ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского»

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Методические указания для практических занятий
и самостоятельной работы по теоретической механике

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток
2011

Содержание

1. Основные понятия и определения

1.1. Поступательное движение

Какое движение тела называется поступательным?

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная через две точки тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению, рис.1, 2.

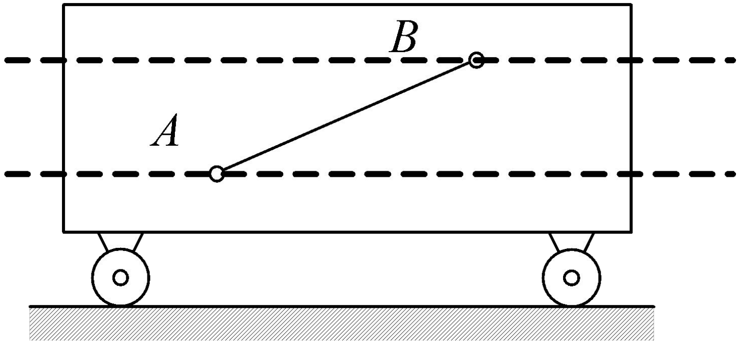


Рис. 1

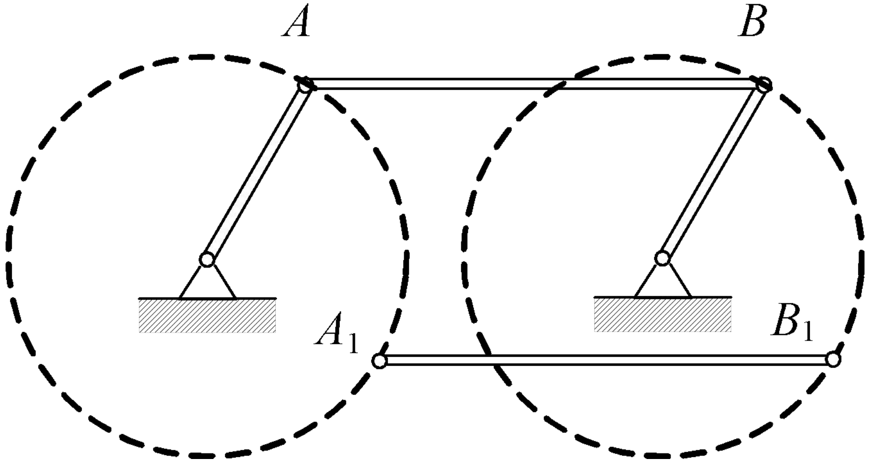


Рис. 2

Какие траектории могут иметь точки тела при поступательном движении?

Точки поступательно движущегося тела могут иметь траектории любого вида: прямолинейные и криволинейные, рис. 1 – 3.

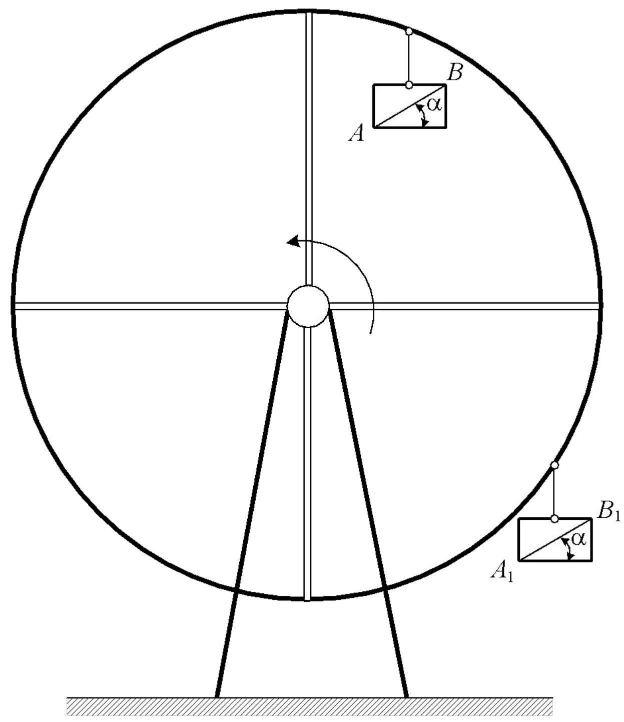


Рис. 3

Сформулируйте теорему, которая характеризует свойства поступательного движения тела.

