ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Методические указания для практических занятий
и самостоятельной работы по теоретической механике

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток

2011

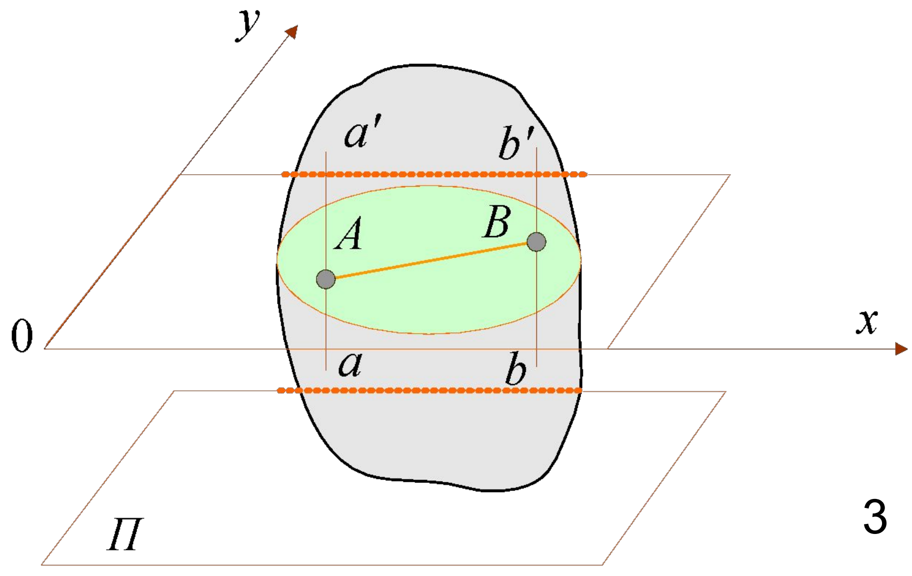
Содержание

1. Основные понятия и определения

1.1. Уравнения и характеристики плоскопараллельного движения тела

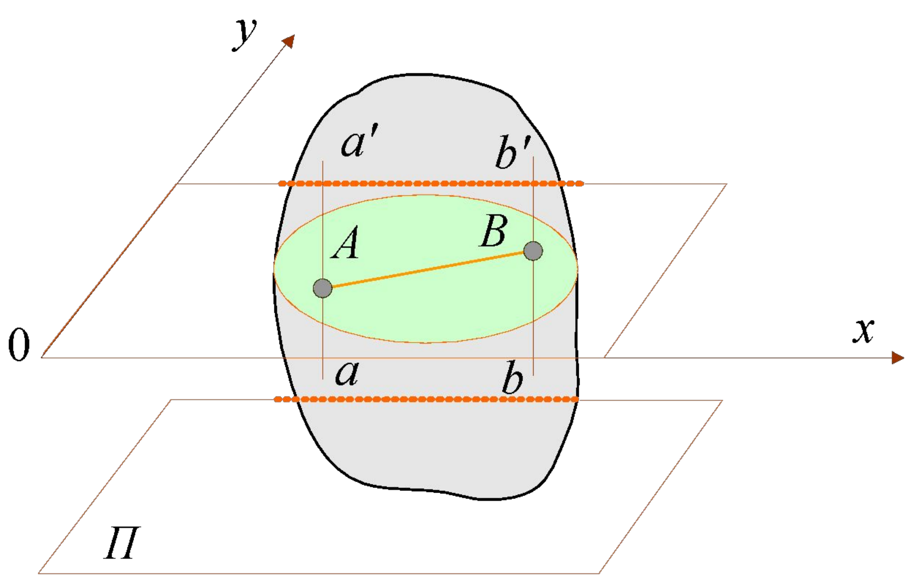
Какое движение тела называется плоскопараллельным?

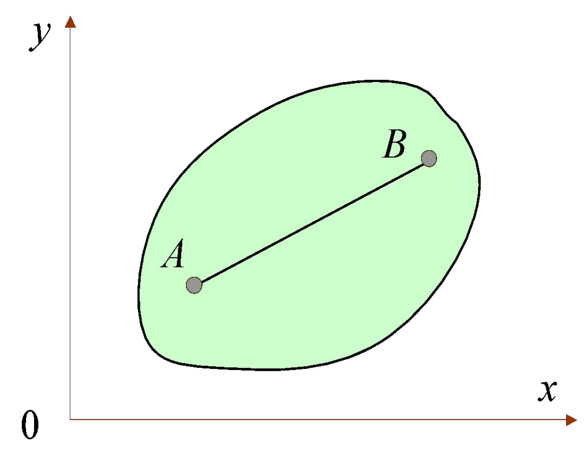
Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета.



