ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Методические указания для практических занятий
и самостоятельной работы по теоретической механике

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток

2011

Содержание

1. Теоретический материал в вопросах и ответах

1.1. Основные понятия и определения

Что в теоретической механике называется кинематикой?

В теоретической механике кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения без учета их масс и действующих на них сил.

Как называется раздел кинематики, в котором изучается движение точки?

Раздел кинематики, в котором рассматривается движение одной точки, называется кинематикой точки.

Что в называется телом отсчёта?

Тело, относительно которого рассматривается движение точки или тела, называется телом отсчета.

Что называется системой отсчёта?

При изучении движения точки или тела с телом отсчета связывают систему координат и часы. В совокупности тело отсчёта, система координат и часы образуют систему отсчета.

Что называется траекторией точки?

Траекторией точки называется линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета.

По виду траектория точки может быть прямолинейной и криволинейной, рис. 1.

а) б)

Рис. 1

Что необходимо сделать для изучения движения точки?

Чтобы изучить движение точки, необходимо задать её движение, а затем определить кинематические характеристики этого движения (пройденный путь, скорость и ускорение).

Что значит задать движение точки?

Задать движение точки относительно какой-либо системы отсчета – это задать способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени относительно выбранной системы отсчёта.

В каких единицах измеряются в кинематике расстояние и время?

В кинематике основной единицей измерения времени является секунда (с), а расстояния – метр (м).

Какие способы задания движения точки Вы знаете?

Преимущественно в кинематике точки используют три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

2. Векторный способ задания движения точки

В чём заключается векторный способ задания движения точки?

Положение точки в пространстве определяется радиус-вектором, проведенным из некоторого неподвижного центра O в данную точку M, рис. 2, который должен быть известен как функция времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

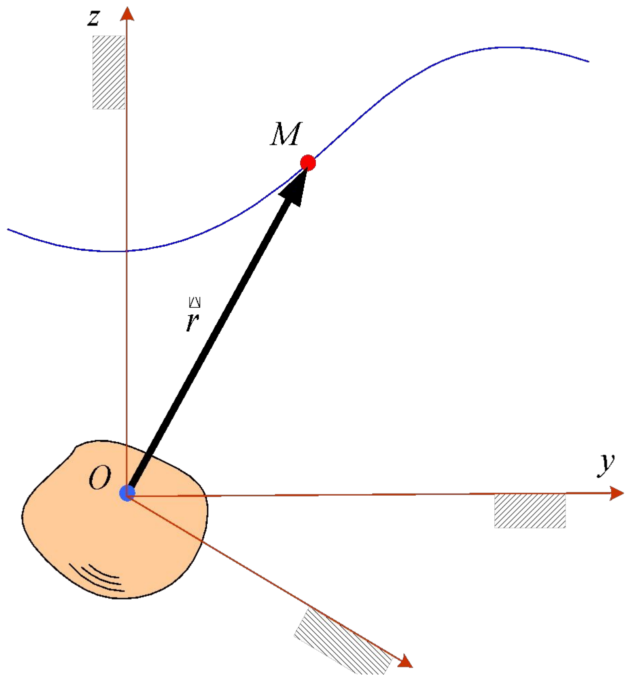


Рис. 2

Как называется линия, которую описывает конец радиус-вектора точки?

Линия, которую описывает конец радиус-вектора точки называется **годографом** радиус-вектора. Следовательно, годограф радиус-вектора точки является траекторией точки, рис. 2.

Что называется скоростью точки?

Скорость точки – это векторная величина характеризующая, быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета. Единица измерения скорости – м/с.

Чему равна скорость точки при векторном способе задания её движения?

При векторном способе задания движения скорость точки равна первой производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2)$$

Как направлен вектор скорости точки?

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рис. 3).

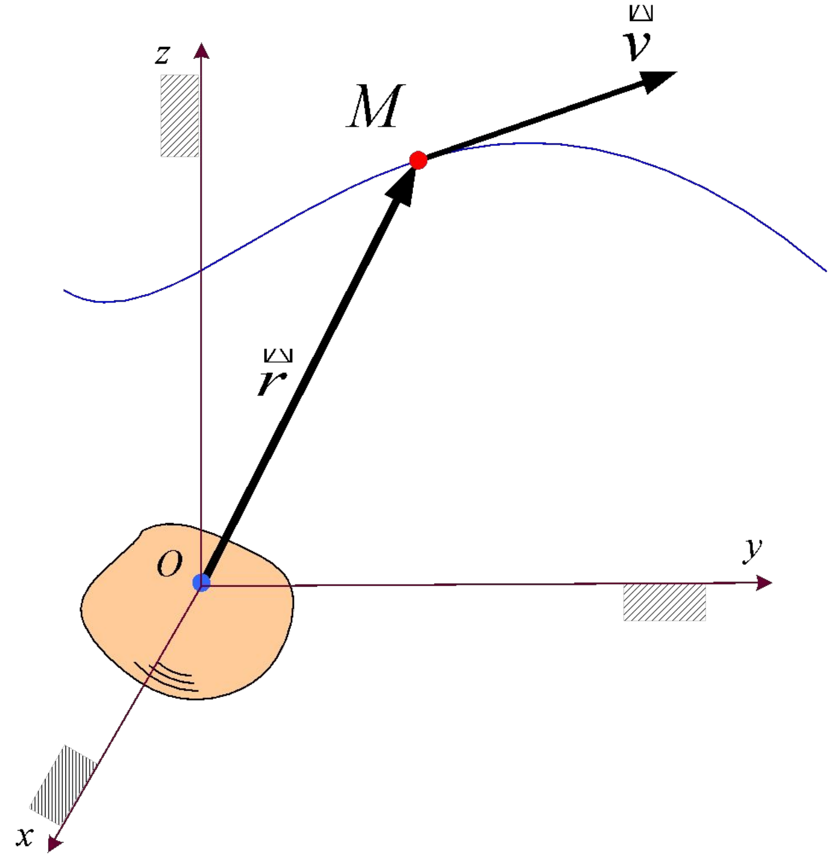


Рис. 3

Что называется ускорением точки точки?

Ускорением точки называется вектор, характеризующий быстроту изменения величины и направления вектора скорости точки. Единица измерения – м/с^2.

Чему равно ускорение точки при векторном способе задания её движения ?

Ускорение точки равно первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной по времени от радиуса-вектора точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3)$$

Как направлен вектор ускорения точки?

Вектор ускорения точки направлен по касательной к годографу вектора скорости, рис. 4.