Свойства поступательного движения тела определяются следующей теоремой: при поступательном движении тела все его точки описывают геометрически одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Что следует из теоремы о поступательном движении тела?

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной из его точек. Следовательно, изучение кинематики поступательного движения сводится к задаче кинематики точки, нами уже рассмотренной.

Поэтому для задания поступательного движения твёрдого тела достаточно знать параметрические уравнения движения произвольной точки тела. На практике обычно задают параметрические уравнения движения центра тяжести тела.

$$x_C = f_1(t)\ ;\ y_C = f_2(t)\ ;\ z_C = f_3(t). \tag{1}$$

1.2. Вращательное движение тела

Какое движение тела называется вращательным?

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются во время движения неподвижными, рис. 4.

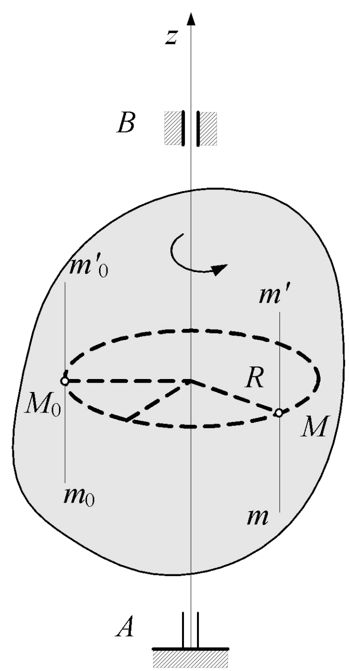


Рис. 4

Каким образом задаётся положение тела при вращательном движении?

Положение тела при вращательном движении задаётся углом ϕ между неподвижной полуплоскостью *P* и подвижной полуплоскостью *Q*, связанной с телом, рис. 5.

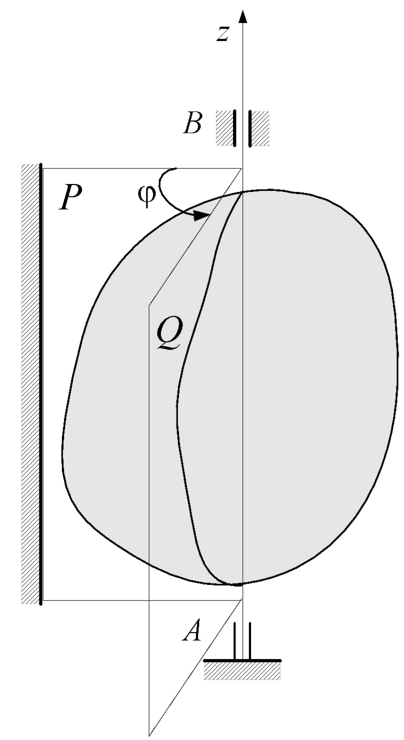


Рис. 5

Как принимается знак угла ϕ?

Угол ϕ принимается положительным, если со стороны положительного направления оси вращения видно, что тело вращается против хода часовой стрелки. В противном случае угол ϕ считается отрицательным

В каких единицах измеряется угол поворота тела ϕ?

Угол ϕ измеряется в радианах, градусах или оборотах. Уравнение вращения тела в общем виде имеет такой вид:

$$\varphi = f(t) \tag{2}$$

Что называется угловой скоростью тела?

Угловой скоростью тела называется алгебраическая величина, характеризующая быстроту и направление вращения тела.

Как определяется угловая скорость тела?

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота тела.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Что определяет знак угловой скорости тела?

