ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

ПЛОСКАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

Методические указания для практических занятий по теоретической механике

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток

2009

Содержание

1. Основные понятия и определения в вопросах и ответах

2. Момент пары сил

3. Примеры решения задач

4. Задачи для самостоятельного решения

1. Основные понятия в вопросах и ответах

1. Какая система сил называется плоской произвольной?

Плоской произвольной называется система сил, у которой линии действия сил лежат произвольно в одной плоскости, рис. 1

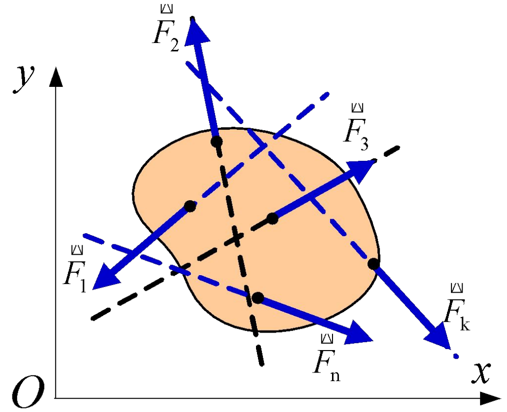


Рис. 1

2. К каким векторным величинам приводится плоская произвольная система сил?

В общем случае такая система сил может быть приведена к силе (главный вектор – $\vec{R}$) и паре (главный момент – $\vec{M}_O$) в любом центре приведения.

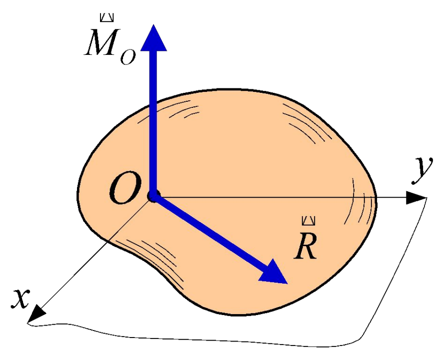


Рис. 2

3. Как направлены относительно друг друга главный вектор и главный момент плоской произвольной системы сил?

Главный вектор плоской произвольной системы сил лежит в плоскости действия сил, а главный момент перпендикулярен плоскости действия сил, рис. 2.

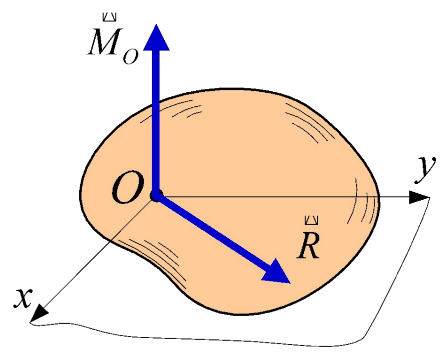


Рис. 2

4. Какие условия выполняются при равновесии тела под действием плоской произвольной системы сил?

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы сил относительно произвольного центра равнялись нулю.

$$\vec{R} = 0 \qquad M_O = 0.$$

$$\sum_{K=1}^{n} \vec{F}_k = 0; \quad \sum_{K=1}^{n} m_O\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

5. Какие уравнения равновесия можно составить для плоской произвольной системы сил?

Из условий равновесия плоской произвольной системы сил можно получить уравнения равновесия в трёх различных формах:

а)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

б)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0;$$

в)

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0. \quad \sum_{k=1}^{n} m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

6. Какие уравнения равновесия чаще всего используются на практике?

На практике чаще всего используются уравнения в форме а).

а)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

При использовании уравнений равновесия плоской произвольной системы сил надо иметь в виду, что оси x, y в форме а) располагаются произвольно, но, как правило, используются взаимно-перпендикулярные оси;

б)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0;$$

точки *A* и *B* в форме б) произвольны и *AB* не перпендикулярна оси *Ox*;

в)

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

точки A, B и C в форме в) не лежат на одной прямой.

7. Что характеризует момент силы относительно точки?

Момент силы относительно точки (полюса, центра) – это физическая величина, характеризующая меру вращательной способности данной силы относительно точки (полюса, центра).

8. Что называется плечом силы относительно точки?

Плечом силы относительно точки называют расстояние от точки до линии действия силы. (Расстояние от точки до линии действия силы – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.)

9. Чему равен момент силы относительно точки?

Для сил, лежащих в одной плоскости, момент каждой силы относительно выбранной точки на этой плоскости равен произведению модуля силы на её плечо, взятому со знаком «плюс» или «минус».

10. Какое правило знаков применяется для моментов сил относительно точки?

Установлено следующее правило для моментов сил: моменту присваивается знак «+», если сила стремится вращать тело относительно данной точки против хода часовой стрелки, в противном случае присваивается знак «–».

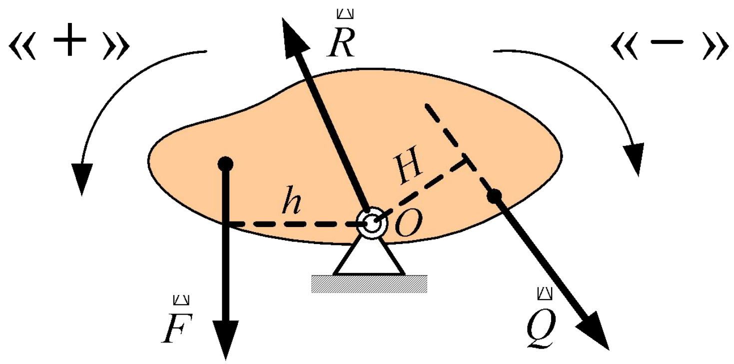


Рис. 3

Момент силы относительно точки обозначается так:

$$m_O\left(\vec{F}\right)$$

где m – операция вычисления алгебраического момента; нижний индекс O – точка, относительно которой определяется момент.

11. С учётом выше изложенного, найдите моменты сил, изображённых на рис. 3.

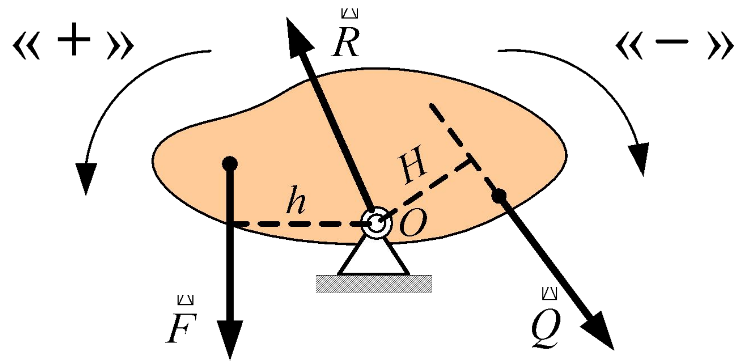


Рис. 3

Моменты силы на рис. 3 относительно точки O равны:

$$m_O\left(\vec{F}\right) = +F \cdot h;\ \ m_O\left(\vec{Q}\right) = -Q \cdot H;\ \ m_O\left(\vec{R}\right) = 0.$$

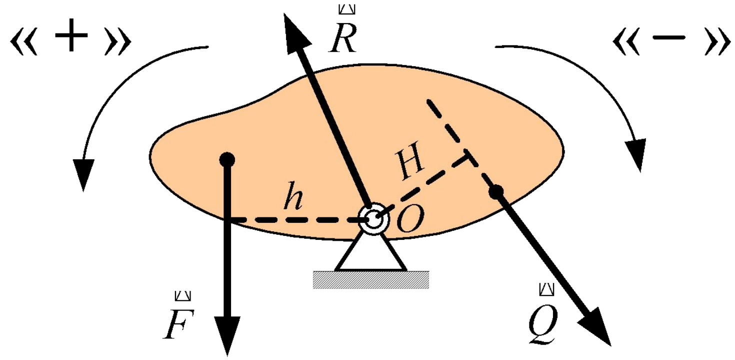


Рис. 3

12. Определите моменты силы $\vec{F}$ на рис. 4 относительно точек A и B.