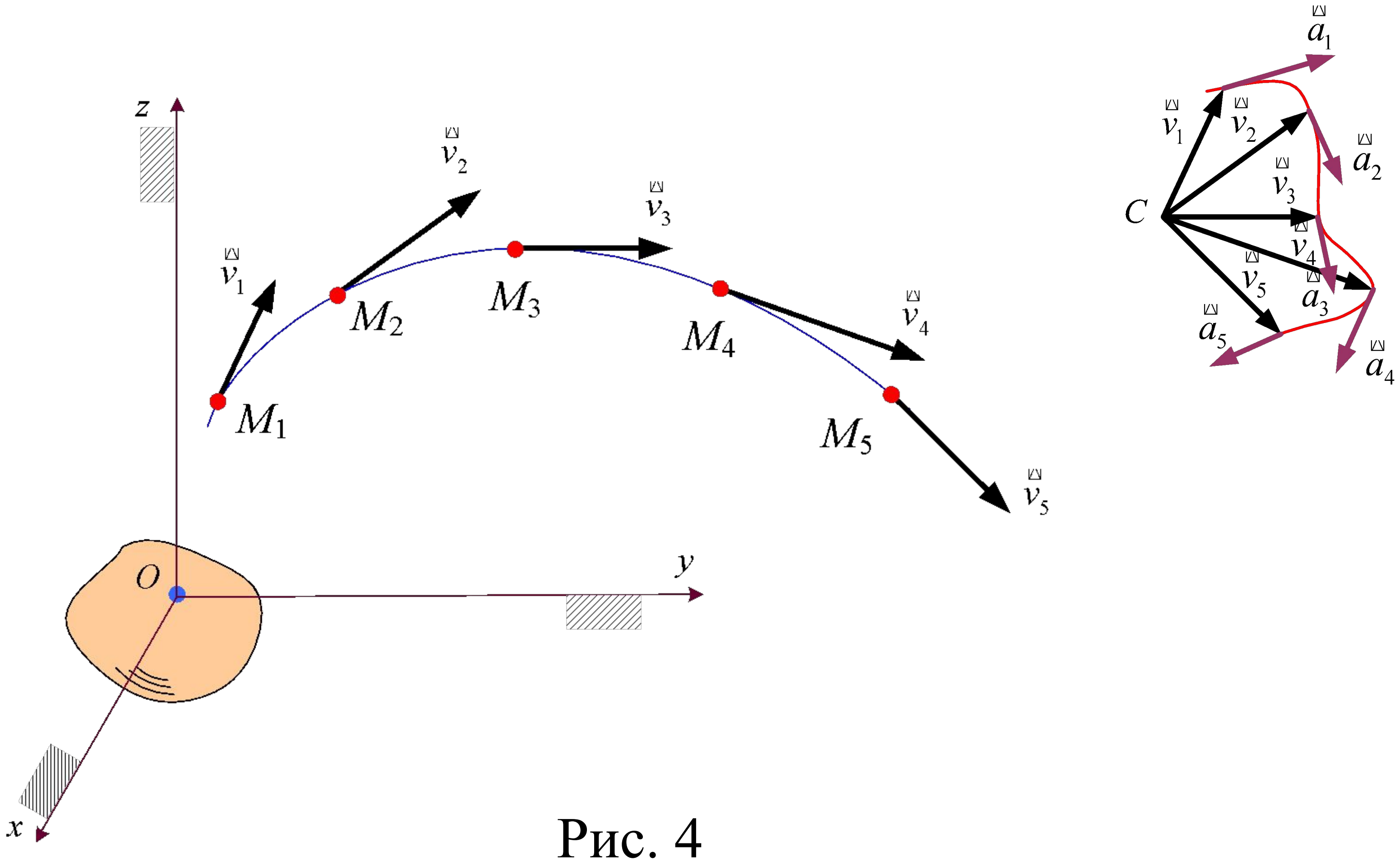

z
y
x
O
$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
$\vec{v}_3$
$\vec{v}_4$
$\vec{v}_5$
M_1
M_2
M_3
M_4
M_5
C
$\vec{a}_1$
$\vec{a}_2$
$\vec{a}_3$
$\vec{a}_4$
$\vec{a}_5$

Рис. 4

3. Координатный способ задания движения точки

В чём заключается координатный способ задания движения точки?

При координатном способе задания движения положение точки определяется путём задания трёх её координат как функций времени в декартовой системе координат, рис. 5:

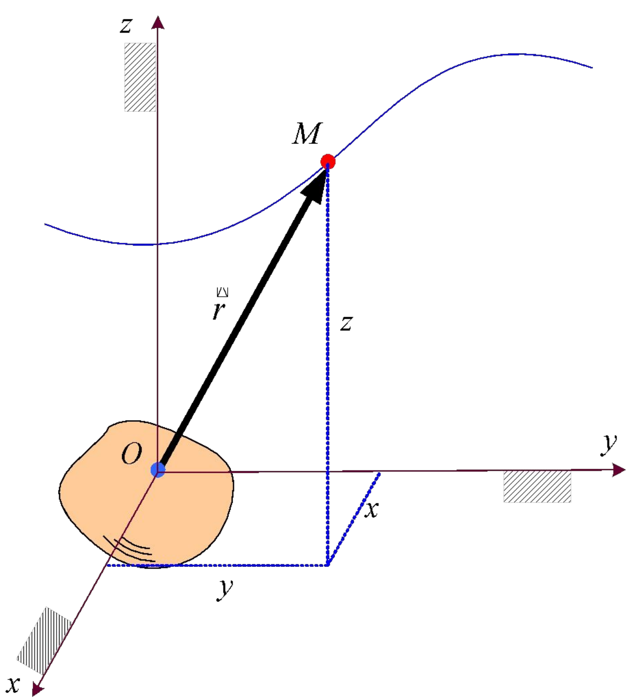


Рис. 5

$$x = f_1(t);$$
$$y = f_2(t); \qquad (4)$$
$$z = f_3(t);\ t > 0.$$

Как называются уравнения (4)?

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t);\ t > 0. \qquad (4)$$

Уравнения (4) называются кинематическими уравнениями движения точки в координатной форме и одновременно уравнениями траектории точки в параметрической форме. Параметром является скалярная переменная t.

Как получить уравнение траектории в явном виде?

Чтобы получить уравнение траектории в явном виде, необходимо исключить из уравнений (4) время t. Для этого выражают t из любого уравнения (4) и подставляют его в остальные уравнения. Например, найдём t из первого уравнения:

$$x = f_1(t) \Rightarrow \qquad t = \varphi(x)$$

Подставим t в остальные уравнения:

$$y = f_2\left[\varphi(x)\right];\ z = f_3\left[\varphi(x)\right]. \qquad (5)$$

Система уравнений (5) определяет в пространстве переменных xyz траекторию точки, как линию пересечения двух цилиндрических поверхностей.

Как определяется скорость точки при координатном способе задания движения точки?

1. Определяют проекции скорости точки на координатные оси как первые производные от соответствующих координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

2. Находят модуль скорость точки:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

3. Находят величины направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}; \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}; \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v}.$$

4. Находят величины углов α, β, γ, которые составляет вектор скорости соответственно с осями x, y, z:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v_x}{v}\right); \beta = \arccos\left(\frac{v_y}{v}\right); \gamma = \arccos\left(\frac{v_z}{v}\right).$$

Как определяется ускорение точки при координатном способе задания движения точки?

1. Определяют проекции ускорения точки на координатные оси как первые производные от проекций скорости, которые равны вторым производным от соответствующих координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

2. Находят следующие величины:

1) модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

2) значения направляющих косинусов:

$$\cos(\vec{a},\vec{i}\,) = \frac{a_x}{a};\ \cos(\vec{a},\vec{j}\,) = \frac{a_y}{a};\ \cos(\vec{a},\vec{k}\,) = \frac{a_z}{a}.$$

3) величины углов α_1, β_1, γ_1, которые составляет вектор скорости соответственно с осями x, y, z:

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{a_x}{a}\right);\ \beta_1 = \arccos\left(\frac{a_y}{a}\right);\ \gamma_1 = \arccos\left(\frac{a_z}{a}\right).$$

Как определяется кинематические характеристики точки при движения точки в плоскости *xOy*?

При движении точки в плоскости $x0y$ нахождение её кинематические характеристики имеют вид:

– уравнения движения точки $\quad x = f_1(t);\quad y = f_2(t);$

– уравнение траектории точки $\quad y = f_2[\varphi(x)]$

– скорость точки $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

– направляющие косинусы вектора скорости

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}.$$

– ускорение точки $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

– направляющие косинусы вектора ускорения

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}.$$

Как определяются кинематические характеристики точки при прямолинейном движения точки, если ось совмещена с траекторией?

При прямолинейном движении точки, в случае совмещения координатной оси x с траекторией (прямой линией), получим:

– уравнения движения точки: $x = f_1(t);$

Какой вид имеет уравнение прямолинейного равнопеременного движения если ось совмещена с траекторией?