Движение какого объекта достаточно исследовать для изучения плоского движения?

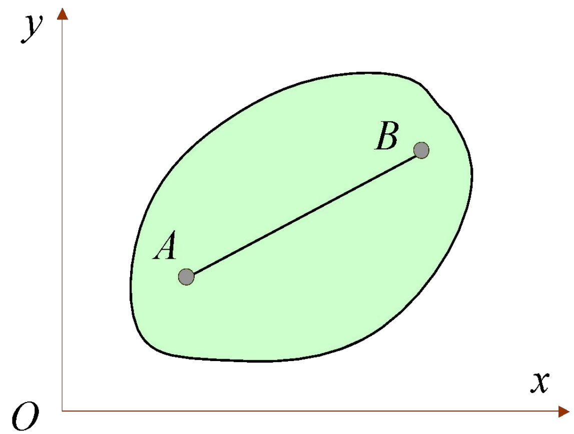
Для изучения плоского движения тела достаточно исследовать, как движется в плоскости *Oxy* сечение этого тела, образующее некоторую плоскую фигуру. Плоскость *Oxy* и сечение тела размещают вертикально в плоскости листа.

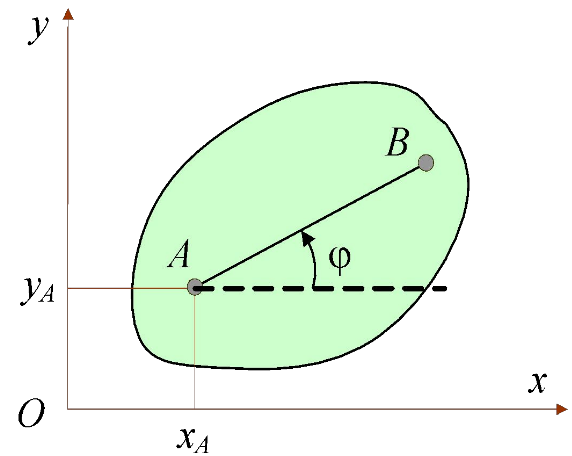




Чем определяется положение плоской фигуры при движении в плоскости *Oxy*?

Положение плоской фигуры в плоскости *Oxy* определяется положением какого-либо проведенного на этой фигуре отрезка *AB*.





В свою очередь, положение отрезка *AB* определяется координатами x_A, y_A произвольной точки *A* и величиной угла ϕ между отрезком *AB* и осью *x*. Точку *A*, выбранную для определения положения плоской фигуры, называют полюсом.

Какими уравнениями описывается движение плоской фигуры?

Закон движения плоской фигуры в ее плоскости, а следовательно, и плоского движения твердого тела относительно системы координат Oxy, определяется тремя уравнениями:

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t).$$

На какие два движения раскладывается плоскопараллельное движение тела?

Анализируя уравнения движения плоской фигуры, можно заключить, что движение плоской фигуры в ее плоскости представляет собой совокупность двух движений: поступательного движения, при котором все точки движутся так же, как и полюс A, и вращательного движения вокруг этого полюса (при этом фигура вращается вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости П).

Назовите основные кинематические характеристики плоского движения тела?

Основными кинематическими характеристиками плоского движения твердого тела являются скорость и ускорение полюса, а также угловая скорость и угловое ускорение тела: $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, ω, ε.

Какая точка выбирается за полюс?

В качестве полюса вообще можно выбирать любую точку фигуры. Как правило в задачах за полюс выбирают точку, кинематические характеристики которой можно определить по условию задачи.

Что изменяется при изменении полюса?

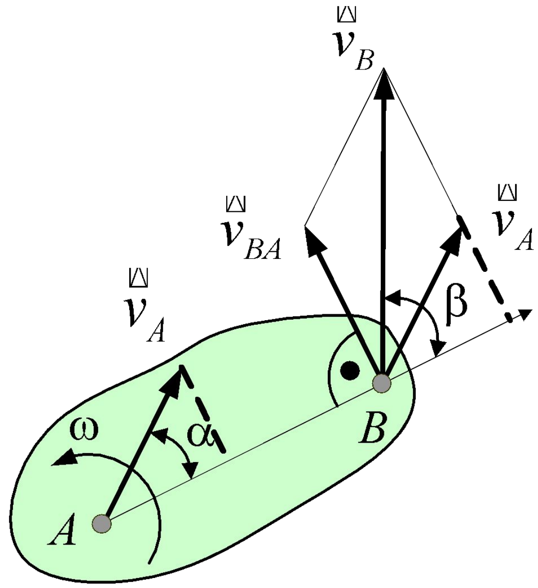
При изменении точки, выбираемой за полюс, характеристики поступательной части движения изменяются, а характеристики вращательной части движения ω и ε останутся неизменными, так как любая прямая, проведённая через две точки плоской фигуры при движении поворачивается на один и тот же угол.

