и K_n существует последовательность конфигураций $K_1, K_2, \ldots, K_n$, такая, что $K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \ldots \rightarrow K_n$, то обозначим переход $K_1 \Rightarrow K_n$.

Примеры простейших машин Тьюринга

Дана цепочка из символов 0 и 1. Все нули заменить на 2.



Машина, работающая бесконечно на цепочке из 1:



Переработка цепочек. Вычислимость по Тьюрингу.

Если $\alpha_1\ q_0\ \alpha_2 \Rightarrow \beta_1\ q_z\ \beta_2$, то будем говорить, что машина T перерабатывает слово $\alpha_1\ \alpha_2$ в слово $\beta_1\beta_2$, и обозначать это $T(\alpha_1\alpha_2) = \beta_1\beta_2$.

Унарный код:

x единиц $1\ldots1 = 1^x$, $\varepsilon=0$.

$q_0\ 1^{x1}\ {}_*1^{x2}\ {}_*\ \ldots\ {}_*\ 1^{xn} \Rightarrow q_z 1^y$, когда $f(x_1, \ldots, x_n) = y$, *и работает бесконечно, начиная со стандартной начальной конфигурации, если* $f(x_1,\ldots,x_n)$ не определена.

Примеры:функций, вычислимых по Тьюрингу: сложение чисел , копирование.

Вычислимость композиции

<u>Композиция</u> $g(x) = f_2(f_1(x))$

T_1 *и* T_2 *- машины, вычисляющие* f_1 *и* f_2 *:*

$Q_1 = \{q_{10}, \ldots, q_{1n}\}$ и $Q_2 = \{q_{20}, \ldots, q_{2n}\}$

Граф машины T: $q_{20} = q_{1z}$ *.* Начальное состояние T - q_{10}, заключительное – q_{2z}.

Пусть $f_2(f_1(x))$ определена. Тогда $T_1(1^x) = 1^{f1(x)}$ и $q_{10}1^x \Rightarrow q_{1z}1^{f1(x)}$.

Машина T:

вместо $q_{1z}1^{f1(x)}$ она перейдет в $q_{20}1^{f1(x)}$.

Машина T_2: $q_{20}1^{f1(x)} \Rightarrow q_{2z}1^{f2(f1(x))}$.

Машина T: $q_{10}1^x \Rightarrow q_{20}1^{f1(x)} \Rightarrow q_{2z}1^{f2(f1(x))}$ и, следовательно, $T(1^x) = 1^{f2(f1(x))}$.

Вычислимость на полуленте и с восстановлением

df Говорят, что T *вычисляет предикат P(α)*, если T(α) = ω, где ω = T, когда P(α) истинно, и ω = F, когда P(α) ложно.
df Говорят, что машина T *вычисляет* P(α) *с восстановлением*, если T(α) = ωα.

Доказательство теоремы о вычислимости с восстановлением:
$q_0\alpha \Rightarrow q_{n1}\,\alpha_*\alpha \Rightarrow \alpha\,{*q_{n2}}\,\alpha \Rightarrow \alpha\,{}_*q_{n3}\,\omega \Rightarrow q_{n4}\,\omega\alpha.$

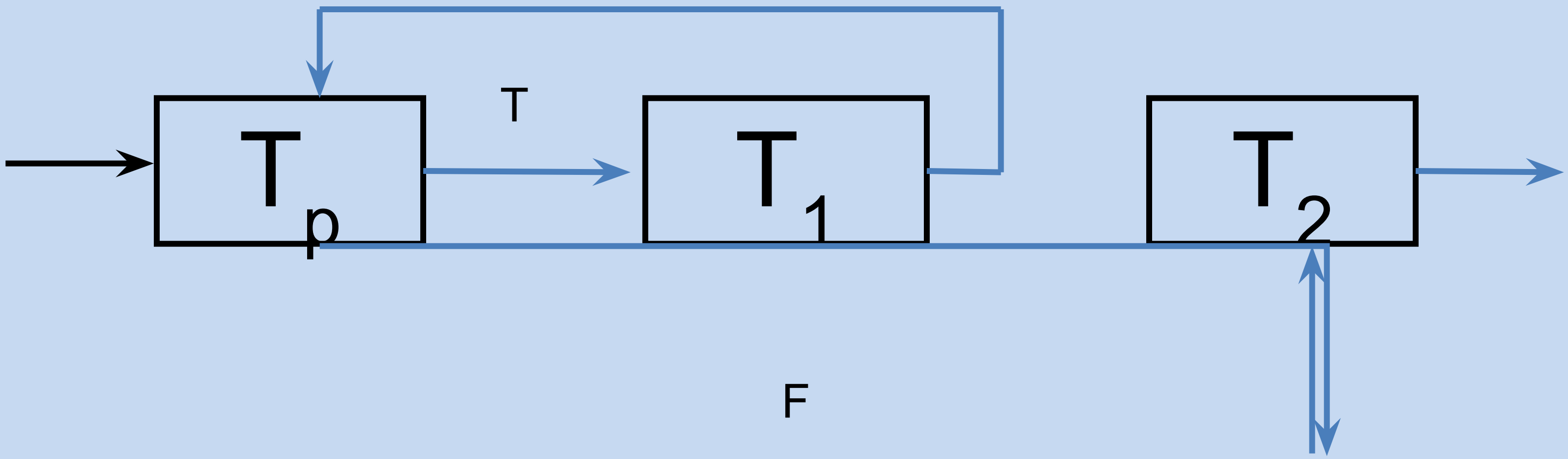
Вычислимость разветвления

Теорема. Если функции $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ и предикат P(α) вычислимы по Тьюрингу, то разветвление $g_1(\alpha)$ и $g_2(\alpha)$ по P(α) также вычислимо.

Доказательство. Пусть T_1 – машина с состояниями $q_{10}, q_{11}, \ldots, q_{1n}$ и системой команд , вычисляющая g_1, T_2 – машина с состояниями $q_{20}, q_{21}, \ldots, q_{2n}$ и системой команд , вычисляющая g_2; T_p вычисляет с восстановлением P(α). Тогда машина *T*, вычисляющая разветвление g_1 и g_2 по P, - это композиция T_p и машины T_3, система команд которой имеет следующий вид:

$$\sum_3 = \sum_1 \cup \sum_2 \cup \{q_{30}T \to q_{10}\varepsilon R, q_{30}F \to q_{20}\varepsilon R, q_{1z} \to q_{2z}E\}.$$

Вычислимость повторения



$$\sum\nolimits_3 = \sum\nolimits_1 \cup \sum\nolimits_2 \cup \{q_{30}T \to q_{10}\varepsilon R, q_{30}F \to q_{20}\varepsilon R, q_{1z} \to q_{p1}E\}.$$