ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Раздел. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

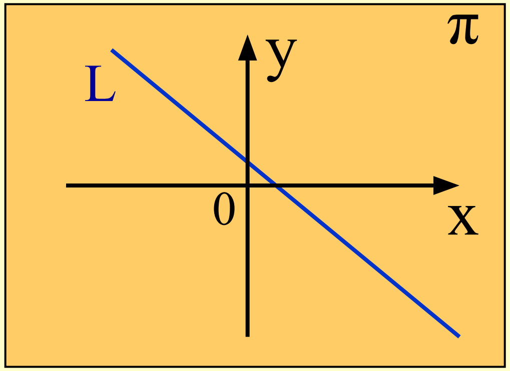
посвящен всестороннему изучению линий на плоскости, плоскостей и линий в пространстве.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Общее уравнение прямой на плоскости.
2. Канонические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.
3. Прямая с угловым коэффициентом.
4. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.
5. Параметрические уравнения прямой.
6. Нормированное уравнение прямой.
7. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

1. Общее уравнение прямой на плоскости.

Докажем, что если на плоскости π фиксирована произвольная декартова прямоугольная система Оху, то всякое уравнение 1-ой степени с двумя переменными х и у определяет относительно этой системы прямую линию.



Пусть фиксирована произвольная декартова прямоугольная система 0ху и задано уравнение 1-ой степени:

$$\mathbf{Ax+By+C=0} \quad (1).$$

Это уравнение заведомо имеет хотя бы одно решение $(x_0;y_0)$:

$$\mathbf{Ax_0+By_0+C=0} \quad (2).$$

Вычитаем (1)-(2), получаем:

$$\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \quad (3).$$

Уравнение (3) эквивалентно уравнению (1).

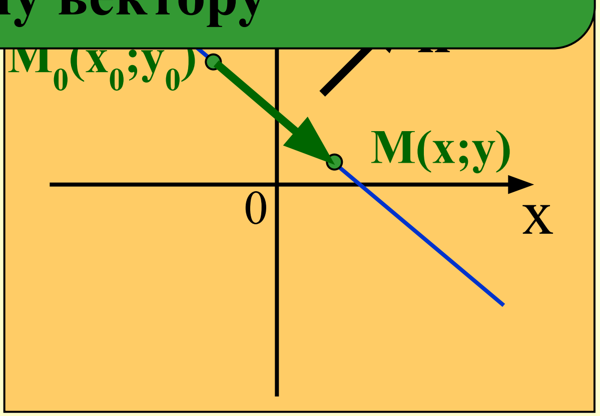
1. Общее ура

уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Докажем, что уравнение

$$\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \quad (3)$$

определяет прямую L, проходящую через точку M_0 $(x_0;y_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{n}=\{A;B\}$.



Пусть точка M (x;y) лежит на указанной прямой, тогда векторы $\vec{n}=\{A;B\}$ и $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ ортогональны и их скалярное произведение равно нулю (т.е., $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$): $\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.}$

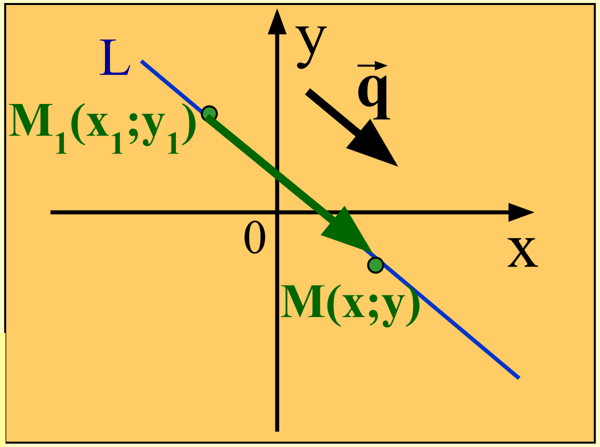
Уравнение $\mathbf{Ax+By+C=0}$ (1) с произвольными коэффициентами A, B и C такими, что $A\neq0$ и $B\neq0$ одновременно, называется **<u>общим уравнением прямой</u>**.

Мы доказали, что прямая, определяемая общим уравнением (1), ортогональна к вектору $\vec{n}=\{A;B\}$. Этот вектор называется **<u>нормальным</u>**.

2. Канонические уравнения прямой.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть **направляюшим** вектором этой прямой.

Задача. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1;y_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q}=\{l;m\}$.