1.2. Определение скоростей точек плоской фигуры

Чему равна скорость произвольной точки плоской фигуры?

Движение плоской фигуры можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса.

В соответствии с этим скорость произвольной точки *B* плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь точки *A*, принятой за полюс, и скорости, которую точка *B* получает при вращений фигуры вокруг этого полюса:



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

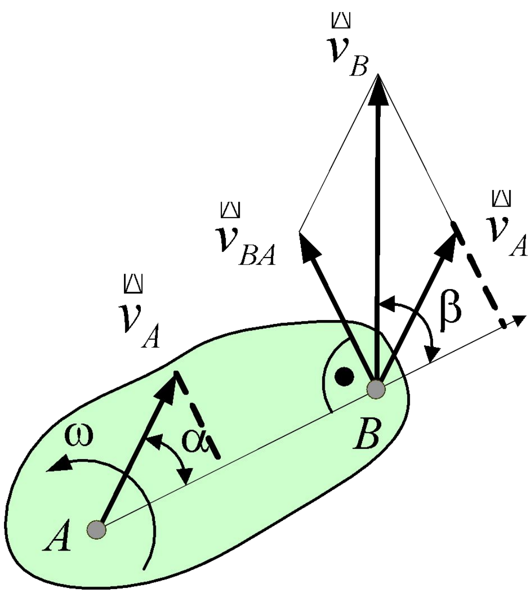
Приведенная формула называется формулой Эйлера.

Чему равна скорость точки *B* во вращательном движении вокруг полюса?

$$v_{BA} = \omega \cdot BA \quad \left(\vec{v}_{BA} \perp BA\right).$$

Как формулируется теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры?

Проекции скоростей двух точек твёрдого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.



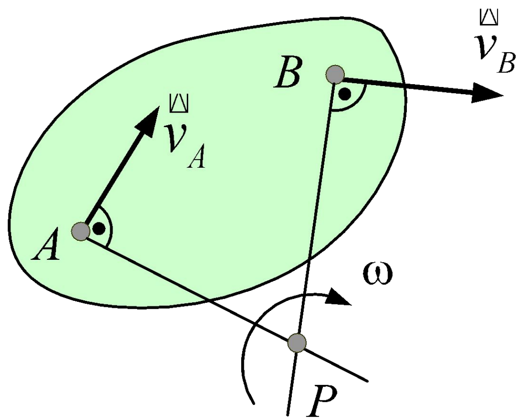
$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.$$

Что называется мгновенным центром скоростей?

Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

Как определяется положение мгновенного центра скоростей?

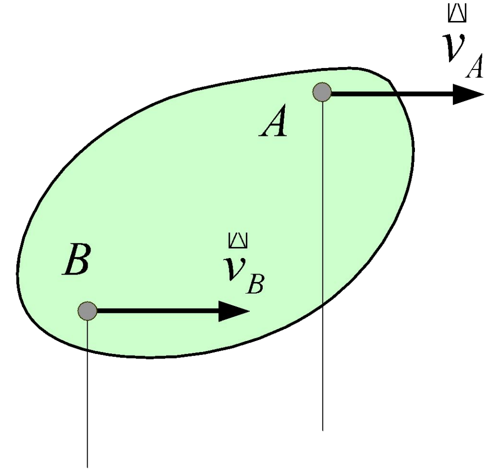
Мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей.



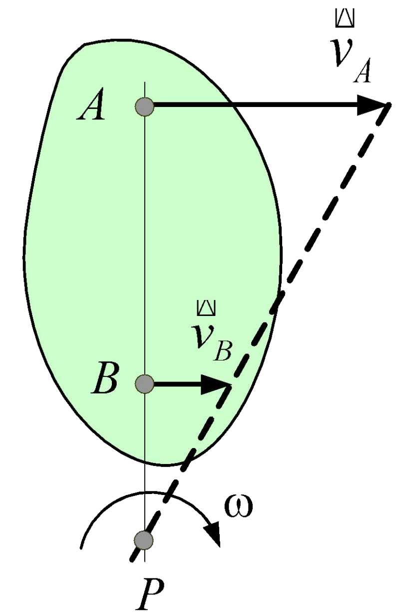
Скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \omega.$$