Уравнение прямолинейного равнопеременного движения точки (a – $const$) имеет вид:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

где v_0 – начальная скорость, x_0 – начальная координата.

– скорость точки: $$v = v_x = \frac{dx}{dt};$$

– ускорение точки: $$a = a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}.$$

Векторы скорости и ускорения направлены вдоль оси координат. При $v_x > 0$ точка движется по направлению оси x, а при $v_x < 0$ – противоположно направлению оси. Ускорение направлено в сторону оси x, если $a_x > 0$, и противоположно оси x, если $a_x < 0$.

Какой вид имеют кинематические характеристики прямолинейного равнопеременного движения точки, если ось совмещена с траекторией?

Уравнение траектории: $$y = 0;\ z = 0.$$

Скорость точки равна: $$v = v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 + at,$$

Ускорение точки:

$$a = a_x = \frac{dv_x}{dt} = const.$$

Если знаки скорости и ускорения одинаковы, то точка движется с ускорением. В противном случае точка движется с замедлением.

Какой вид имеет уравнение прямолинейного равномерного движения точки, если ось совмещена с траекторией?

Уравнение движения точки:

$$x = x_0 + v_0 t.$$

Какой вид имеют кинематические характеристики прямолинейного равномерного движения, если ось совмещена с траекторией точки?

Уравнение траектории: $y = 0; z = 0.$

Скорость точки: $$v = v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 = const.$$

Ускорение точки: $$a = a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0.$$

4. Решение задач

Все задачи кинематики точки можно разделить на прямые и обратные. Прямые задачи связаны с определением кинематических характеристик движущейся точки по известным уравнениям движения. Обратные задачи посвящены определению уравнений движения точки по её кинематическим характеристикам.

Прямые и обратные задачи можно решать различными способами: векторным, координатным и естественным. Некоторые задачи решаются путём комбинации нескольких способов задания движения точки (комбинированные задачи)

На практике приходится решать преимущественно прямые задачи кинематики точки. Рассмотрим примеры решения таких задач.

4.1. Прямолинейное равнопеременное движение точки

Пример 1. Считая посадочную скорость самолёта равной v = 400 км/ч, определить замедление его a и время торможения при посадке на пути l = 1200 м, считая, что замедление постоянно.

Решение

Рассматриваем самолёт как точку, совершающую прямолинейное замедленное движение.

Совместим координатную ось с траекторией точки. Начало оси поместим в начальную точку торможения, рис. 7.

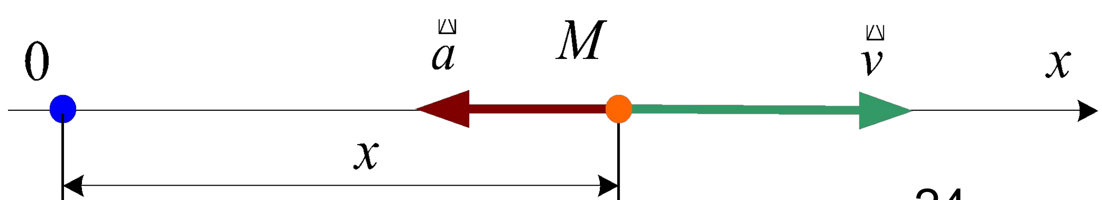


Рис. 7

Запишем уравнение прямолинейного равнопеременного движения точки и формулу скорости:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$v = v_0 + at.$$

Запишем начальные и граничные условия, соответственно, для моментов $t = 0$ и $t = t_1$:

$$x(0) = 0; \quad v(0) = v_0;$$

$$x(t_1) = l; \quad v(t_1) = 0.$$

Подставим эти условия в уравнение движения и в формулу скорости:

$$l = 0 + v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2};$$

$$0 = v_0 + a t_1.$$

Получили систему двух уравнений с неизвестными t_1 и a.

Решаем эту систему уравнений способом подстановки.

Из второго уравнения найдём время торможения:

$$t_1 = -\frac{v_0}{a}.$$

Подставим найденное время торможения в первое уравнение системы:

$$l = 0 - v_0\left(\frac{v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a}.$$

Отсюда найдём:

$$a = -\frac{v_0^2}{2l}.$$

Подставим ускорение в формулу для времени торможения:

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0 2l}{v_0^2} = \frac{2l}{v_0}.$$

Переведём скорость v_0 из (км/ч) в (м/с):

$$v_0 = 400 \text{ (км/ч)} = \frac{400 \cdot 1000}{3600} = 111{,}1 \text{ (м/с)}.$$

Подставим численные значения в аналитические выражения неизвестных величин:

$$a = -\frac{v_0^2}{2l} = -\frac{111{,}1^2}{2 \cdot 1200} = -5{,}14 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$t_1 = \frac{2l}{v_0} = \frac{2 \cdot 1200}{111{,}1} = 21{,}6 \text{ (с)}$$

4.2. Криволинейное движение точки

Пример 2. Даны уравнения движения точки:

$x = 2t; \; y = 4t^2 + 1$ (x, y – в метрах; t – в секундах).

Определить траекторию точки, скорость и ускорение точки в момент времени $t = 1$ с.

Решение

Из первого уравнения найдём:

$$t = \frac{x}{2}.$$

Подставим время во второе уравнение:

$$y = 4t^2 + 1 = \frac{4x^2}{4} + 1 = x^2 + 1.$$

Как видим, траекторией точки является парабола.

Найдём проекции скорости точки на координатные оси.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 8t.$$

Найдём численные значения проекций в момент времени $t = 1$c:

$$v_x(1) = 2\ (\text{м/с}); \quad v_y(1) = 8\ (\text{м/с}).$$

Определим величину скорости точки в момент времени $t = 1$c:

$$v(1) = \sqrt{v_x(1)^2 + v_y(1)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 8,25\ (\text{м/с}).$$

4.3. Решение задач

Решить самостоятельно

По данным уравнениям движения точки найти уравнение её траектории, в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

1). $x = 3t - 5;\ y = 4 - 2t.$

Ответ:

$$\textit{Полупрямая}\ \ 2x + 3y - 2 = 0\quad x = -5;\ y = 4.$$

2). $x = 5\sin 10t;\ y = 3\cos 10t.$

Ответ:

$$\textit{Эллипс}\ \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\quad x = 0;\ y = 3.$$

Пример 3. Точка движется согласно уравнениям:

$x = 20\cos^2 t$ см, $y = 30\sin^2 t$ см.

Определить уравнение траектории точки, её скорость и ускорение в момент времени $t_1 = 0{,}5\pi$ с.