Пусть точка M (x;y) лежит на указанной пря-мой, тогда векторы $\vec{q}=\{l;m\}$ и $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1\}$ коллинеарны, т.е. координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$

Заметим, что в каноническом уравнении (4) один из знаменателей l или m может оказаться

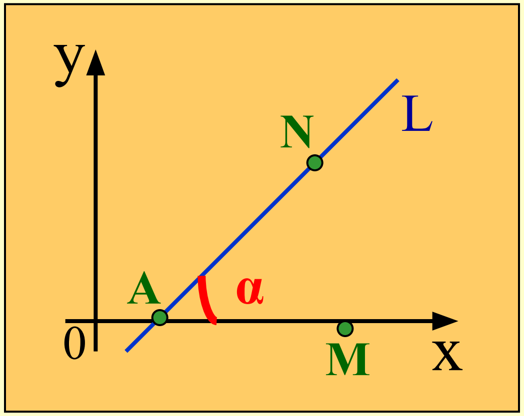
Аналогично определяются канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку пространства M_1 $(x_1;y_1;z_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q}=\{l;m;n\}$:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

(5) - **канонические ур-ия прямой в простр-ве**.

3. Прямая с угловым коэффициентом.

Если прямая параллельна оси 0x или совпадает с ней, то угол наклона этой прямой к оси 0x будем считать равным 0.



Тангенс угла наклона прямой к оси 0x назовем **угловым коэффициентом** этой прямой: **$k=\mathrm{tg}\alpha$**.

Для прямой ‖-ой оси 0x: **$k=0$**.

Для прямой ⊥-ой оси 0x: **$k=\infty$**

…щую по ту сторону от … прямой произвольную

Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1;y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k.

***Утверждение*.** Если прямая не п… ляющий вектор $\vec{q}=\{l;m\}$, то угловой…

Уравнение (7) – **уравнение прямой с угловым коэффициентом**.
b - представляет собой величину отрезка, отсекаемого данной прямой на оси 0y, начиная от начала координат.

Для того, чтобы вывести уравнени… точку $M_1(x_1;y_1)$ и имеющей заданн… обе части канонического уравнения (4) на m и учтем, что $m/l=k$.

Получим: $y-y_1=k(x-x_1)$; **$y=kx+b$ (7)**, $b=y_1-kx_1$.

4. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть даны две точки:

$M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$

Ур-ия прямой, проходящие через две данные точки, имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (8)$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Для их получения достаточно заметить, что прямая проходит через точки:

$M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$

и имеет направляющий вектор:

$\overline{q}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$

$\overline{q}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$

и воспользоваться каноническими уравнениями.

5. Параметрические уравнения прямой.

Получаются из канонического уравнения. Примем за параметр t каждое из отношений в канонических уравнениях ($-\infty<t<\infty$).

Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt. \end{cases} \qquad (9) \qquad \begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + nt. \end{cases}$$

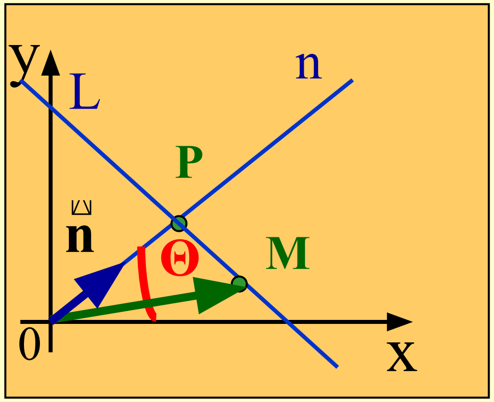
Интерпретация. Если считать, что параметр t – это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения (9) определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью

$$V = \sqrt{l^2 + m^2} \qquad V = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

(такое движение происходит по инерции).

6. Нормированное уравнение прямой.

Рассмотрим какую угодно прямую L. Проведем через начало координат прямую **n** $\perp$ L, обозначим буквой P точку пересечения указанных прямых. На прямой **n** возьмем единичный вектор $\vec{n}$, направление которого совпадает с направлением отрезка OP.



Цель: выразить уравнение прямой L через два параметра: 1) длину p отрезка OP; 2) угол Θ между вектором $\vec{n}$ и осью 0x.

Так как $\vec{n}$ – единичный вектор, то его координаты, соответственно равные его проекциям на оси координат, имеют вид: **n** …

Очевидно, что точка M(x;y) лежит на расс… …ько тогда, когда проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось, … , т.е.