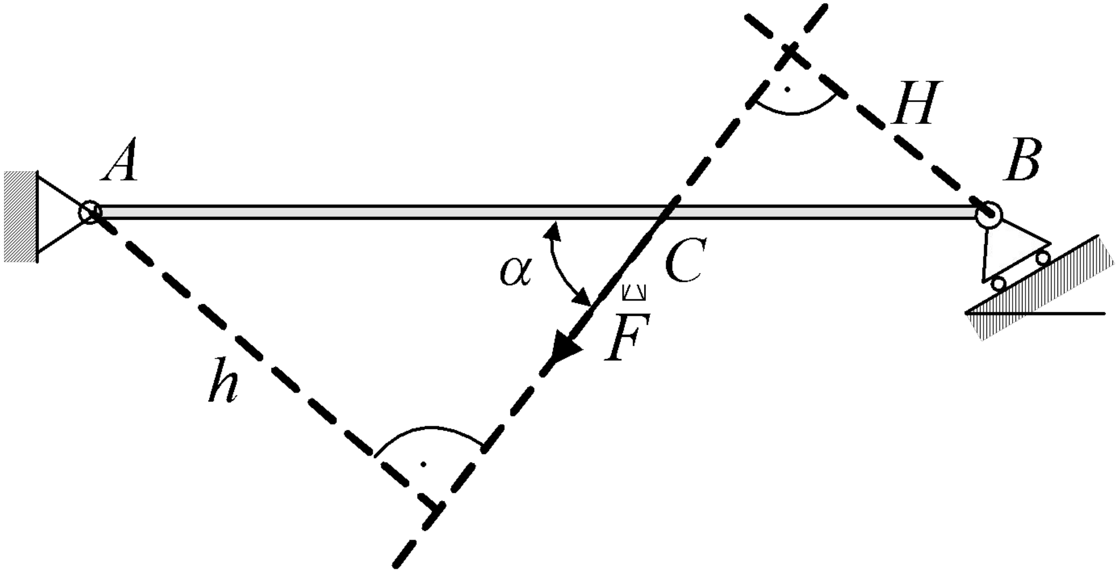


Рис. 4

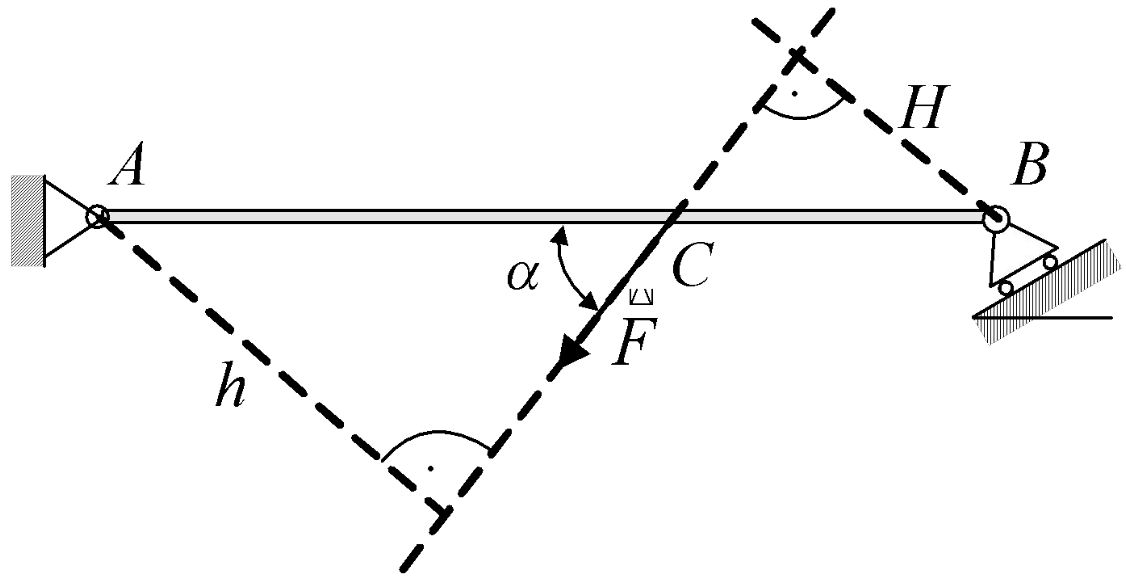


Рис. 4

Моменты силы $\vec{F}$ относительно точек A и B равны

$$m_A\left(\vec{F}\right) = -F \cdot h = -F \cdot AC \sin\alpha;$$

$$m_B\left(\vec{F}\right) = +F \cdot H = +F \cdot BC \sin\alpha.$$

13. Как формулируется теорема Вариньона?

Во многих случаях момент силы удобнее определять, применяя теорему Вариньона. Согласно этой теореме **момент любой силы относительно какой-либо точки равен алгебраической сумме моментов составляющих этой силы относительно той же точки.**

Порядок применения теоремы Вариньона для определения момента произвольной силы относительно центра O следующий:

1) разложить вектор силы по двум направлениям (обычно взаимно-перпендикулярным), вдоль принятых координатных осей;

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y.$$

2) определить момент данной силы относительно точки как алгебраическую сумму моментов составляющих:

$$m_O\left(\vec{F}\right) = m_O\left(\vec{F}_x\right) + m_O\left(\vec{F}_y\right).$$

14. Определите момент силы $\vec{F}$, применяя теорему Вариньона на рис. 5.

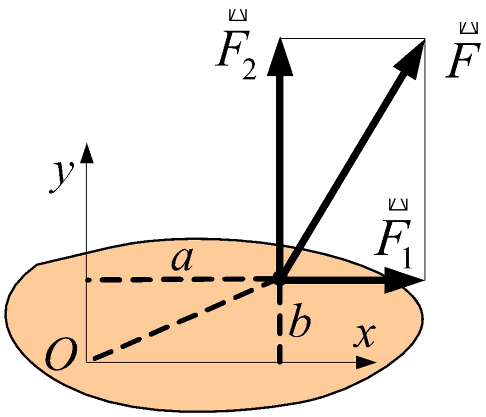


Рис. 5

Момент силы равен:

$$m_O\left(\vec{F}\right) = F_2\, a - F_1\, b.$$

Второй вариант применения теоремы Вариньона показан на рис. 6:

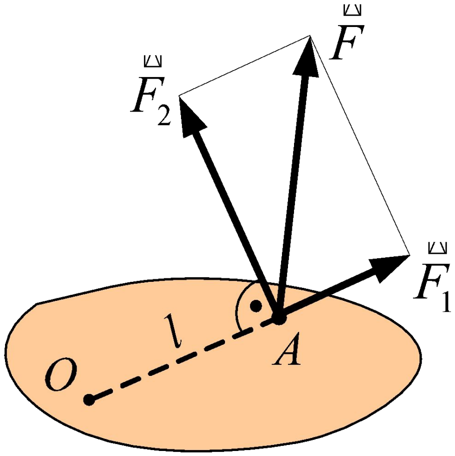


Рис. 6

$$m_O\left(\vec{F}\right)=m_O\left(\vec{F}_1\right)+m_O\left(\vec{F}_2\right)=m_O\left(\vec{F}_2\right)=F_2\, l.$$

Рассмотрим пример использования теоремы Вариньона для тела, показанного на рис. 7. Пусть известны значения *a, в, c, d, α, F* и требуется подсчитать момент этой силы относительно центра *A*.

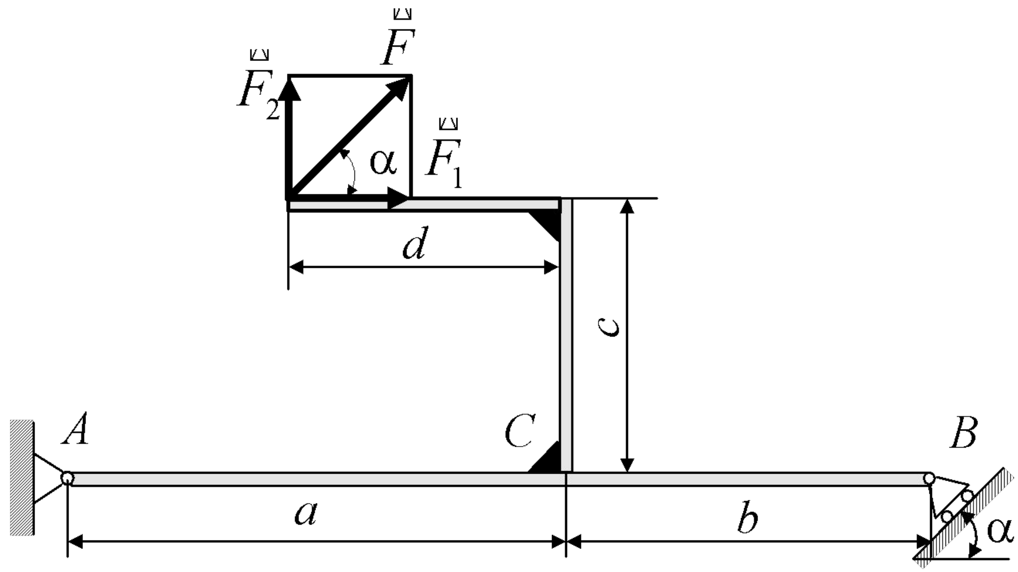


Рис. 7

Разложим вектор на составляющие

$$\vec{F}_1 \text{ и } \vec{F}_2$$

где

$$F_1 = F\cos\alpha,\ F_2 = F\sin\alpha.$$

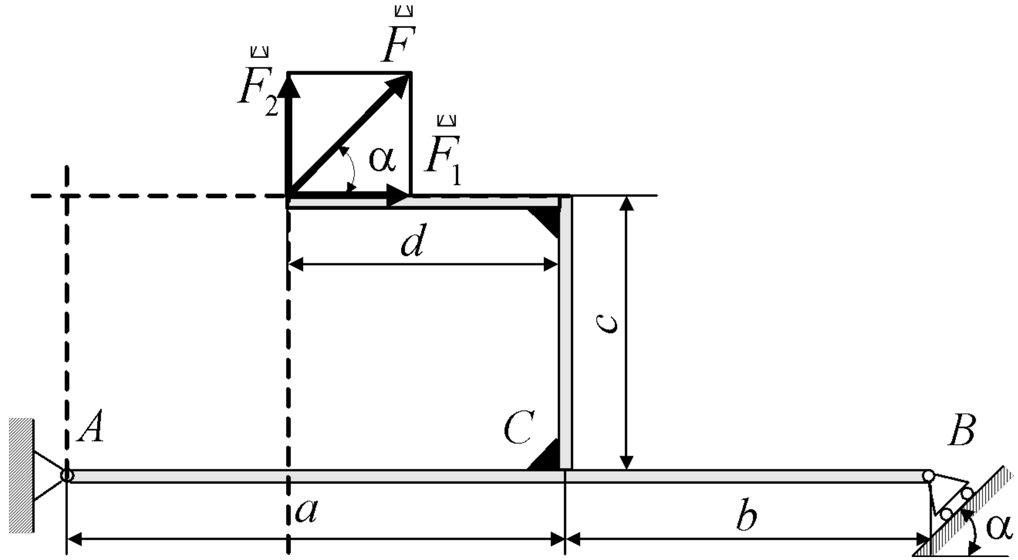


Рис. 7

Применяя теорему Вариньона, получим

$$m_A\left(\vec{F}\right) = m_A\left(\vec{F}_1\right) + m_A\left(\vec{F}_2\right) = -F_1 c + F_2\left(a - d\right) =$$

$$= -F\cos\alpha\, c + F\sin\alpha\left(a - d\right).$$

2. Момент пары сил

Парой сил называется совокупность двух численно равных, направленных в противоположные стороны сил, линии действия которых параллельны. Очевидно, что главный вектор пары сил равен нулю. Поэтому пара сил не даёт слагаемых в уравнения проекций. Она учитывается только в уравнении моментов. На чертеже изображение пары Вы можете встретить в одном из следующих видов, рис. 8:

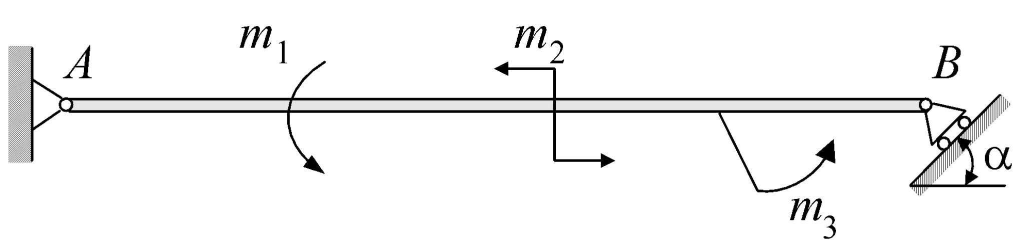


Рис. 8

Если рассматриваемое тело – абсолютно твёрдое, то точка приложения пары сил не имеет значения: её момент относительно любой точки в плоскости действия пары будет иметь одно и то же алгебраическое значение.