Решение

$$x = 20\cos^2 t,\ y = 30\sin^2 t;$$

$$\frac{x}{20} = \cos^2 t;\ \frac{y}{30} = \sin^2 t;$$

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{30} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1;$$

$$\frac{x}{20} + \frac{y}{30} = 1;$$

$$x = 20\cos^2 t,\ y = 30\sin^2 t;$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 20 \cdot 2\cos t \cdot (-\sin t) = -20\sin 2t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 30 \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = 30 \cdot \sin 2t;$$

$$v_x(t_1) = -20\sin 2t_1 = -20\sin(2 \cdot 0{,}5\pi) = -20\sin\pi = 0;$$

$$v_y(t_1) = 30 \cdot \sin 2t_1 = 30\sin(2 \cdot 0{,}5\pi) = 0;$$

$$v(t_1) = \sqrt{v_x(t_1)^2 + v_y(t_1)^2} = 0;$$

$$v_x = -20\sin 2t;$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -20 \cdot \cos 2t \cdot 2 = -40\cos 2t;$$

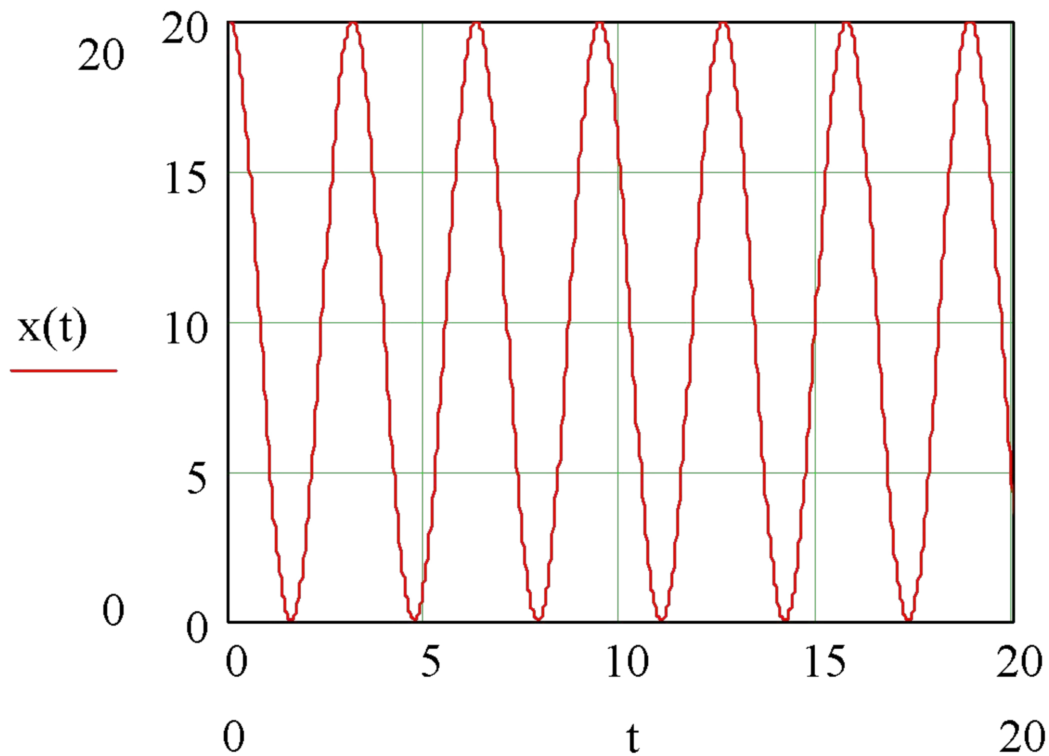
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 30 \cdot \cos 2t \cdot 2 = 60 \cdot \cos 2t;$$

$$a_x\left(t_1\right) = -40 \cos 2t_1 = -40 \cos\left(2 \cdot 0,5\pi\right) = 40;$$

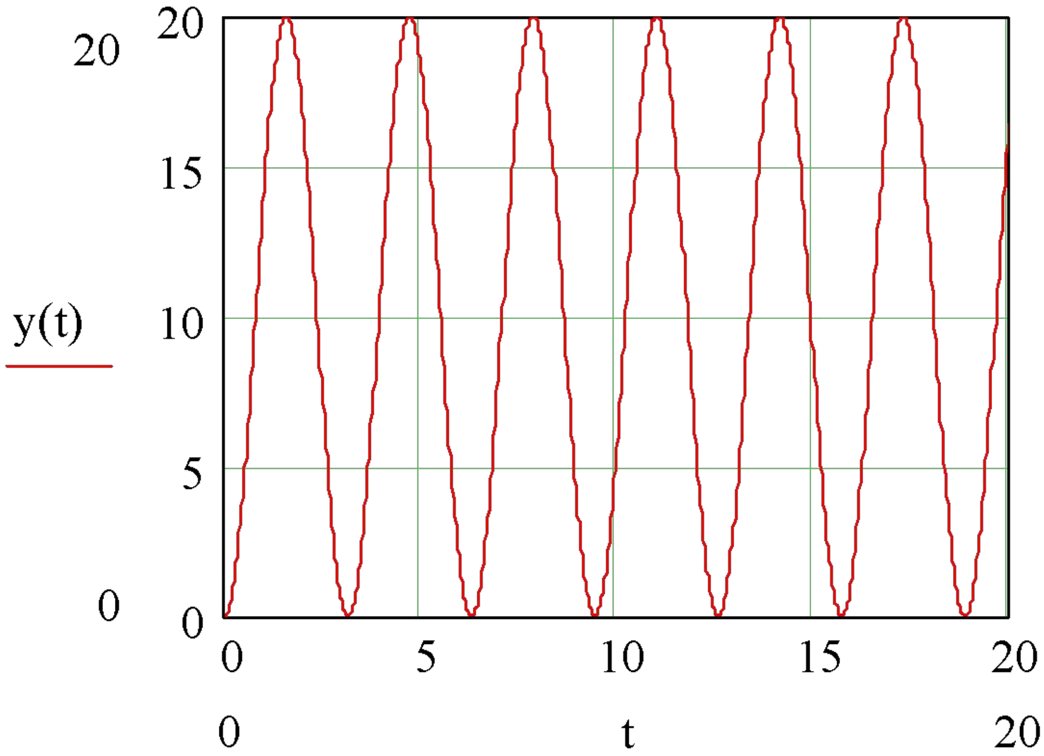
$$a_y\left(t_1\right) = 60 \cdot \cos 2t_1 = 60 \cdot \cos\left(2 \cdot 0,5\pi\right) = -60;$$

$$a\left(t_1\right) = \sqrt{a_x\left(t_1\right)^2 + a_y\left(t_1\right)^2} = \sqrt{40^2 + 60^2} = 72,11\,\frac{см}{с^2};$$

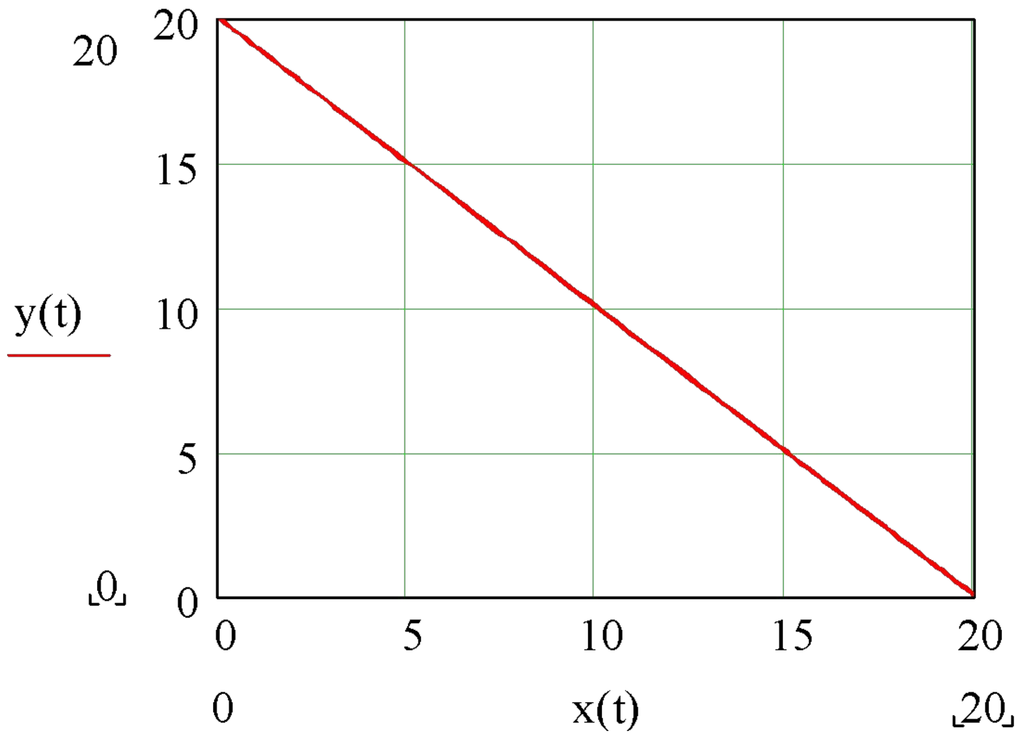
$$x(t) := 20 \cdot \cos(t)^2$$



$$y(t) := 20 \cdot \sin(t)^2$$



$$x(t) := 20 \cdot \cos(t)^2 \qquad y(t) := 20 \cdot \sin(t)^2$$



Решить самостоятельно

Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям:

$$x = 2\cos t;\ y = 4\cos 2t.$$

Определить скорость и ускорение точки в момент, когда она находится на оси y.

