Курс лекций по алгебре и геометрии

Голодная Наталья Юрьевна

Содержание

Определители

- Рассмотрим таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – это

элементы таблицы.

$$a_{ij}$$

i – номер строки;

j – номер столбца

- Число строк – порядок таблицы.

- Главная диагональ – диагональ идущая с левого верхнего угла в правый нижний.

- Побочная диагональ – диагональ идущая с верхнего правого угла в левый нижний.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

побочная

главная

- **Выражение**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

называется определителем 2-го

порядка .

Определители третьего порядка

- Рассмотрим таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Выражение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

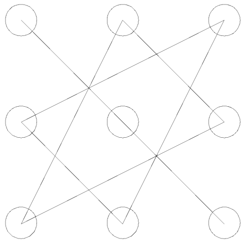
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

называется определителем третьего порядка

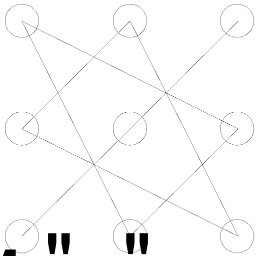
Методы вычисления определителей третьего порядка

Правило треугольника

Три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников:



берутся со знаком "**+**", а три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух других треугольников:



берутся со знаком "**−**".

Разложение по элементам какой-либо строки (столбца)

Минор

Опр. Минором элемента определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, получающийся из данного определителя вычёркиванием строки и столбца, в которых расположен элемент.

Обозначение минора

Минор элемента , стоящего на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца определителя, обозначают

$$M_{ij}$$

Алгебраическое дополнение

Опр. Алгебраическим дополнением элемента определителя 3-го порядка называется минор этого элемента, умноженный на (-1) в степени k , где

$$k = i + j.$$

$$A_{ij} = (-1)^{k} M_{ij}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Теорема разложения

Определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения.

Таким образом, имеет место шесть разложений:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

$$\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23},$$

$$\Delta = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33},$$

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31},$$

$$\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32},$$

$$\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Свойства определителей

1.Определитель не меняет своего значения при замене каждой строки соответствующим столбцом.

2.Определитель изменит знак ,если поменять местами любые две строки или столбца.

3.Общий множитель элементов какого-либо строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя.

4.Определитель равен нулю, если он имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки.

5.Определитель равен нулю, если элементы какой-либо строки (столбца) все равны нулю.

6. Значение определителя не изменится, если к элементам строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно число.

Определители высших порядков

Выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

называется определителем 4-го порядка

- С помощью свойства 6 добиваются того, чтобы в некоторой строке или в некотором столбце все элементы, кроме одного, были равны нулю.
- Затем раскладывают определитель по элементам этой строки или столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \; + \; =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ (-1)\\ +\end{matrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(6+8) = 28$$

+

+

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

(-2)

+

(-3)

+

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$
= 1 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 & 7 \\ -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ + \\ + \end{matrix}
$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} (-5) & 3 \\ \quad + & \\ 2 & \\ & + \\ & 2 \end{array} =$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 17 & -22 \\ 0 & 11 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 17 & -22 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot (68 + 242) = \frac{1860}{4} = 465$$

Метод приведения к треугольному виду

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании данного определителя, когда все элементы его, лежащие над (под) одной из его диагональю, становятся равными нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41}$$