3. Примеры решения задач

Пример 1. Невесомая горизонтальная балка *AB* (рис. 9) опирается в точке *A* на цилиндрический шарнир, в точке *B* – на ломаный невесомый стержень *BCD*. К балке приложены: пара сил с моментом *m* и в точке *E* сосредоточенная сила *F*.

Определить реакции связей, наложенных на балку, если AB = 3 м; $AE = EB$; $BC = CD$; m = 5 кН м; F = 6 кН; $\alpha = 60^{\circ}$.

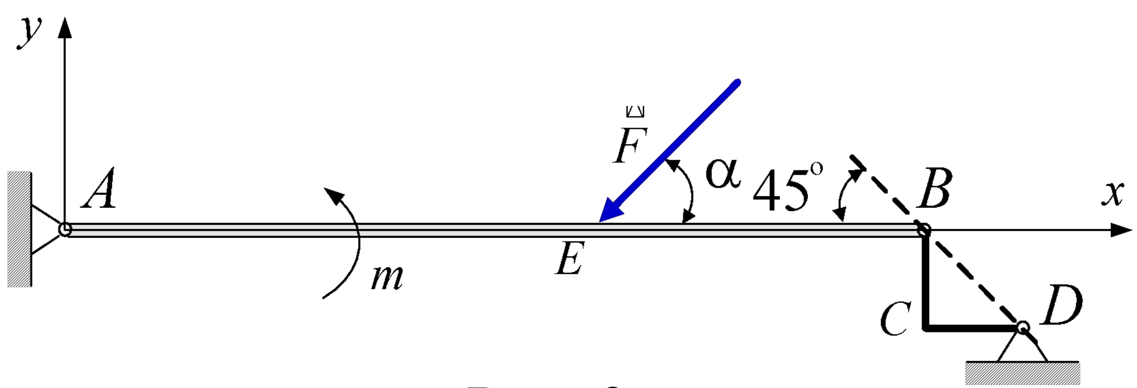


Рис. 9

1. Запишем краткое условие задачи.

Дано: $F = 6$ кН; $m = 5$ кН м; $AB = 3$ м; $AE = EB$; $BC = CD$; $\alpha = 60°$.

Определить: R_A, R_B.

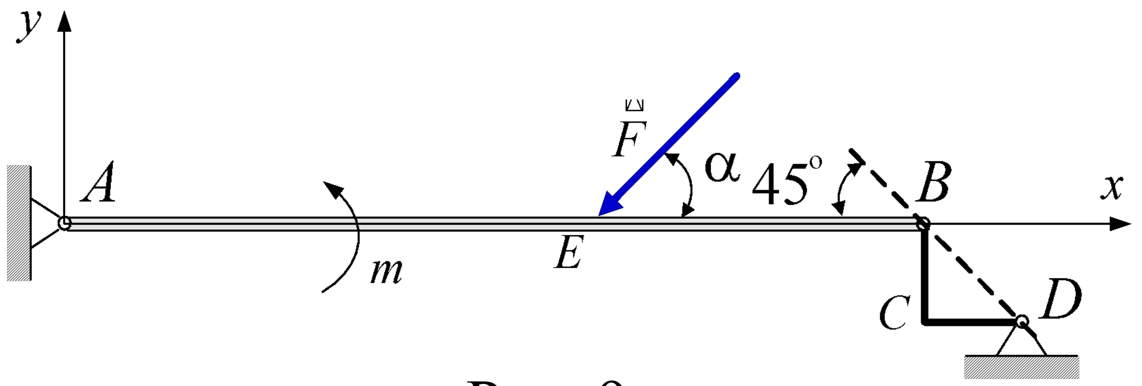
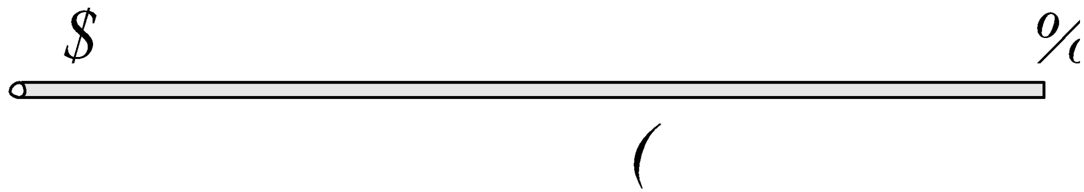


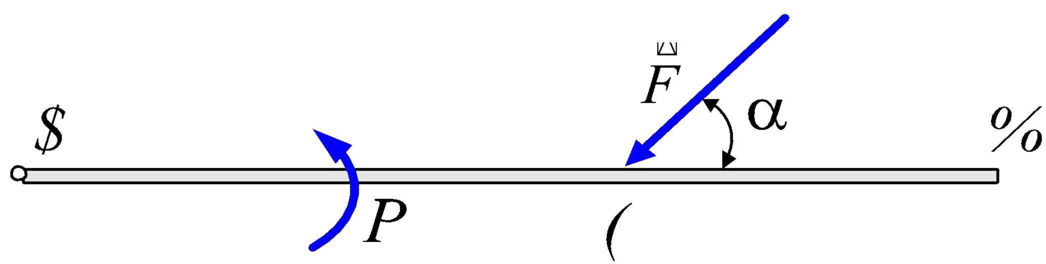
Рис. 9

2. Составим расчётную схему к задаче в следующей последовательности:

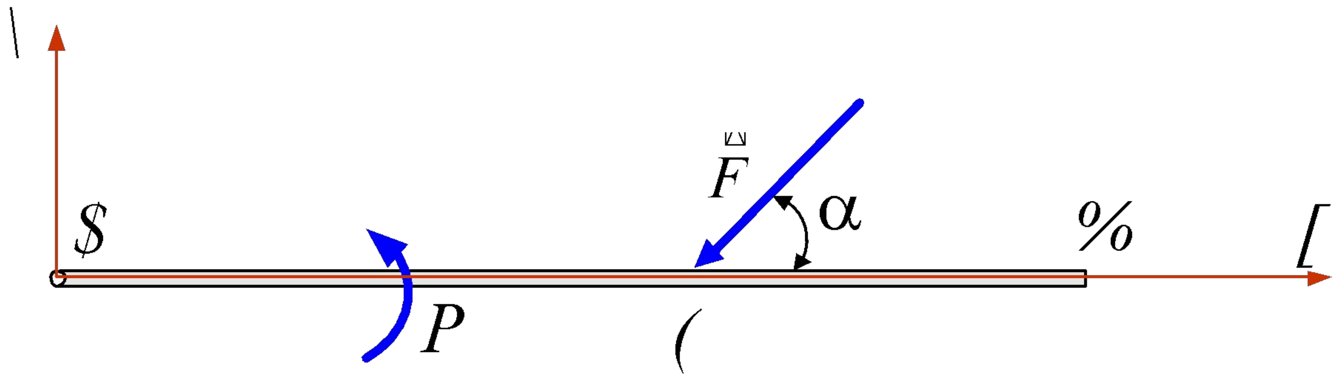
1) рассмотрим равновесие балки *AB*. Отбросим действующие на балку связи и изобразим её на рисунке;



2) покажем действующие на балку активные силы: силу *F* и пару сил с моментом *m*;



3) выберем систему взаимно-перпендикулярных осей координат *xAy*;



4) балка имеет две связи – шарнирно-неподвижную опору A и ломаный стержень BD; реакцию опоры A заменяем двумя составляющими X_A, Y_A ; реакция ломаного стержня R_B проходит по линии, соединяющей точки закрепления стержня BD; предположим, что она направлена от B к D. В результате на рис. 10 видим расчётную схему задачи:

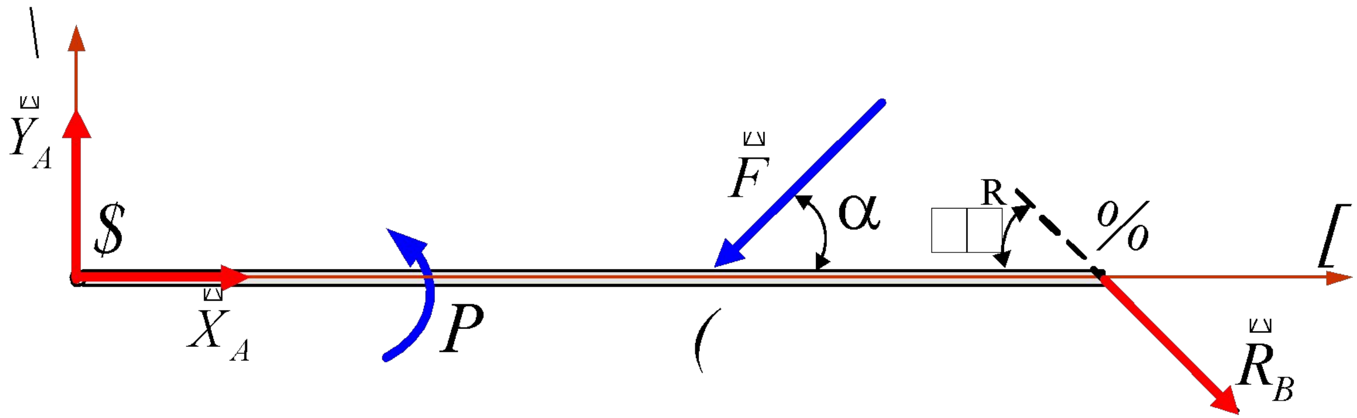


Рис. 10

Составим уравнения равновесия:

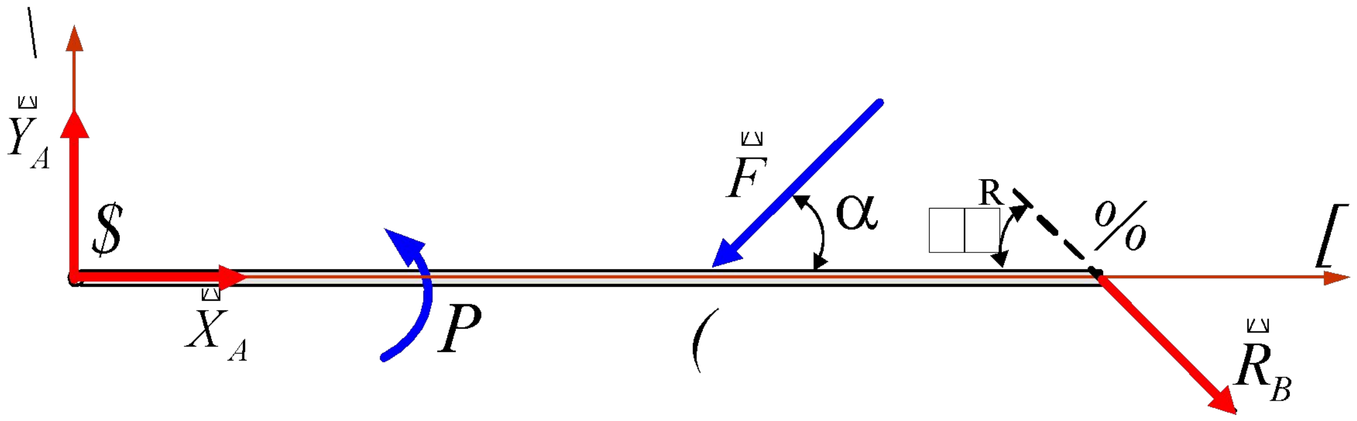


Рис. 10

Сумма проекций сил на ось x:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad X_A - F\cos\alpha + R_B \cos 45^{\circ} = 0;$$

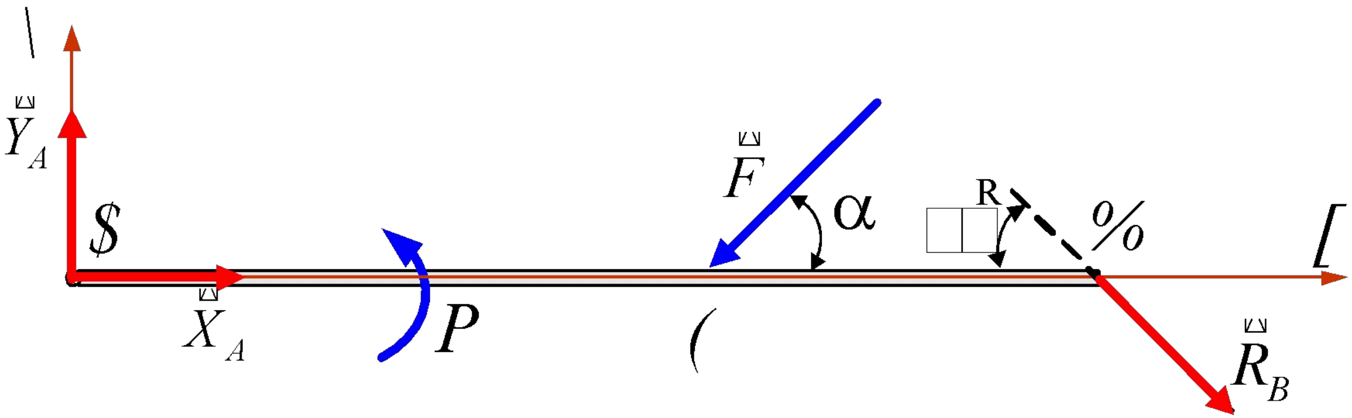


Рис. 10

Сумма проекций сил на ось *y*:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad Y_A - F\sin\alpha - R_B \sin 45^\circ = 0;$$

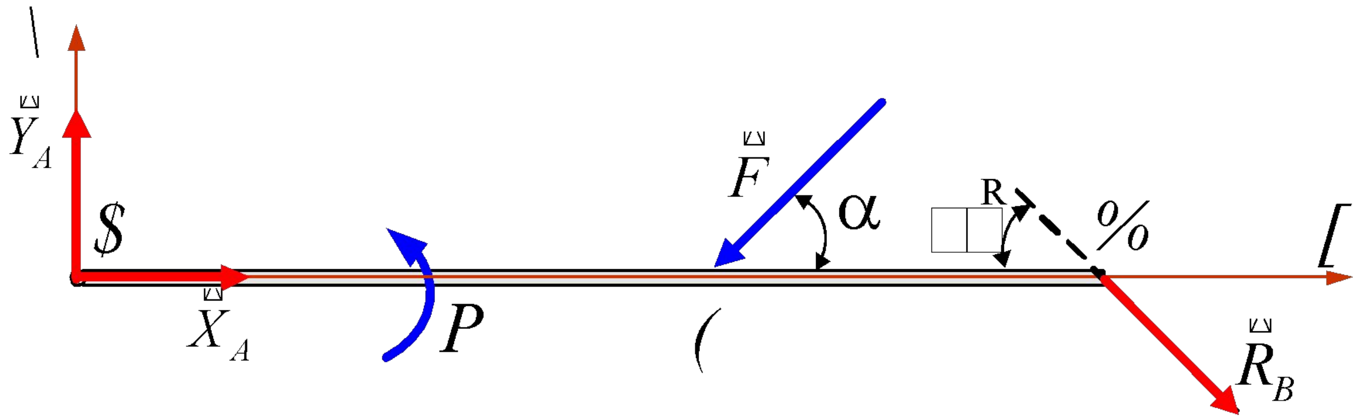


Рис. 10

Сумма моментов относительно точки A:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right)=0; \qquad m - F\left|AE\right|\sin\alpha - R_B\left|AB\right|\sin 45^{\circ} = 0.$$

Подставляя в уравнения равновесия данные из условия задачи, находим неизвестные реакции:

$$X_A - 6 \cdot 0{,}5 + R_B \cdot 0{,}707 = 0,$$
$$Y_A - 6 \cdot 0{,}866 - R_B \cdot 0{,}707 = 0,$$
$$5 - 6 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}866 - R_B \cdot 3 \cdot 0{,}707 = 0,$$

$$X_A - 3 + R_B \cdot 0{,}707 = 0;$$
$$Y_A - 5{,}2 - R_B \cdot 0{,}707 = 0;$$
$$-2{,}794 - R_B \cdot 2{,}121 = 0;$$

$$R_B = -\frac{2{,}794}{2{,}121} = -1{,}32;$$

$$X_A = 3 - R_B \cdot 0{,}707 = 3 + 1{,}32 \cdot 0{,}707 = 3{,}93;$$
$$Y_A = 5{,}2 + R_B \cdot 0{,}707 = 5{,}2 - 1{,}32 \cdot 0{,}707 = 4{,}27.$$

$X_A = 3{,}93$ кН; $Y_A = 4{,}27$ кН; $R_B = -1{,}32$ кН.

Для проверки результатов решения составим ещё одно уравнение моментов относительно произвольной точки C, по отношению к которой все найденные реакции опор балки дают моменты, отличные от нуля. Выберем точку C с координатами: $x_C = y_C = 1$ м.

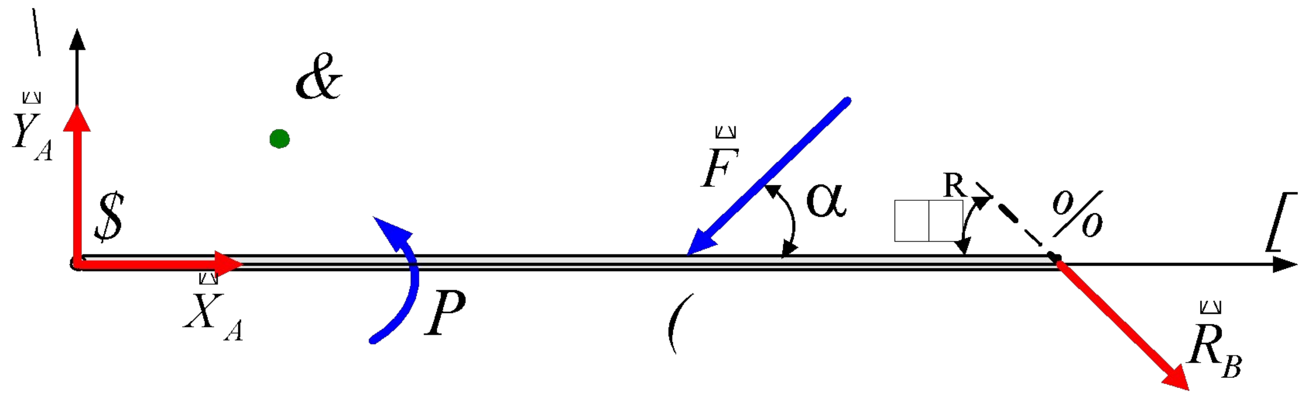


рис. 10

Тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} m_C\left(\vec{F}_k\right) = X_A \cdot 1 - Y_A \cdot 1 + m - F\cos\alpha \cdot 1 - F\sin\alpha \cdot 0,5 +$$

$$+R_B\cos 45^\circ \cdot 1 - R_B\sin 45^\circ \cdot 2 =$$

$$3,93 \cdot 1 - 4,27 \cdot 1 + 5 - 6 \cdot 0,5 \cdot 1 - 6 \cdot 0,866 \cdot 0,5 +$$

$$(-1,32) \cdot 0,707 \cdot 1 - (-1,32) \cdot 0,707 \cdot 2 = 0.$$

что подтверждает правильность решения задачи.

Пример 2. Пренебрегая весом крана ACD, определить реакции подпятника A и подшипника B, возникающие при равномерном подъёме груза P, рис. 11.

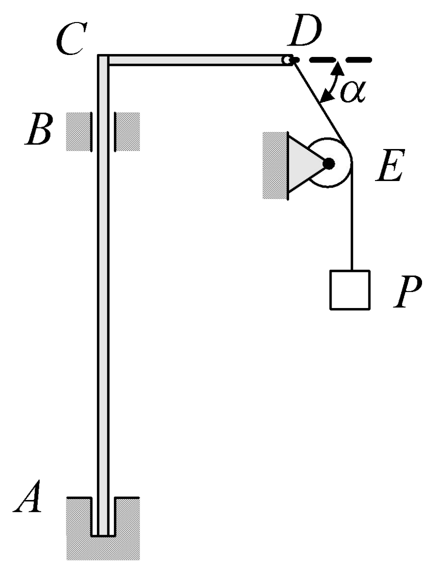


Рис. 11

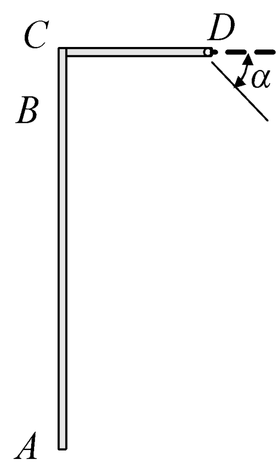
Решение

1. Запишем краткое условие задачи и выполним рисунок к задаче.