Ответ:

$$v = 2\ \text{м/с},\ \cos(\vec{v}, x) = -1$$

Решение с использованием пакета Mathcad

$$x(t) := 2\cdot\cos(t)$$

$$y(t) := 4\cdot\cos(2\cdot t)$$

Given

$$2\cdot\cos(t) = 0$$

$$\mathrm{Find}(t) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi$$

$$t1 := \frac{1}{2}\cdot\pi$$

$$vx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow -2\cdot\sin(t)$$

$$vy(t) := \frac{d}{dt}y(t) \rightarrow -8\cdot\sin(2\cdot t)$$

$$v(t) := \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2}$$

$$v(t1) = 2$$

$$ax(t) := \frac{d}{dt}vx(t) \rightarrow -2\cdot\cos(t)$$

$$ay(t) := \frac{d}{dt}vy(t) \rightarrow -16\cdot\cos(2\cdot t)$$

$$a(t) := \sqrt{ax(t)^2 + ay(t)^2}$$

$$a(t1) = 16$$

Пример 4. Точка движется согласно уравнениям:

$$x = 6\sin\frac{\pi}{2}t \text{ см}; \quad y = 8\cos\frac{\pi}{2}t \text{ см}.$$

Определить скорость, ускорение, нормальное ускорение, касательное ускорение и радиус траектории точки в момент $t = 5$ с.

Решение

Определим скорость точки.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6\sin\frac{\pi}{2}t\right) = 6\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}t = 3\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8\cos\frac{\pi}{2}t\right) = -8\cdot\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = -4\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right);$$

$$v_x(5) = 3\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 5\right) = 0;$$

$$v_y(5) = -4\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 5\right) = -12,57;$$

$$v(5) = \sqrt{v_x(5)^2 + v_y(5)^2} = 12,57;$$

Определим ускорение точки.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = -3\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= -\frac{3\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right);$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-4\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) = -4\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= -\frac{4\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right);$$

$$a_x(5) = -\frac{3\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 5\right) = -14,804;$$

$$a_y(5) = -\frac{4\pi^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 5\right) = 0;$$

$$a(5) = \sqrt{a_x(5)^2 + a_y(5)^2} = 14,804.$$

Определим касательное ускорение точки.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}\right) = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}.$$

$$a_\tau = \frac{v_x(5)\,a_x(5) + v_y(5)\,a_y(5)}{v(5)} = 0.$$

Определим нормальное ускорение точки.

$$a^2 = a_\tau{}^2 + a_n{}^2;$$

$$a_n{}^2 = a^2 - a_\tau{}^2 \Big| \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2};$$

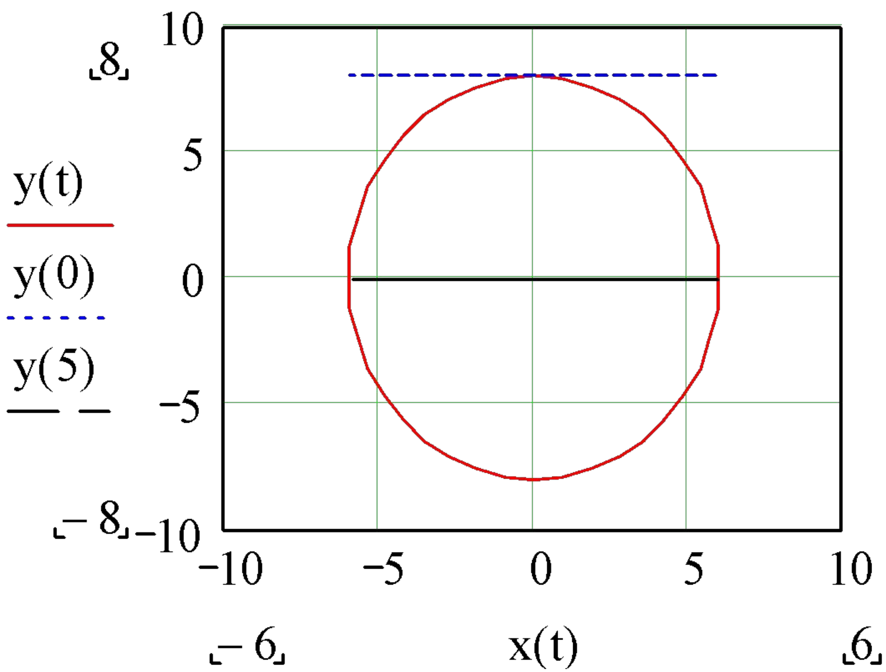
$$a_n(5) = \sqrt{a(5)^2 - a_\tau(5)^2} = a(5) = 14,804$$

Определим радиус кривизны траектории точки.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}\Bigg| \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

$$\rho(5) = \frac{v(5)^2}{a_n(5)} = \frac{12,566^2}{14,804} = 10,666.$$

$$x(t) := 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) \qquad y(t) := 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)$$



$$x(t) := 6\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 5\cdot t}{2}\right) \qquad y(t) := 8\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot 5\cdot t}{2}\right)$$

Given

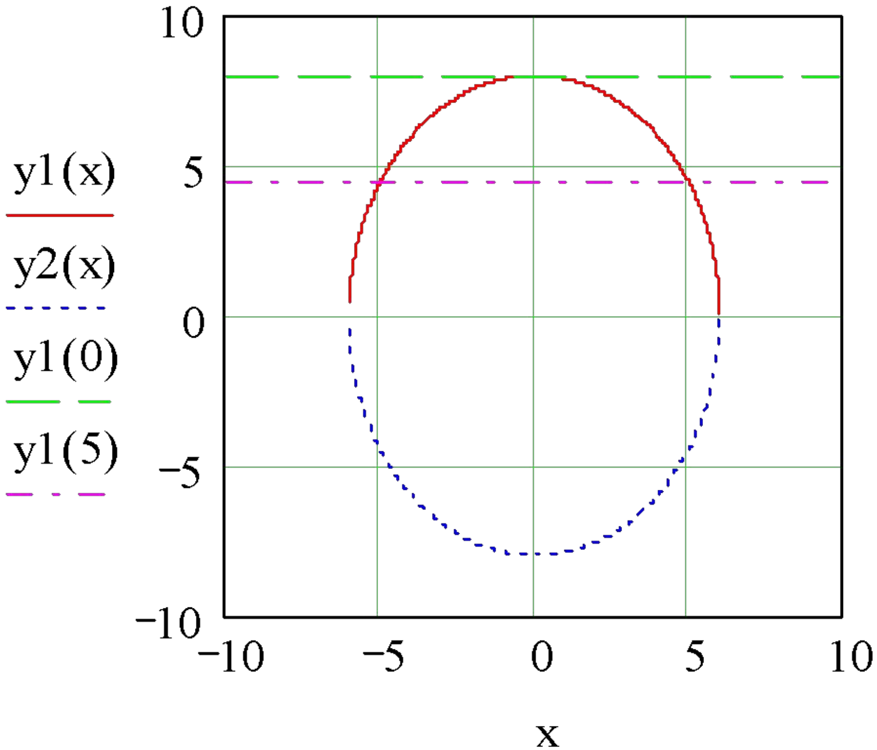
$$\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{8}\right)^2 = 1$$

$$\text{Find}(y) \rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{4}{3}\cdot\left(-x^2+36\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{-4}{3}\cdot\left(-x^2+36\right)^{\frac{1}{2}} \end{matrix}\right]$$

$$y1(x) := \frac{4}{3}\cdot\left(-x^2+36\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y2(x) := \frac{-4}{3}\cdot\left(-x^2+36\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x := -10, -9.99 .. 10$$