Знак ω определяет направление вращения тела. Если $\omega > 0$, то, вращение тела со стороны положительного направления оси происходит против хода часовой стрелки; если $\omega < 0$ то, вращение тела со стороны положительного направления оси происходит по ходу часовой стрелки.

Какую размерность имеет угловая скорость?

Размерность угловой скорости равна радиан/время или 1/время. Так как радиан – величина безразмерная, то единица измерения угловой скорости обычно записывается так: 1/с.

Что называется угловым ускорением тела?

Угловым ускорением тела называется величина, которая характеризует изменение угловой скорости с течением времени.

Как определяется угловое ускорение тела?

Угловое ускорение тела равно первой производной по времени от угловой скорости тела, или второй производной по времени от угла поворота тела.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (4)$$

Какую размерность имеет угловое ускорение тела?

Размерность углового ускорения будет 1/время^2, единица измерения ускорения обычно записывается так: 1/с^2.

Когда вращение тела будет ускоренным, а когда замедленным?

Вращение тела будет ускоренным, если ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, когда знаки разные.

Если модуль ускорения со временем возрастает, то вращение тела называется ускоренным, а если убывает – замедленным.

Какое вращение тела называется равномерным?

Если угловая скорость тела во всё время движения остаётся постоянной (ω = const), то вращение тела называется равномерным.

Какой вид имеет уравнение равномерного вращения тела?

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \qquad (5)$$

Какое вращение тела называется равнопеременным?

Если угловое ускорение тела во всё время движения остаётся постоянным (ε = const), то вращение тела называется равнопеременным.

Какой вид имеет закон изменения угловой скорости при равнопеременном вращении тела?

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (6)$$

Какой вид имеет уравнение равнопеременного вращении тела?

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{7}$$

Когда вращение тела называется переменным вращением?

Вращение тела с переменным во времени ускорением называется переменным вращением. В этом случае ускорение тела может быть представлено в виде функций:

$$1)\ \varepsilon = f(t);\quad 2)\ \varepsilon = f(\phi);\quad 3)\ \varepsilon = f(\omega). \tag{8}$$

Как определить угловую скорость тела, если угловое ускорение является функцией времени?

$$\varepsilon = f(t); \Big| \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = f(t); \Big| \Rightarrow d\omega = f(t)dt; \Big| \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t f(t)dt; \Big| \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t f(t)dt. \tag{9}$$

Как получить уравнение вращения тела, если угловое ускорение является функцией времени?

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t f(t)\,dt; \Big| \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \int_0^t f(t)\,dt; \Big| \Rightarrow d\varphi = \omega_0 dt + \left(\int_0^t f(t)\,dt\right)dt; \Big| \Rightarrow$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \int_0^t \left(\int_0^t f(t)\,dt\right)dt \Big| \Rightarrow$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \int_0^t \left(\int_0^t f(t)\,dt\right)dt. \qquad (10)$$

Как определить угловую скорость тела, если угловое ускорение является функцией угла поворота?

$$\varepsilon = f(\varphi) \Big| \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = f(\varphi); \Big| \Rightarrow \frac{d\varphi\, d\omega}{dt} = f(\varphi)\,d\varphi; \Big| \Rightarrow \omega\, d\omega = f(\varphi)\,d\varphi; \Big| \Rightarrow$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi; \Big| \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi}. \qquad (11)$$

Как получить уравнение вращательного движения тела, если угловое ускорение является функцией угла поворота?

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi}; \Bigg| \Rightarrow \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi}} = dt; \Bigg| \Rightarrow$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi}} = \int_0^t dt.$$

Из последнего равенства определяют уравнение вращательного движения тела. Если интеграл в левой части равенства является простым алгебраическим выражением, то угол поворота тела представляют в виде функции от времени:

$$\varphi = f(t). \qquad (12)$$

Если интеграл в левой части равенства является трансцендентным выражением (угол ϕ в явном виде не выражается от *t*), то связь между временем и углом ϕ представляется трансцендентным уравнением:

$$f(\varphi, t) = 0. \qquad (13)$$

Это трансцендентное уравнение решается на ЭВМ и связь между ϕ и *t* представляется в виде таблицы или графика.