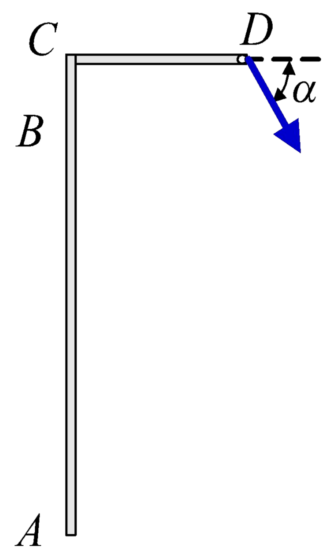
Дано: P, α, $AB = a$, $BC = в$, $CD = c$. Определить: X_A, Y_A, R_B.

2. Составим расчётную схему в следующей последовательности:

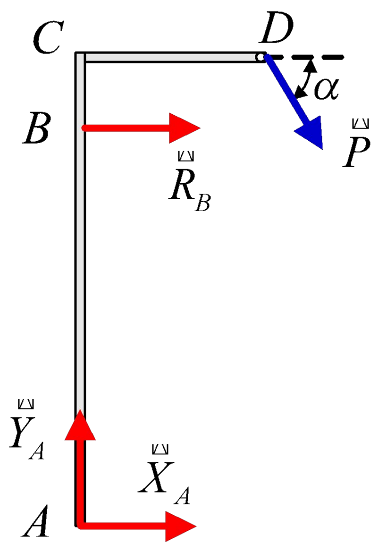
1) рассмотрим равновесие крана; изобразим его на рис. 12;



2) покажем действующие на кран силу P, которая равна по величине весу груза, прикреплённого к тросу, перекинутому через блок E;



3) покажем силы реакций связей; кран имеет две связи: подпятник A и подшипник B;



3. Построим координатные оси *xAy*.

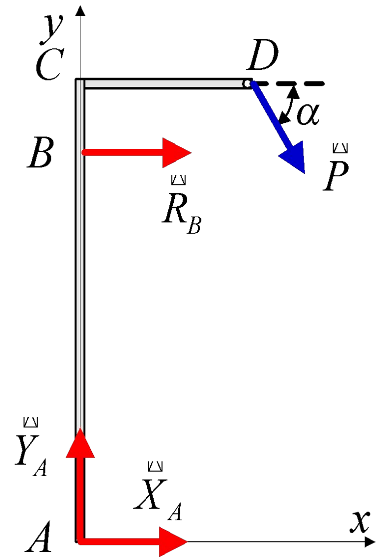


Рис. 12

В результате на рис. 12 получим расчётную схему, построенную с применением метода освобождения от связей.

4. Составим уравнения равновесия:

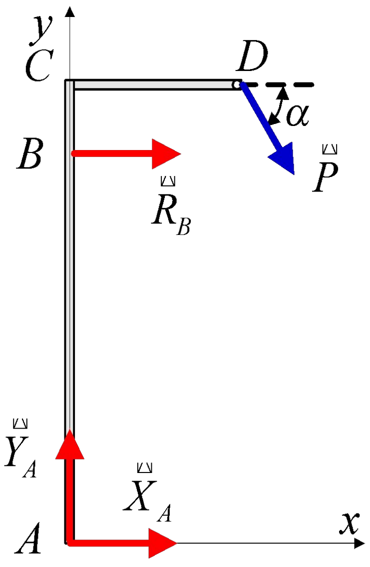


Рис. 12

Сумма проекций сил на ось x:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad X_A + R_B + P\cos\alpha = 0;$$

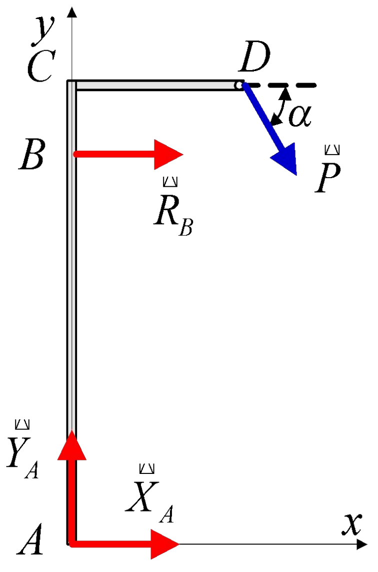


Рис. 12

Сумма проекций сил на ось *y*:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad Y_A - P\sin\alpha = 0;$$

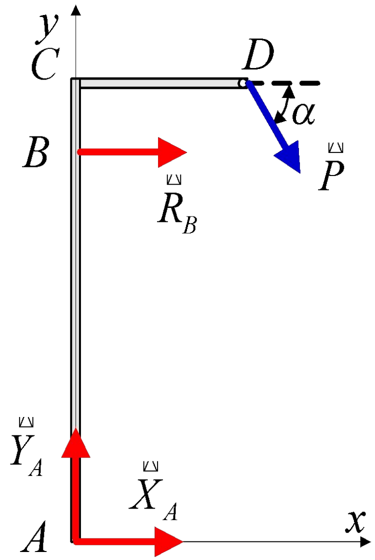


Рис. 12

Сумма моментов сил относительно точки *A*:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0; \quad -R_B\, a - P\cos\alpha\left(a+b\right) - P\sin\alpha\; c = 0.$$

Из этих уравнений определим реакции:

$$X_A = P\left(\frac{a}{c}\sin\alpha - \frac{b}{d}\cos\alpha\right);$$

$$Y_A = P\sin\alpha;$$

$$R_B = -P\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)\cos\alpha + \frac{c}{a}\sin\alpha\right].$$

Для проверки предлагаем составить уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} m_D\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

Если в уравнении не будет ошибок, то оно будет удовлетворяться тождественно.

Пример 3. Определить реакции жёсткой заделки невесомой балки, рис. 13, загруженной сосредоточенной силой , парой сил с моментом m, а также распределённой по закону треугольника нагрузкой с максимальной интенсивностью q, приняв в расчёте: $AB = 3$ м, $BC = 2$ м, $BC \perp AB$, $\alpha = 30°$, $F = 2$ кН, $m = 3$ кНм, $q = 4$ кН/м.

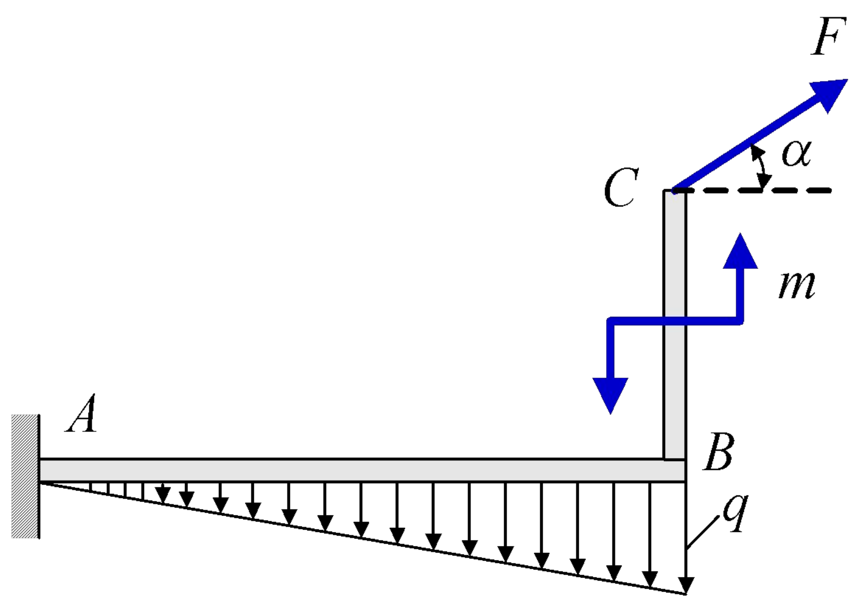


Рис. 13

Решение

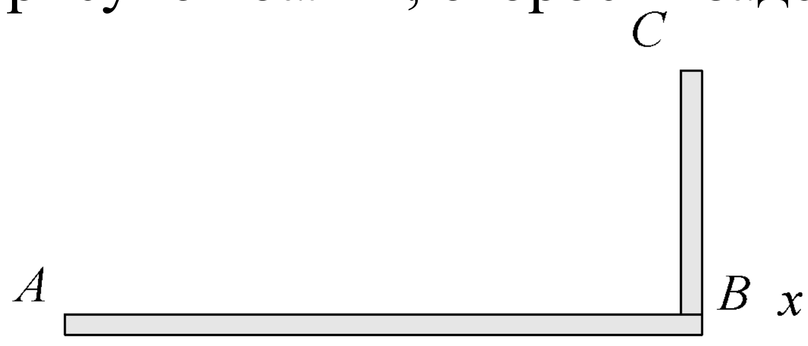
1. Запишем краткое условие к задаче:

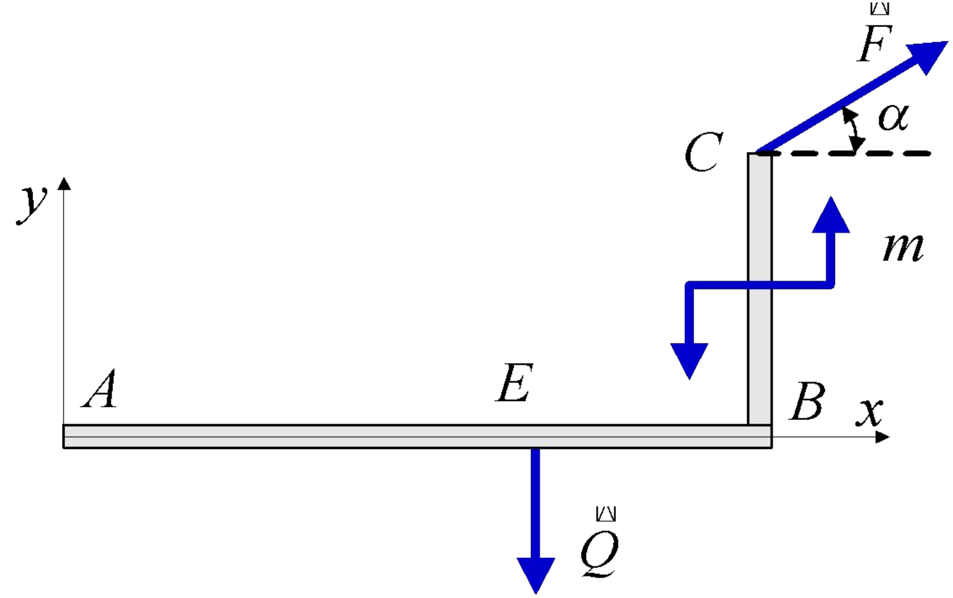
Дано: F = 2 кН, m = 3 кНм, q = 4 кН/м, AB = 3 м, BC = 2 м, $BC \perp AB$, $\alpha = 30°$.