Решить самостоятельно

Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям

$$x = 2\cos 4t \text{ м}; \quad y = 2\sin 4t \text{ м}; \quad z = 2t \text{ м}.$$

Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ:

$$\rho = 2\frac{1}{8} \text{ м}.$$

Решение с использованием пакета Mathcad

$$x(t) := 2\cdot\cos(4t)$$

$$y(t) := 2\cdot\sin(4\cdot t)$$

$$z(t) := 2\cdot t$$

$$vx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow -8\cdot\sin(4\cdot t)$$

$$vy(t) := \frac{d}{dt}y(t) \rightarrow 8\cdot\cos(4\cdot t)$$

$$vz(t) := \frac{d}{dt}z(t) \rightarrow 2$$

$$v(t) := \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2 + vz(t)^2} \rightarrow 2\cdot\left(16\cdot\sin(4\cdot t)^2 + 16\cdot\cos(4\cdot t)^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$ax(t) := \frac{d}{dt}vx(t) \rightarrow -32\cdot\cos(4\cdot t)$$

$$ay(t) := \frac{d}{dt}vy(t) \rightarrow -32\cdot\sin(4\cdot t)$$

$$az(t) := \frac{d}{dt}vz(t) \rightarrow 0$$

$$a(t) := \sqrt{ax(t)^2 + ay(t)^2 + az(t)^2} \rightarrow 32\cdot\left(\cos(4\cdot t)^2 + \sin(4\cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a\tau(t) := \frac{vx(t)\cdot ax(t) + vy(t)\cdot ay(t) + vz(t)\cdot az(t)}{v(t)} \rightarrow 0$$

$$an(t) := \sqrt{a(t)^2 - a\tau(t)^2} \rightarrow 32\cdot\left(\cos(4\cdot t)^2 + \sin(4\cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(t) := \frac{v(t)^2}{an(t)} \rightarrow \frac{1}{32}\cdot\frac{\left(64\cdot\sin(4\cdot t)^2 + 64\cdot\cos(4\cdot t)^2 + 4\right)}{\left(\cos(4\cdot t)^2 + \sin(4\cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos(4\cdot t)^2 + \sin(4\cdot t)^2 \text{ simplify } \rightarrow 1$$

$$\rho(t) := \frac{v(t)^2}{an(t)} \to \frac{1}{32} \cdot \frac{\left(64 \cdot \sin(4 \cdot t)^2 + 64 \cdot \cos(4 \cdot t)^2 + 4\right)}{\left(\cos(4 \cdot t)^2 + \sin(4 \cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{32} \cdot \frac{\left(64 \cdot \sin(4 \cdot t)^2 + 64 \cdot \cos(4 \cdot t)^2 + 4\right)}{\left(\cos(4 \cdot t)^2 + \sin(4 \cdot t)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \text{ simplify } \to \frac{17}{8}$$

$$\rho(t) := \frac{17}{8}$$

$$\rho(1) = 2.125$$

5. Естественный способ задания движения точки

В чём заключается естественный способ задания движения точки?

Если известна траектория движения точки, то применяют естественный способ задания движения точки.

Для этого на траектории выбирают начальную точку и задают положительное и отрицательное направления отсчёта дуговой координаты *s*, которая и определяет положение движущейся точки, рис. 6.

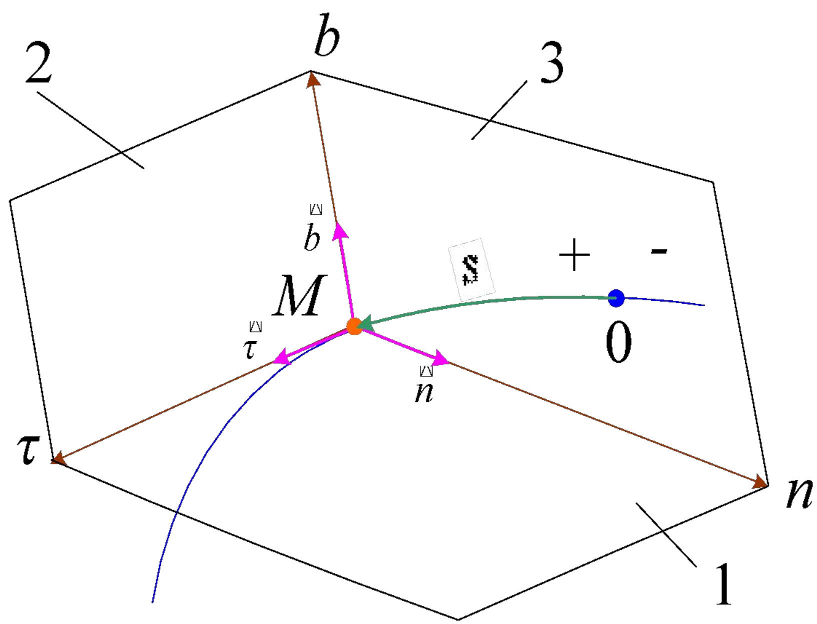


Рис. 6

Дуговая координата является функцией времени. Закон изменения дуговой координаты $s = f(\mathrm{t})$ является уравнением движения точки при естественном способе задания движения точки.

В некоторых случаях дуговую координату представляют в виде функций скорости $s = f_1(v)$ или координаты $s = f_2(s)$.

Как определяется путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени при естественном способе задания движения точки?

Если начало движения точки совпадает с началом отсчёта, то пройденный точкой путь за промежуток времени от t_0 до t_1 равен:

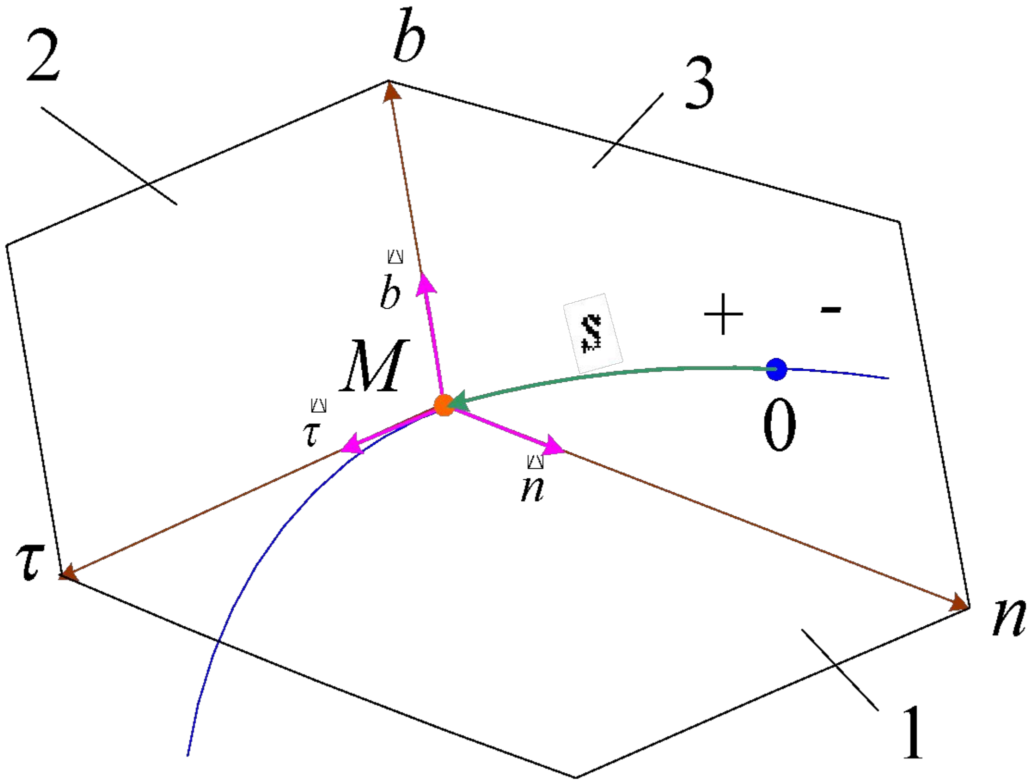
$$\sigma = \int_{t_0}^{t_1} |v| dt.$$

Если точка движется из начала отсчёта только в положительном направлении отсчёта или только в отрицательном, то пройденный точкой путь равен модулю её дуговой координаты:

$$\sigma = |s|.$$

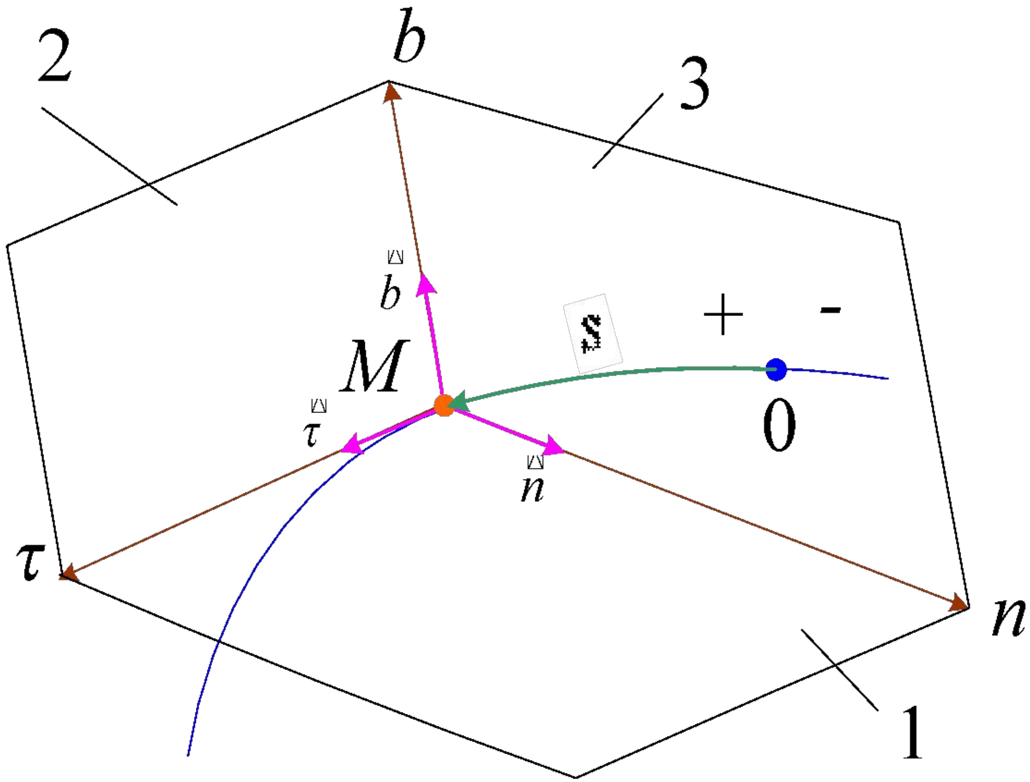
Какие оси применяют при естественном способе задания движения точки?

При естественном способе задания движения точки применяют естественные оси координат: касательную τ (направлена по касательной к траектории), нормаль n (направлена перпендикулярно касательной; проходит через центр кривизны траектории) и бинормаль b (перпендикулярная касательной и нормали), рис. 6.



Как называется плоскость, проходящая через касательную и нормаль?

Эта плоскость называется соприкасающейся (плоскость 1).



Как называется плоскость, проходящая через касательную и бинормаль?

Эта плоскость называется спрямляющей (плоскость 2).

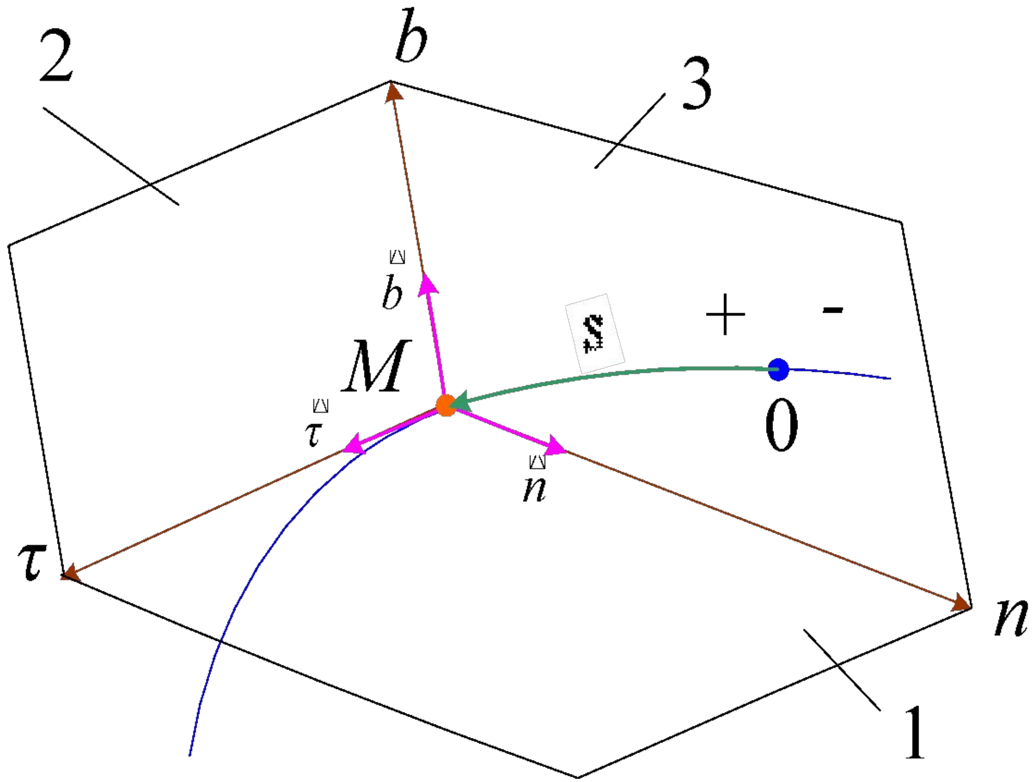


Рис. 6

Как называется плоскость, проходящая через нормаль и бинормаль?

Эта плоскость называется нормальной (плоскость 3).

Естественные оси неподвижные или перемещаются?

Естественные оси являются подвижными и перемещаются в пространстве вместе с точкой. Начало естественных осей всегда совпадает с движущейся точкой.

Чему равна скорость точки при естественном способе задания движения точки?

Скорость точки при естественном способе задания движения точки равна:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\, v,$$

где $v = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$ – проекция скорости на ось τ;

$\vec{\tau}$ – единичный вектор (орт), направленный по касательной к траектории точки в сторону положительного отсчёта дуговой координаты s.