Как определить угловую скорость тела, если угловое ускорение является функцией угловой скорости?

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = f(\omega); \Rightarrow \frac{d\omega}{f(\omega)} = dt; \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{f(\omega)} = \int_0^t dt; \Rightarrow$$

Если интеграл в левой части последнего равенства – простое алгебраическое выражение то угловую скорость представляют в виде явной функции от *t*.

$$\omega = f(t). \qquad (14)$$

Как получить уравнение вращательного движения тела, если угловое ускорение является функцией угловой скорости?

$$\omega = f(t); \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = f(t); \Rightarrow d\varphi = f(t)\,dt; \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t f(t)\,dt; \Rightarrow$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t f(t)\,dt. \qquad (15)$$

По каким траекториям перемещаются точки тела, не лежащие на оси вращения?

Траекториями всех точек, не лежащих на оси вращения, являются окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси, рис. 6.

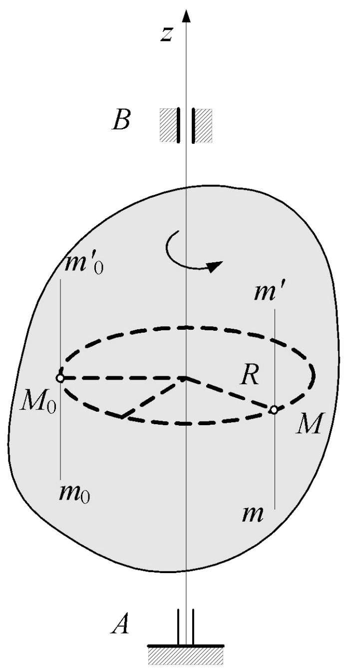


Рис. 6

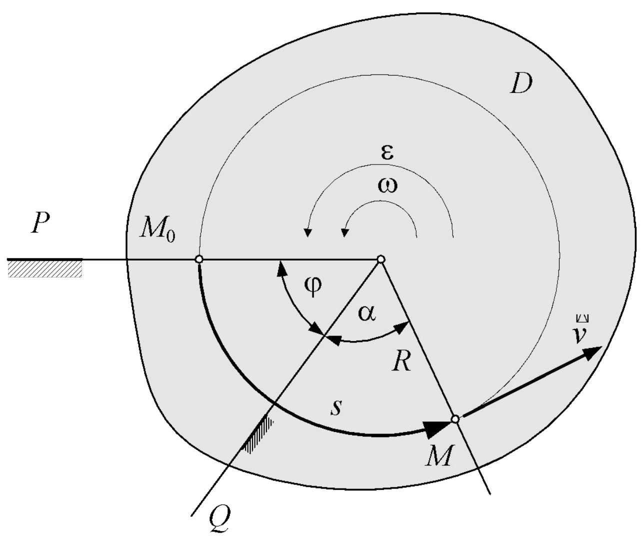


Рис. 7

Как определяется положение точки *M* на траектории?

Положение точки *M* на траектории определяется дуговой координатой *s*, начало которой совпадает с плоскостью *P*, рис. 7.

Запишите выражение дуговой координаты точки *M*, рис. 7.

Дуговая координата точки *M* равна:

$$s = R(\varphi + \alpha).$$

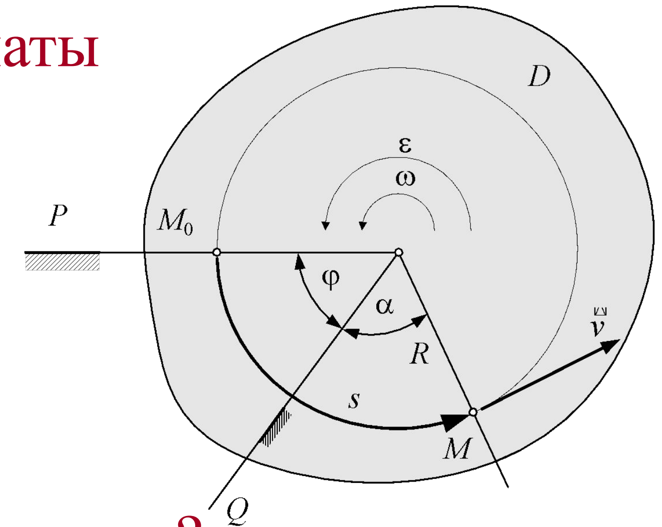


Рис. 7

Чему равна скорость точки вращающегося тела?