. $\mathbf{np}_{n}\,\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{p}$

Это и есть искомое уравнение прямой L, выраженное через два параметра: **Θ** и **p.** Это уравнение называется **нормированным уравнением прямой.**

Так как $\vec{n}$ – единичный вектор, то в силу определения скалярного произведения:

$$np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\vec{n}|} = x\cos\Theta + y\sin\Theta = p \quad .$$

Следовательно, точка M(x;y) лежит на прямой L тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют уравнению: **$x\cos\Theta + y\sin\Theta - p = 0$ (10)**

7. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Пусть две прямые заданы своими ***каноническими уравнениями***:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1} \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$$

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Задача определения угла между этими прямыми сводится к определению угла φ между их направляющими векторами $\vec{q}_1=\{l_1;m_1\}$ и $\vec{q}_2=\{l_2;m_2\}$ $\qquad$ $\vec{q}_1=\{l_1;m_1;n_1\}$ и $\vec{q}_2=\{l_2;m_2;n_2\}$:

(11)

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Условие ‖-ти эквивалентно условию коллинеарности $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, заключается в пропорциональности координат:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2} \qquad \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

Условие ⊥-ти: $\overrightarrow{q_1}\cdot\overrightarrow{q_2}=0$ =>

$$l_1l_2+m_1m_2=0 \qquad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

7. Угол между двумя прямыми.7. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и

Пусть две прямые заданы ***общими уравнениями*** $\mathbf{A_1x+B_1y+C_1=0}$ и $\mathbf{A_2x+B_2y+C_2=0}$. Так как нормальными векторами этих прямых являются соответственно векторы $\vec{n}_1=\{A_1;B_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2;B_2\}$, то задача об определении угла между прямыми сводится к определению cosφ между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (12)$$

- Условие ∥-ти прямых эквивалентно условию коллинеарности векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е.:

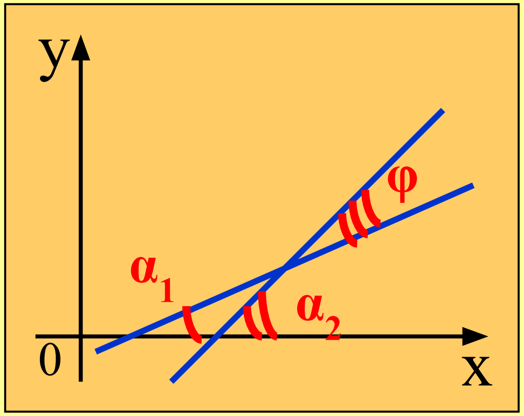
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

- Условие ⊥-ти прямых может быть получено из (12) (cosφ=0):

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

7. Угол между двумя прямыми.7. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и

Пусть две прямые заданы ***уравнениями с угловыми коэффициентами*** $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.



$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$$

$$tg\varphi = tg(\alpha_2-\alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

- Условие ‖-ти прямых: $k_1=k_2$

- Условие ⊥-ти прямых: tgφ не существует, т.е.

$$1+k_1k_2=0 \Rightarrow k_2=-1/k_1$$

БЛАГОДАРИМ ЗА ВНИМАНИЕ!

Прямую линию в пространстве являющуюся линией пересечения двух различных и не параллельных плоскостей, определяемых уравнениями можно задать двумя уравнениями этих плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

<u>Замечание</u>. Для того, чтобы плоскости, определяемые уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ не совпадали и не были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы нарушалась хотя бы одна из пропорций: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Канонические уравнения прямой в пространстве.

Выведем уравнения прямой, проходящей через данную точку пространства M_1 $(x_1;y_1;z_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q}=\{l;m;n\}$. Заметим, что точка $M(x;y;z)$ лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}=\{l;m;n\}$ и $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$ коллинеарны: $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ (6)-канонические уравнения.

Отклонение точки от прямой.

Правило: для нахождения отклонения δ точки $M(x_0;y_0)$ от прямой L следует в левой части нормированного уравне-ния прямой L подставить на место x и y координаты x_0 и y_0 точки M.

Это правило позволяет отыскать и *расстояние* от точки M до прямой L, ибо расстояние равно |δ|.

Укажем ***алгоритм приведения общего уравнения прямой к нормированному виду***: для приведения общего уравнения прямой Ax+By+C=0 к нормальному виду следует умножить его на нормирующий множитель , знак которого противополо-жен знаку с.

$$\mathbf{t=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Доказательство. Спроектируем точку M на ось, определяемую вектором $\vec{n}$. Пусть Q проекция точки M. Отклонение δ точки M от прямой L равно PQ:

$$\mathbf{\delta=PQ=OQ-OP=OQ-p,}$$

$$\mathbf{OQ=пр_n OM=x\cos\Theta+y\sin\Theta,}$$

$$\mathbf{\delta=x\cos\Theta+y\sin\Theta-p.}$$