Как направлена скорость точки?

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории (совпадает с осью τ). Если $v > 0$, то точка движется в сторону возрастания дуговой координаты, если $v < 0$, – в сторону убывания дуговой координаты. На рис. 7 приведен пример положительного направления вектора скорости точки.

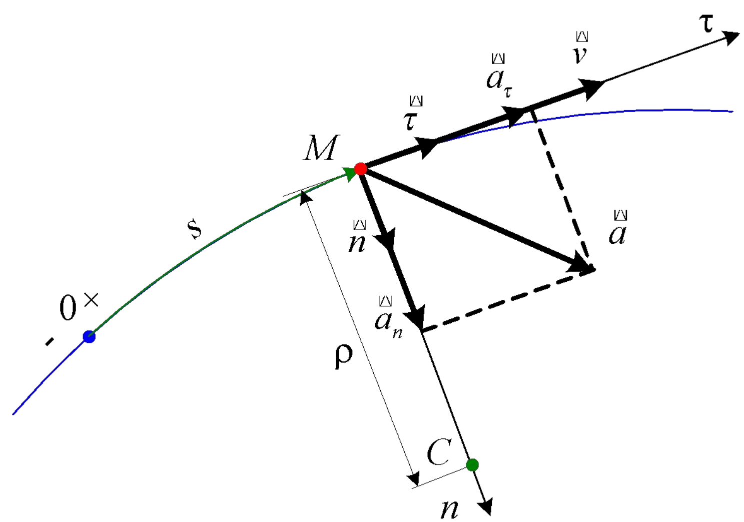


Рис. 7

Чему равно ускорение точки при естественном способе задания её движения?

При естественном способе задания движения ускорение точки равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Чему равно касательное ускорение точки?

Касательное ускорение точки равно:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\, a_\tau ,$$

где a_τ – проекция ускорения точки на ось τ; равна производной:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

Что характеризует касательное ускорение точки?

Касательное ускорение точки характеризует изменение вектора скорости по величине.

Чему равно нормальное ускорение точки?

Нормальное ускорение точки равно:

$$\vec{a}_n = \vec{n} a_n,$$

где a_n – проекция ускорения точки на ось n; определяется по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Здесь ρ – радиус кривизны траектории точки.

Какие свойства имеет нормальное ускорение?

Нормальное ускорение всегда положительное. При прямолинейном движении точки или в местах перегиба траектории, где $\rho = \infty$, нормальное ускорение равно нулю.

Чему равен модуль ускорения точки?

Модуль ускорения точки равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Как определяется направление ускорения точки в соприкасающейся плоскости?

Направление ускорения точки в соприкасающейся плоскости определяется углом а между этим вектором и нормалью:

$$\tan\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Как определяется касательное ускорение при координатном способе задания движения точки?

При координатном способе задания движения точки касательное ускорение определяется по формуле:

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v},$$

где знак плюс, полученный после вычисления дроби, соответствует ускоренному движению точки, а знак минус – замедленному.

Какой вид имеет уравнение равномерного движения точки при естественном способе задания её движения?

$$s = s_0 + v_0 t.$$

Какой вид имеют уравнение равнопеременного движения и скорость точки при естественном способе задания её движения?

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2};$$

$$v = v_0 + a_\tau t.$$

5.1. Решение задач

1. Точка движется по траектории согласно уравнению

$$s = 15 + 4\sin \pi t.$$

Указать ближайший после начала движения момент времени t_1, при котором s_1 = 17 м.

Ответ: 0,167

Решение

Подставим t_1 и s_1 в уравнение движения точки.

$$s_1 = 15 + 4\sin \pi t_1.$$

Получили алгебраическое уравнение, в котором неизвестной величиной является время t_1.

Решаем это уравнение.

$$s_1 = 15 + 4\sin \pi t_1;$$

$$\frac{s_1 - 15}{4} = \sin \pi t_1;$$

$$\pi t_1 = \arcsin\left(\frac{s_1 - 15}{4}\right);$$

$$t_1 = {\arcsin\left(\frac{s_1 - 15}{4}\right)} \Big/ {\pi} \quad ;$$

Подставим числовые значения.

$$t_1 = {\arcsin\left(\frac{s_1 - 15}{4}\right)}\Big/{\pi};$$

$$t_1 = \frac{\arcsin\left(\frac{17-15}{4}\right)}{\pi} = \frac{\arcsin(0{,}5)}{\pi} = \frac{\pi}{6\cdot\pi} = \frac{1}{6} = 0{,}167 \text{ c.}$$

Решение с использованием системы MATHCAD

$$s := 17$$

Given

$$s = 15 + 4\cdot\sin(\pi\cdot t)$$

$$t := \mathrm{Find}(t) \rightarrow \frac{1}{6}$$

$$t = 0.167$$

2. Точка движется по траектории согласно уравнению

$$s = 0,5t^2 + 4t.$$

Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет 10 м/с.

Ответ: 6

Решение

Скорость точки равна:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(0,5t^2 + 4t\right)}{dt} = t + 4.$$

$$v = t + 4.$$

Отсюда найдём: $$t = v - 4.$$

Подставим заданную скорость:

$$t = 10 - 4 = 6 \text{ с.}$$

3. Точка движется по заданной траектории со скоростью v = 5 м/с. Определить криволинейную координату s точки в момент времени t = 18 с, если при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 26$ м.

Ответ: 116

Движение точки задано естественным способом. Движение равномерное. Поэтому:

$$s = s_0 + vt.$$

Подставим в уравнение движения заданные величины:

$$s = 26 + 5 \cdot 18 = 116 \text{ м.}$$

4. Точка движется по кривой со скоростью $v = 0{,}5t$ м/с. Определить её координату в момент времени $t = 10$ с, если при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

Ответ: 25

Решение

Движение точки задано естественным способом. Движение равнопеременное.

Представим скорость в виде дифференциального уравнения и найдём уравнение движения точки.

$$v = \frac{ds}{dt} = 0,5t;$$

Разделим переменные.

$$ds = 0,5tdt;$$

Интегрируем это уравнение, учитывая начальные условия.

$$\int_{s_0}^{s} ds = 0,5\int_{0}^{t} tdt;$$

$$s - s_0 = 0,5\frac{t^2}{2} = 0,25t^2;$$

$$s = s_0 + 0,25t^2;$$

По условию $s_0 = 0$, поэтому

$$s = 0,25t^2;$$

Подставим в уравнение движения заданное время:

$$s = 0,25t^2 = 0,25\cdot 10^2 = 25$$ м.

5. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат:

$$x = 3\cos t; \quad y = 3\sin t.$$

Определить момент времени, когда криволинейная координата точки s = 110 м, если при t = 0 s_0 = 0 и точка движется в положительном направлении координаты s.

Ответ: 2,33

Решение

Дуговая координата точки равна:

$$s = \int_{s_0}^{s} ds = \int_{s_0}^{s} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Найдём дифференциалы координат:

$$dx = -3\sin t\,dt; \quad dy = 3\cos t\,dt.$$

Подставим дифференциалы в формулу дуговой координаты и найдём уравнение движения точки естественной форме:

$$s = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^t \sqrt{(3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\,dt = \int_0^t 3dt = 3t;$$

$$s = 3t.$$

Из уравнения движения точки время

$$t = \frac{s}{3}.$$

Подставим заданную величину дуговой координаты

$$t = \frac{s}{3} = \frac{7}{3} = 2,33$$

6. Точка движется по окружности согласно уравнению:

$$s = t^3 + 2t^2 + 3t.$$

Определить криволинейную координату точки в момент времени, когда её касательное ускорение $a_\tau = 16$ м/с^2.

Ответ: 22

КОНЕЦ