Скорость точки вращающегося тела равна произведению его угловой скорости на расстояние от этой точки до оси вращения и направлена перпендикулярно радиусу её траектории.

$$v = R\omega.$$

Чему равно касательное ускорение точки вращающегося тела?

$$a_\tau = R\varepsilon.$$

Чему равно нормальное ускорение точки вращающегося тела?

$$a_n = R\omega^2.$$

Чему равно полное ускорение точки вращающегося тела?

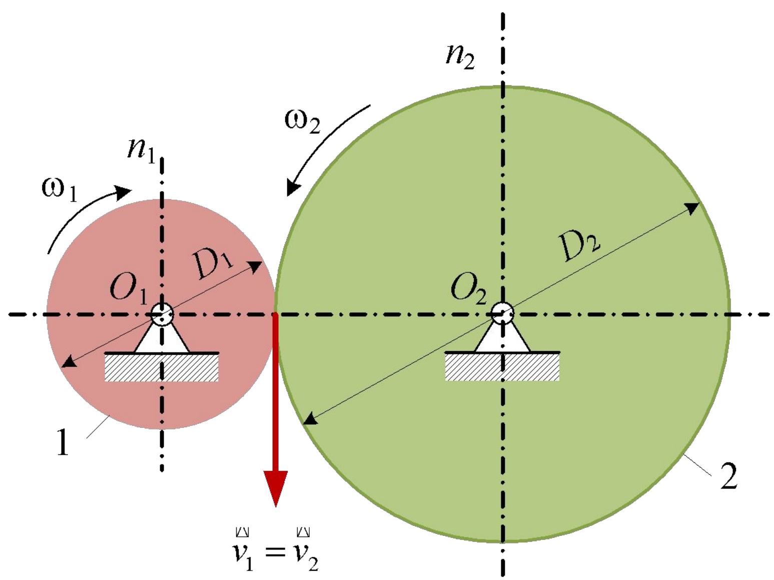
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\mathrm{n}^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

2. Передаточные механизмы

Для чего предназначены передаточные механизмы?

Передаточные механизмы предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого ведущим, к другому валу, называемому ведомым.

Как связаны между собой угловые скорости колёс фрикцион-ной или зубчатой передачи?

