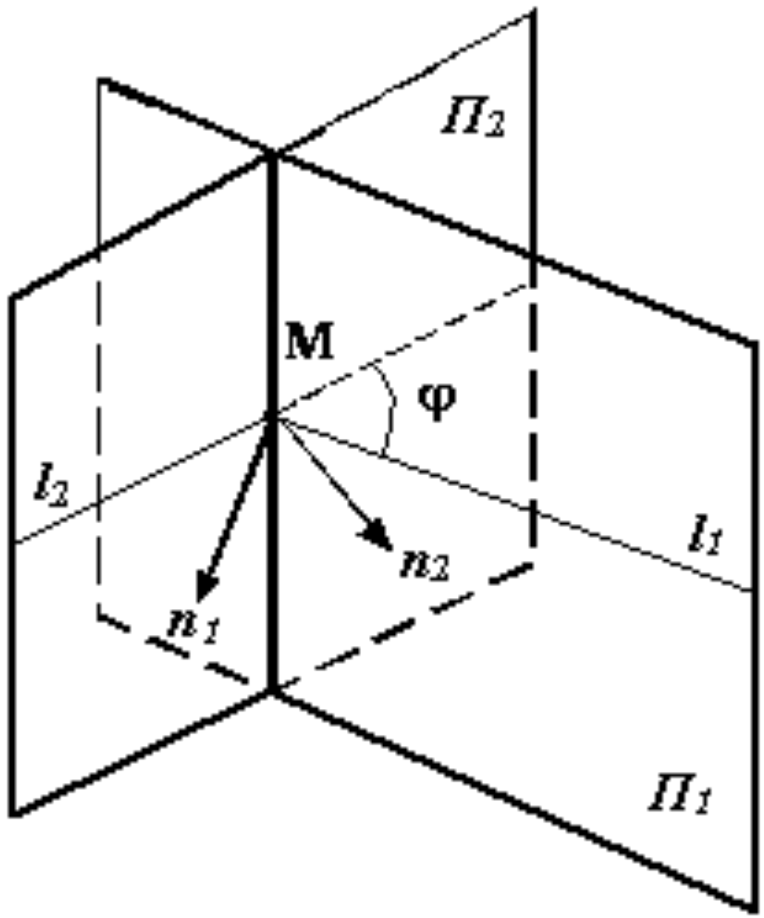
Прямая в пространстве

Общее уравнение прямой

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$$\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$$

$$\overline{n_1} \perp l; \overline{n_2} \perp l; \overline{S} \parallel l \Rightarrow \overline{n_1} \perp \overline{S}, \overline{n_2} \perp \overline{S}$$

$$\overline{S} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$$

$$\bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Канонические уравнения прямой

- Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{p} = \frac{z - z_o}{q}$$

Параметрические уравнения

$$x = mt + x_o,$$

$$y = pt + y_o,$$

$$z = qt + z_o$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Угол между прямыми

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{\left|\overline{a_1}\right| \cdot \left|\overline{a_2}\right|} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

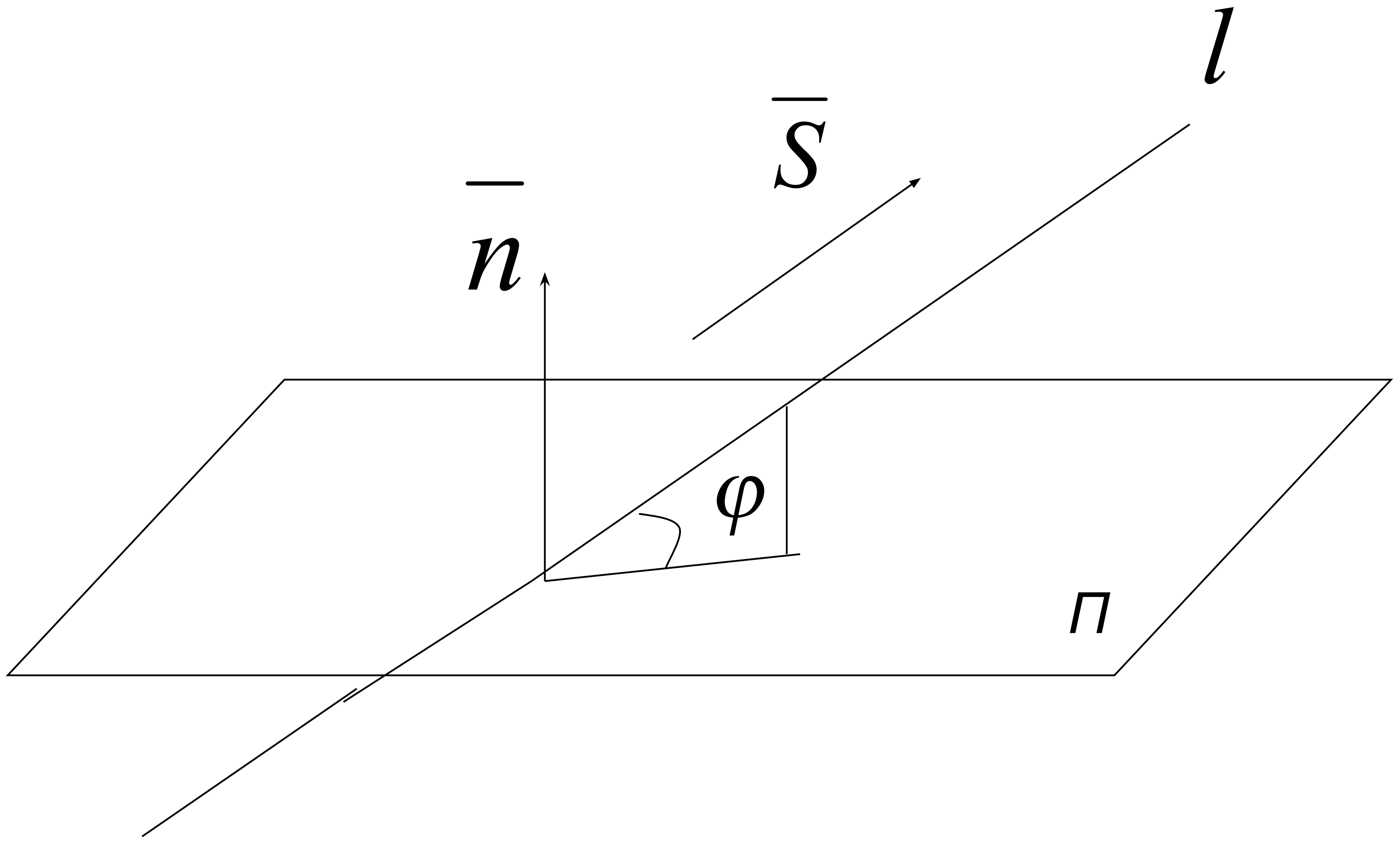
Параллельность прямых

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\overline{S_1} \parallel \overline{S_2} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2}.$

Перпендикулярность прямых

Если $\ell_1 \perp \ell_2$ то $\overline{S_1} \perp \overline{S_2} \Rightarrow \overline{S_1} \cdot \overline{S_2} = 0$

Угол между прямой и плоскостью



l
$\overline{S}$
$\overline{n}$
φ
П

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overline{n}\cdot\overline{S}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|} = \frac{\left|Am+Bp+Cq\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+p^2+q^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

Если $\square \parallel \Pi$, то $\bar{n} \perp \bar{S}$

$$Am + Bp + Cq = 0$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если $\boxtimes \perp \Pi$, то $\overline{n} \parallel \overline{S}$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$$