Определить: X_A, Y_A, m_A.

2. Составим расчётную схему в следующей последовательности:

1) чтобы определить силы реакций, рассмотрим равновесие балки; выполним рисунок балки, отбросив заделку;





2) покажем на рисунке заданные силы; распределённую нагрузку заменим равнодействующей силой $\vec{Q}$, которая приложена в центре тяжести соответствующего треугольника и численно равна его площади:

$$Q = \frac{1}{2} q \left| AB \right| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ кН};$$

линия действия силы делит катет AB прямоугольного треугольника в точке E на отрезки:

$$AE = \frac{2}{3} AB = 2 \text{ м}; \quad EB = \frac{1}{3} AB = 1 \text{ м};$$

3) балка имеет одну связь – плоскую жёсткую заделку; реакции такой заделки представляются в виде трёх независимых составляющих: двух взаимно-перпендикулярных сил и момента пары m_A; покажем на рисунке эти составляющие; в результате получим расчётную схему, построенную с применением метода освобождения от связей, рис. 14.

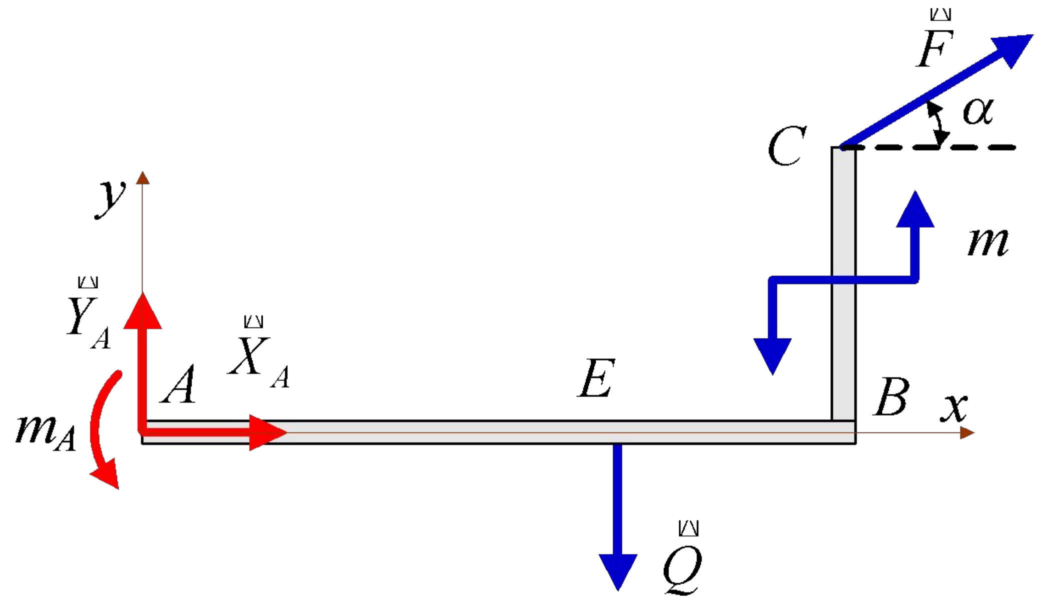


Рис. 14

3. Составим уравнения равновесия:

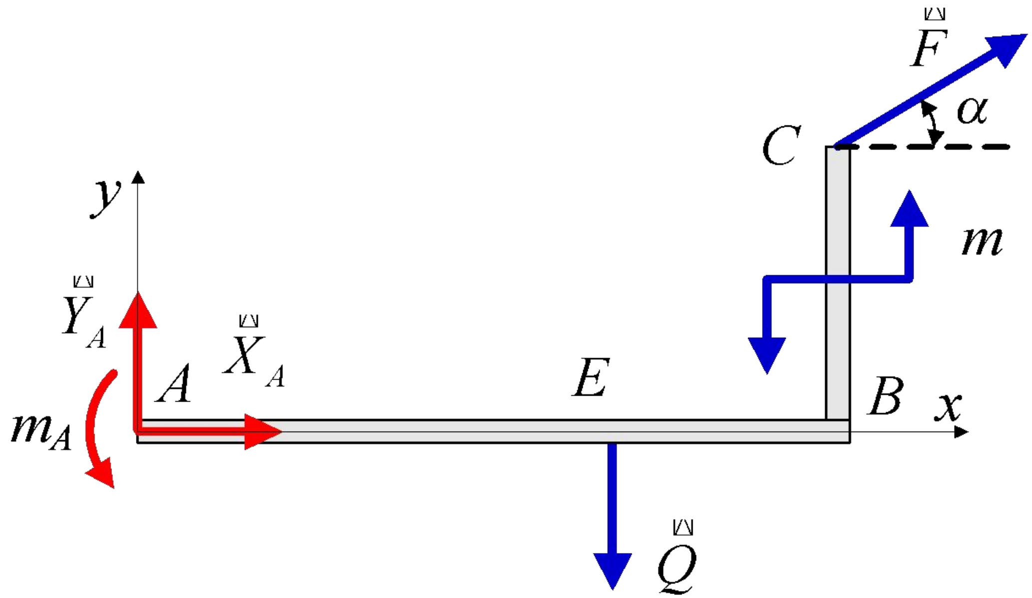


Рис. 14

Сумма проекций сил на ось x:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad X_A + F\cos\alpha = 0;$$

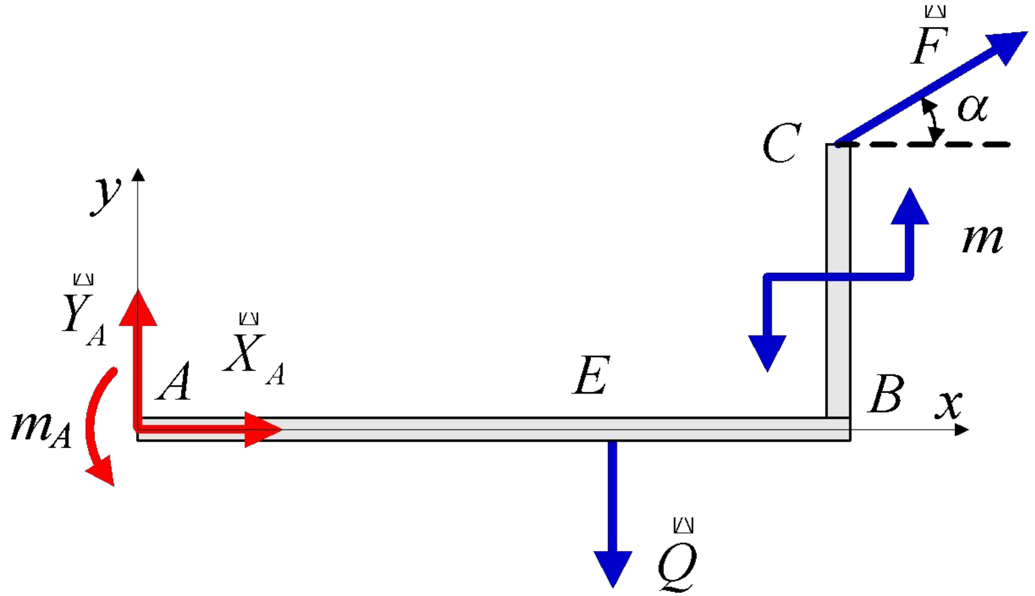


Рис. 14

Сумма проекций сил на ось y:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad Y_A + F\sin\alpha - Q = 0;$$

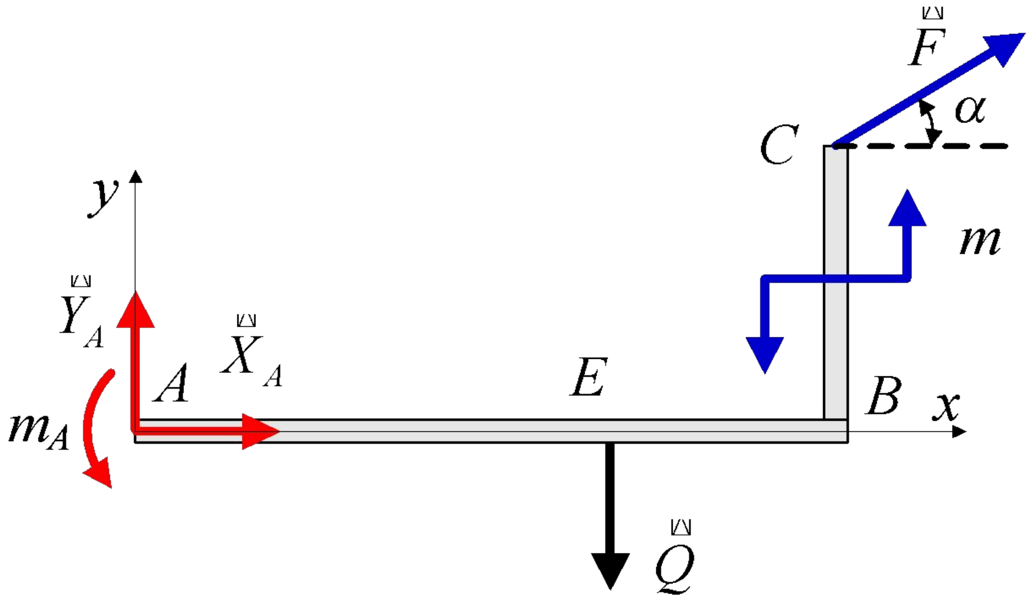


Рис. 14

Сумма моментов сил относительно точки A:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\vec{F}_k\right)=0;\ \ m_A - Q\,AE + m - F\cos\alpha\,BC +$$

$$+F\sin\alpha\,AB = 0.$$

Получили систему уравнений:

$$X_A + F\cos\alpha = 0;$$

$$Y_A + F\sin\alpha - Q = 0;$$

$$m_A - Q\,AE + m - F\cos\alpha\,BC + F\sin\alpha\,AB = 0.$$

Решим эту систему уравнений, используя пакет Mathcad.