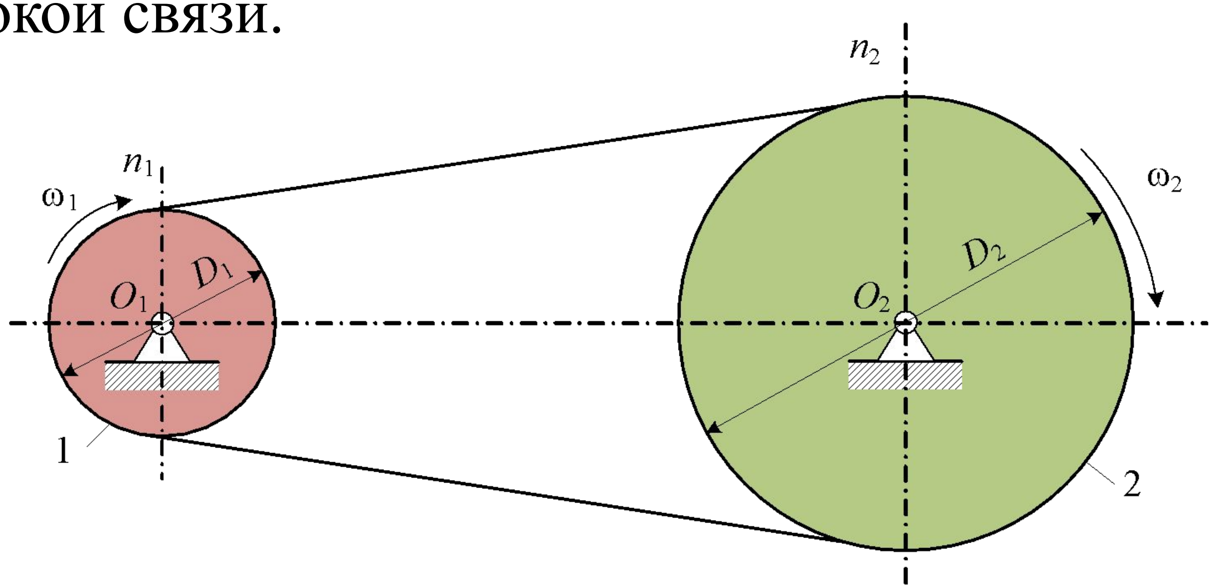


Угловые скорости колёс фрикционной или зубчатой передачи, их угловые ускорения и угловые перемещения обратно пропорциональны радиусам колёс.

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

где i – передаточное число.

Эта формула справедлива и для случая передачи вращения с помощью гибкой связи.



3. Решение задач

Пример 1. Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 минуты. Определить угловое ускорение.

Решение

Дано: $t = 2$ мин.; $\varepsilon = const$; $N = 3600$

Определить: ε.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$t = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad \omega_0 = 0.$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$\varphi = 2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2} \Bigg| \Rightarrow \varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3600}{(2 \cdot 60)^2} = \pi \left(1/c^2\right).$$

Пример 2. Маховое колесо радиуса R =2 м вращается равноускоренно из состояния покоя; через t = 10 с точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью v = 100 м/с.

Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента t = 15 с.

Решение

Дано: $R = 2$ м; $\varepsilon = const$; $v_1 = 100$ м/с; $t_1 = 10$ с; $t_2 = 15$ с.

Определить: $v(t_2),\ a_\tau(t_2),\ a_n(t_2)$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

$$\omega_0 = 0 \Big| \Rightarrow \omega = \varepsilon t.$$

$$v = \omega R \Big| \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}.$$

$$\frac{v}{R} = \varepsilon t \Big| \Rightarrow \varepsilon = \frac{v}{Rt}.$$

$$\varepsilon = \frac{v_1}{Rt_1} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \left(\text{рад/с}^2\right)$$

$$\omega(t_2) = \varepsilon t_2 = 5 \cdot 15 = 75 \left(\text{рад/с}\right)$$

$$v(t_2) = R\omega(t_2) = 2 \cdot 75 = 150 \left(\text{м/с}\right)$$

$$a_\tau(t_2) = R\varepsilon = 2\cdot 5 = 10\ (\text{м/с}^2)$$

$$a_n(t_2) = R\omega^2 = 2\cdot 75^2 = 11250\ (\text{м/с}^2)$$

Пример 3. С момента выключения мотора, пропеллер самолёта, вращавшийся с угловой скоростью, равной 40π рад/с, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

Решение

Дано: $\omega_0 = 40\pi$ рад/с; $\omega_1 = 0$; $\varphi = 80$ об; $\varepsilon < 0$

Определить: t_1 до остановки .

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

$$\omega(t_1) = 0 \Big| \Rightarrow \omega_0 - \varepsilon t_1 = 0 \Big| \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_0}{t_1}.$$

$$\varphi(t_1) = \varphi_0 + \omega_0 t_1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{2} = \omega_0 t_1 - \frac{\frac{\omega_0}{t_1} t_1^2}{2} = \omega_0 t_1 - \frac{\omega_0 t_1}{2} = \frac{\omega_0 t_1}{2}.$$