Дано:

$F := 2 \quad m := 3 \quad q := 4 \quad AB := 3 \quad BC := 2 \quad \alpha := \frac{\pi}{6}$

Программа расчёта

$$BE := \frac{AB}{3} \quad AE := \frac{2AB}{3} \qquad Q := q\cdot\frac{AB}{2}$$

Given

$$Xa + F\cdot\cos(\alpha) = 0$$

$$Ya + F\cdot\sin(\alpha) - Q = 0$$

$$ma - Q\cdot AE + m - F\cdot\cos(\alpha)\cdot BC + F\cdot\sin(\alpha)\cdot AB = 0$$

$$\begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ ma \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(Xa, Ya, ma) \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 5 \\ 6 + 2\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$Xa = -1.732 \qquad Ya = 5 \qquad ma = 9.464$$

Знаки в ответах свидетельствуют о том, что реакция $\vec{X}_A$ на схеме, рис. 14, показана противоположно действительному направлению, направления $\vec{Y}_A$ и m_A показаны верно.

Для проверки результатов решения составили уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} m_C\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

$$ma + Q \cdot BE + m - Ya \cdot AB + Xa \cdot BC = 0$$

Уравнение тождественно удовлетворится. Следовательно, в решении нет ошибок.

В результате решения уравнений получили:

$$X_A = -1{,}73 \text{ кН}; \quad Y_A = 5{,}00 \text{ кН}; \quad m_A = 9{,}46 \text{ кНм}.$$

4. Задачи для самостоятельного решения

1. Однородная балка *AB* весом *P* = 100 Н прикреплена к стене шарниром *A* и удерживается под углом 45° к вертикали при помощи троса, перекинутого через блок *C* и несущего груз *G*. Ветвь *BC* троса образует с вертикалью угол 30°. В точке *D* к балке подвешен груз *Q* весом 200 Н, рис. 15. Определить вес груза *G* и реакцию шарнира *A*, пренебрегая трением на блоке, если *BD* =*BA*/4.

Ответ:
G = 146,38 Н;
X_A = 73,19 Н;
Y_A = 173,24 Н.

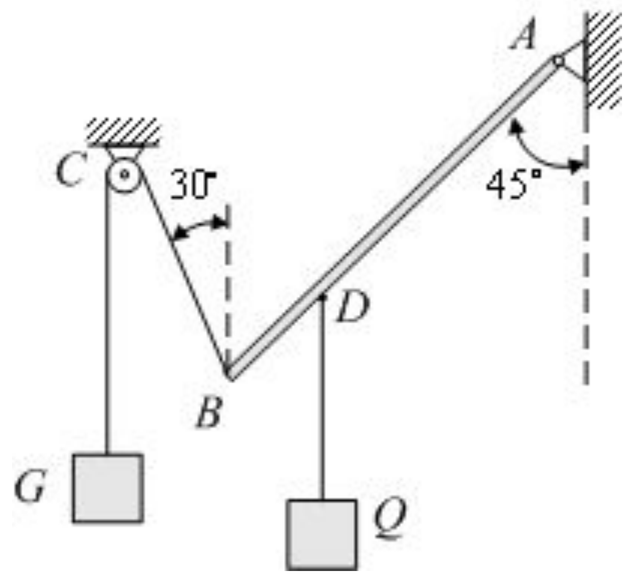


Рис. 15

2. Однородный стержень AB весом 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим – на гладкую плоскость, наклонённую под углом 30° к горизонту. У конца B стержень поддерживается верёвкой, перекинутой через блок C и несущей груз P, часть верёвки BC параллельна наклонной плоскости, рис. 16.

Пренебрегая трением на блоке, определить величину груза P и силы давления N_A и N_B на пол и на наклонную плоскость.

Ответ:
$P = 25$ Н;
$N_A = 50$ Н;
$N_B = 43{,}3$ Н.

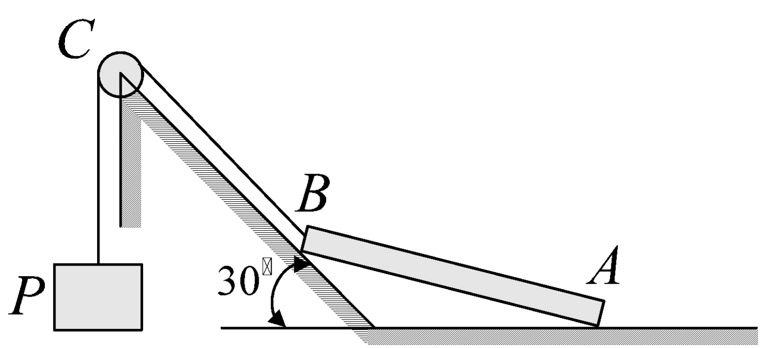


Рис. 16

3. Определить реакции опор A и B невесомой балки, изображённой на рис. 17, приняв при расчёте $AC = CD = 1$ м; $CB = BD$; $P = 2$ кН; $m = 3$ кНм; $\alpha = 30°$.

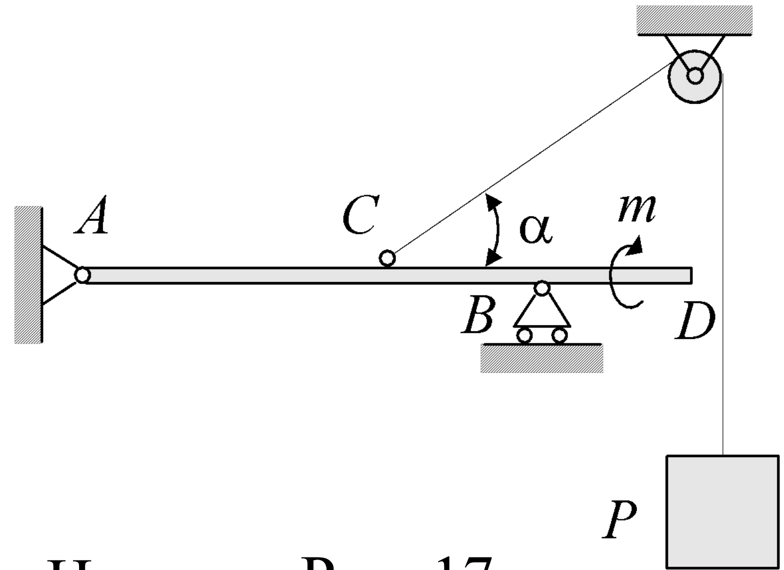


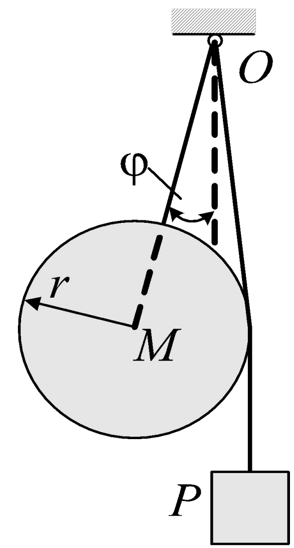
Рис. 17

Ответ:

$X_A = -1{,}73$ кН; $Y_A = -2{,}33$ кН. $R_B = 1{,}33$ кН.

4. Однородный шар весом Q и радиусом r и гиря весом P подвешены на верёвках в точке O, как показано на рис. 18. Расстояние $OM = b$.

Определить, какой угол ϕ образует прямая OM с вертикалью при равновесии.



Ответ: $\sin \phi = aP/b(P+Q)$

Рис. 18

5. Определить реакции опор *A* и *B* невесомой балки, изображённой на рис. 19, приняв при расчёте $AC = CD = 1$ м; $CB = BD$; $P = 2$ кН; $m = 3$ кНм; $\alpha = 30°$. Размерами блока пренебречь.

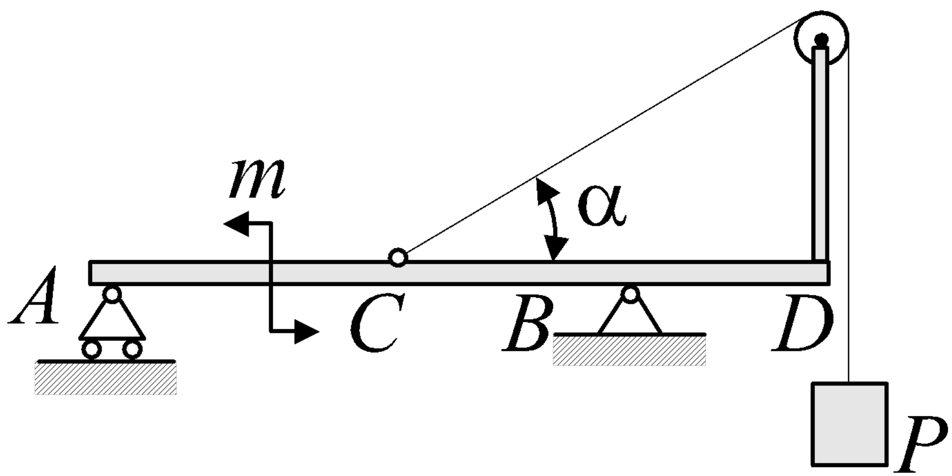


Рис. 19

Ответ: $X_B = 0$; $Y_B = 0{,}67$ кН. $R_A = 1{,}33$ кН.

6. Ломаный рычаг *ABC*, имеющий неподвижную ось *B*, весом P = 80 Н; плечо *AB* = 0,4 м, плечо *BC* = 1 м, центр тяжести рычага находится на расстоянии 0,212 м от вертикальной прямой *BD*. В точках *A* и *C* привязаны верёвки, перекинутые через блоки *E* и *K* и натягиваемые гирями весом P_1 = 310 Н и P_2 = 100 Н, рис. 20.

Пренебрегая трением на блоках, определить угол *BCK* = α в положении равновесия, если угол *BAE* = 135°.