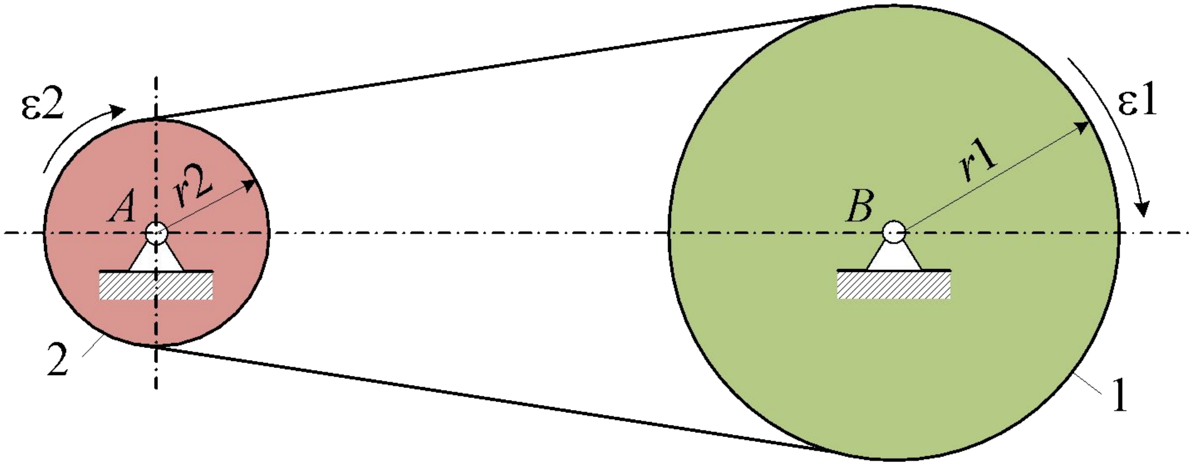
$$\varphi(t_1) = 2 \cdot \pi \cdot N.$$

$$2 \cdot \pi \cdot N = \frac{\omega_0 t_1}{2} \Bigg| \Rightarrow t_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot N}{\omega_0}.$$

$$t_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 80}{40 \cdot \pi} = 8\ c.$$

Пример 4. Станок со шкивом *A* приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнём от шкива *B* электромотора; радиус шкива r_1 = 75 см, r_2 = 30 см; после пуска в ход электромотора его угловое ускорение равно $\varepsilon = 0{,}4\pi$ рад/с^2.

Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить через сколько времени угловая скорость станка будет равной 10π рад/с.



Решение

Дано: $\omega_0 = 0$; $r_1 = 75$ см; $r_2 = 30$ см; $\varepsilon_1 = 0{,}4\pi$ рад/с^2; $\omega_2 = 10\pi$ рад/с.

Определить: t_1

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t.$$

$$\omega_1 = \varepsilon_1 t \;\Big|\Rightarrow t = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1}.$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}\;\Bigg|\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{r_1}.$$

$$t = \frac{\omega_2 \dfrac{r_2}{r_1}}{\varepsilon_1} = \frac{\omega_2 r_2}{\varepsilon_1 r_1}.$$

$$t = \frac{\omega_2 r_2}{\varepsilon_1 r_1} = \frac{10\pi}{0.4\pi} \cdot \frac{30}{75} = 10\ c.$$

Решить самостоятельно

1. Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при t = 3 с угловая скорость диска равна 27π рад/с.

Ответ: $\varphi = \pi t^3.$

2. Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 с он совершает 12,5 оборотов. Какова угловая скорость по истечении этих 5 с?

Ответ: $\omega = 10\pi.$

3. Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 мин после начала движения оно имеет угловую скорость, равную 4π рад/с. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 мин?

Ответ: $N = 600.(\quad)$

4. Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную скорость 2π рад/с; сделав 10 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках остановилось. Определить угловое ускорение ε колеса, считая его постоянным.

Ответ: $\varepsilon = 0{,}1\pi \left(1/\ ^{2}\right)$

5. Маховое колесо радиуса 0,5 м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 м/с. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

Ответ: $\omega = 38{,}2 \left(\text{мин}\ /\ \right)$

КОНЕЦ