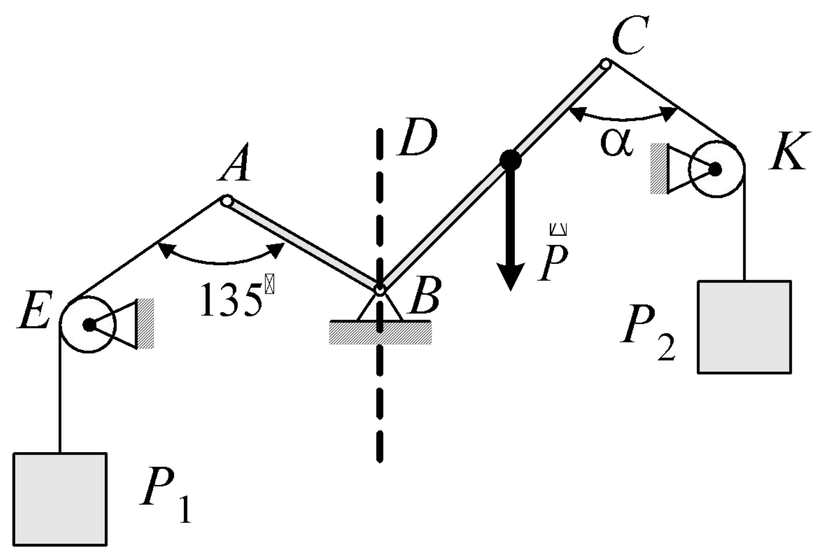


Рис. 20

Ответ: α_1 =45°; α_2 = 135°.

7. Определить реакции опор балки, изображённой на рис. 21, если известны: F = 500 Н, q = 200 Н/м, α = 30°; AA' и CC' – жёсткие невесомые стержни; $AD = BD = CD$ = 0,5 м; m = 750 Нм.

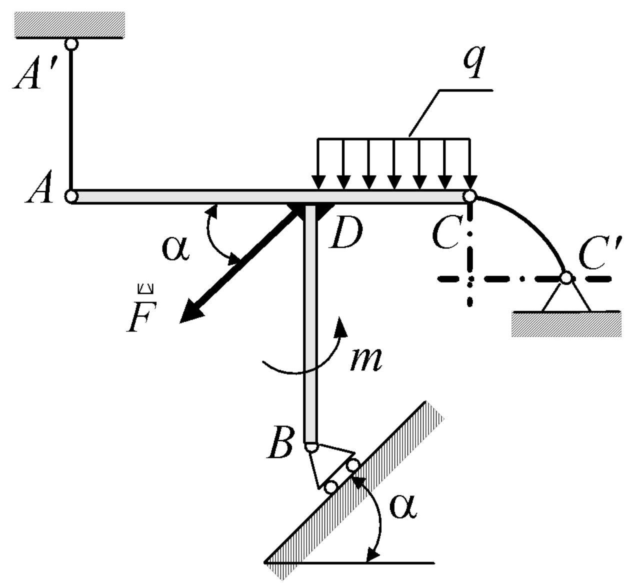


Рис. 21

Ответ: R_A =647,94 Н; R_B = 369,05 Н. R_C = 873,34 Н.

8. Для балки *ABC*, изображённой на рис. 22, определить реакции жёсткой заделки, если известны: $AB = 4{,}5$ м, $BC = 1{,}5$ м, $\alpha = 120°$; $P = 25$ кН; $q_0 = 24$ кН/м; $AB \perp BC$.

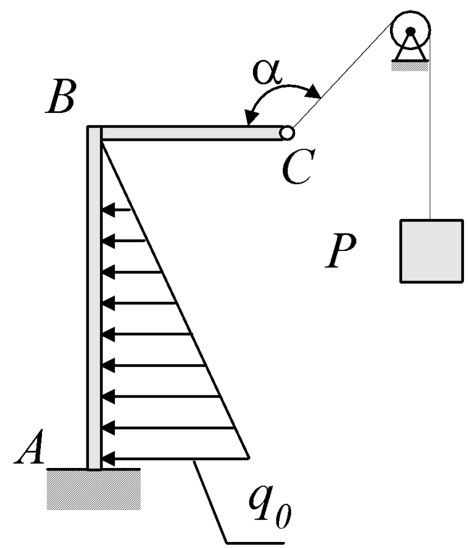


Рис. 22

Ответ: $X_A = 2{,}00$ кН; $Y_A = -4{,}33$ кН. $M_A = -2{,}00$ Нм.

9. Определить реакции опор A и B двухконсольной балки, находящейся под действием сосредоточенной силы P, пары сил с моментом m и распределённой нагрузки, изменяющейся по закону треугольника, рис. 23. В расчёте принять: $P = 2$ кН, $m = 3$ кНм, $q_0 = 3$ кН/м: $A_1A = AB = BB_1 = 0{,}6$ м; $\alpha = 60°$.

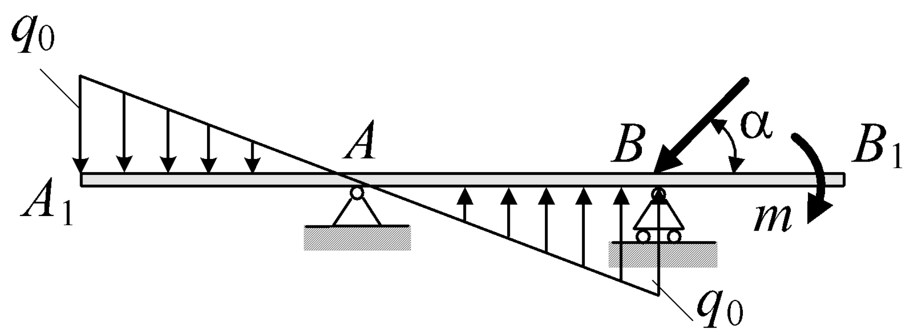


Рис. 23

Ответ: $X_A = 1{,}00$ кН; $Y_A = 2{,}60$ кН. $R_B = 4{,}33$ кН.

10. Для балки, изображённой на рис. 24, определить реакции жёсткой заделки. В расчёте принять: F = 300 Н, m = 50 Нм, α = 30°, q = 100 Н/м, $AB = BC = CD = DE$ = 0,6 м.

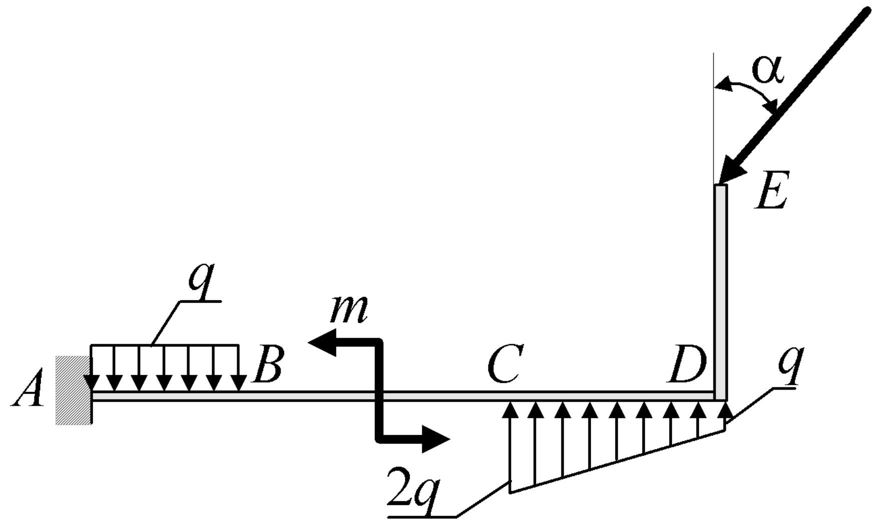


Рис. 24

Ответ: X_A = 150 Н; Y_A = 229,81 Н. M_A = 213,64 Нм.

11. Тележка весом G движется по горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, испытывая силу сопротивления воздуха, пропорциональную скорости: $R = kv$, рис. 25.

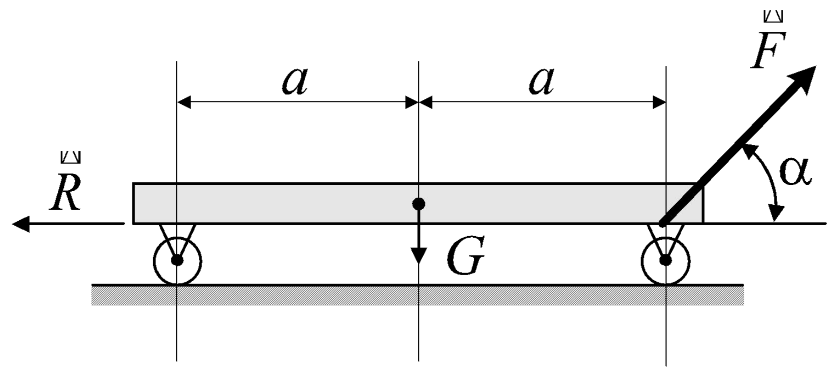


Рис. 25

Ответ: $v_{max} = G \operatorname{ctg} \alpha / 2\kappa$.

12. Для невесомой балки, загруженной силой и парой m, рис. 26, требуется:

1. а) определить реакции связей при действии заданной системы сил, приняв $F = 200$ Н, $\alpha = 60°$, $m = 50$ Нм, $a = 0{,}5$ м;

б) проанализировать зависимость реакций от угла, обратив внимание на результат, соответствующий углам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

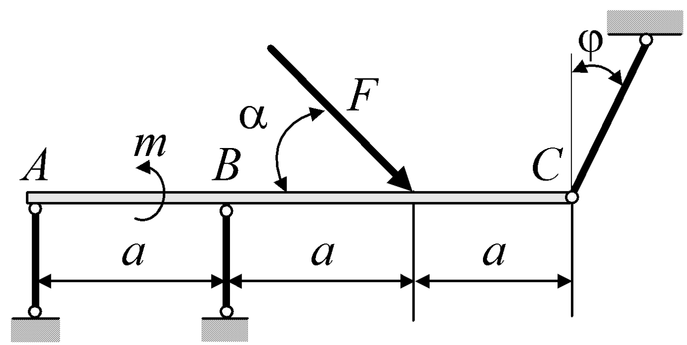


Рис. 24

2. Выполнить то же, что и в п. 1, при действии только силы F;

3. Выполнить то же, что и в п. 1, при действии только пары сил с моментом m.

КОНЕЦ