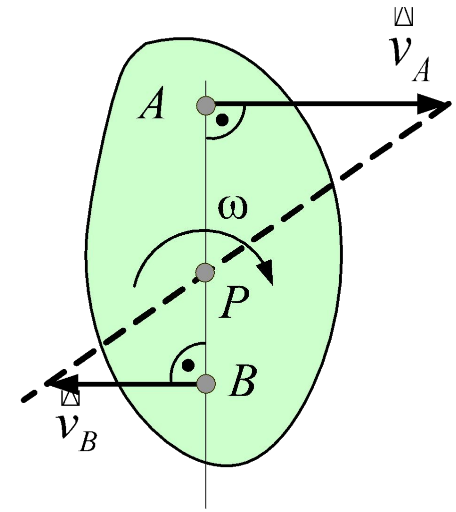
Если векторы скоростей параллельны, то мгновенного центра скоростей нет. Тело совершает мгновенное поступательное движение.



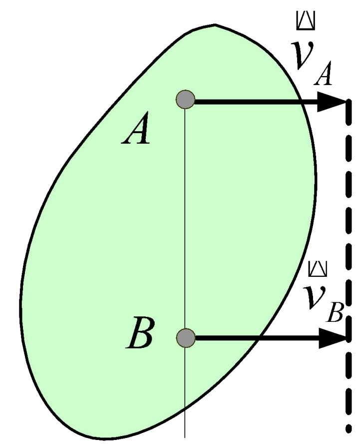
Если векторы скоростей параллельны, а перпендикуляры к векторам скоростей совпадают, то мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров и линии, проведённой через концы векторов скоростей.



Если векторы скоростей параллельны и противоположны, а перпендикуляры к векторам скоростей совпадают, то мгновенный центр скоростей находится между векторами скоростей на пересечении перпендикуляров и линии, проведённой через концы векторов скоростей.



Если векторы скоростей параллельны и равны, то мгновенного центра скоростей нет и тело совершает мгновенное поступательное движение.

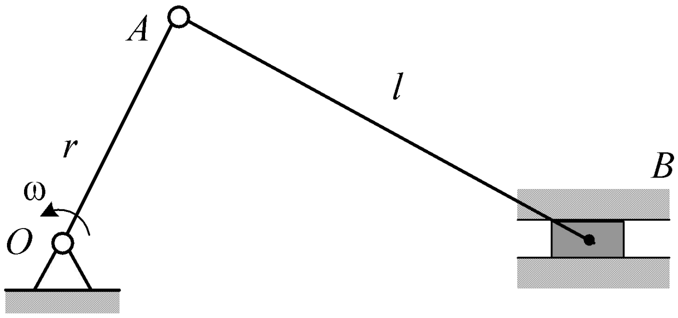


2. Решение задач

Пример 1

Дано: $r, l, \omega.$

Определить: $v_B.$



Решение

(Применение формулы Эйлера)

Графоаналитический способ

В кривошипно-шатунном механизме плоскопараллельное движение совершает шатун AB.

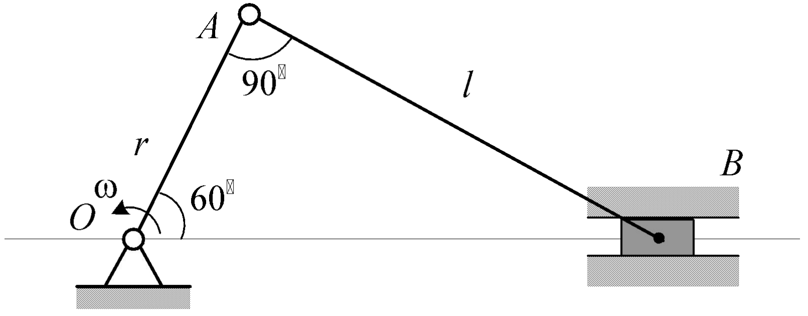
Примем точку A за полюс.

Для решения применим формулу Эйлера:

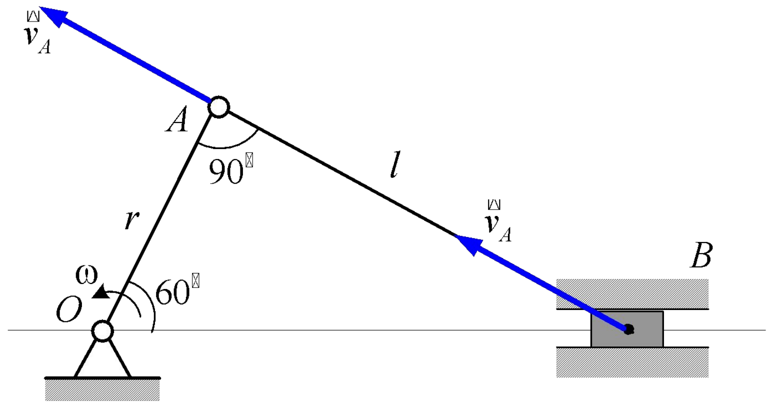
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Определим скорость полюса:

$$v_A = \omega r.$$

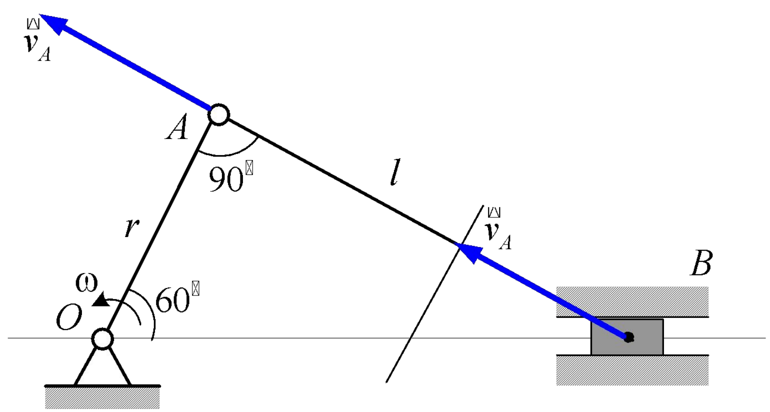


Для определения скорости точки B по формуле Эйлера из точки B отложим вектор скорости точки A.



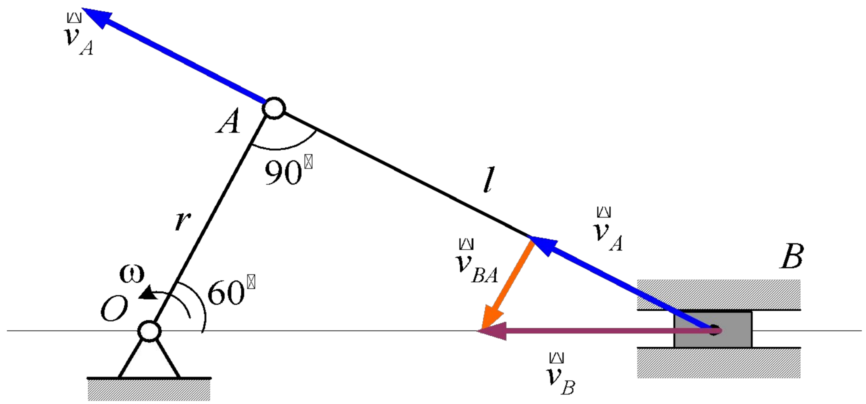
По условию задачи линия действия вектора $\vec{v}_B$ задана.

Линия вектора $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярна AB. Проведём через конец вектора $\vec{v}_A$ линию, перпендикулярную AB.



Точка, в которой эта линия пересеклась с линией действия вектора $\vec{v}_B$ в соответствии с формулой Эйлера является точкой окончания векторов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$.

Расставим стрелки векторов в соответствии с формулой Эйлера.

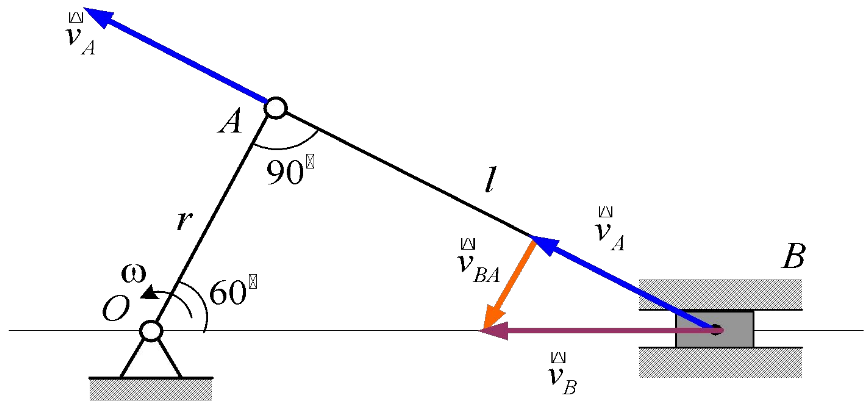


$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Из векторного треугольника найдём скорость точки *B*.

$$\cos 30^\circ = \frac{v_A}{v_B} \Bigg| \Rightarrow \qquad v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2\omega r}{\sqrt{3}}.$$

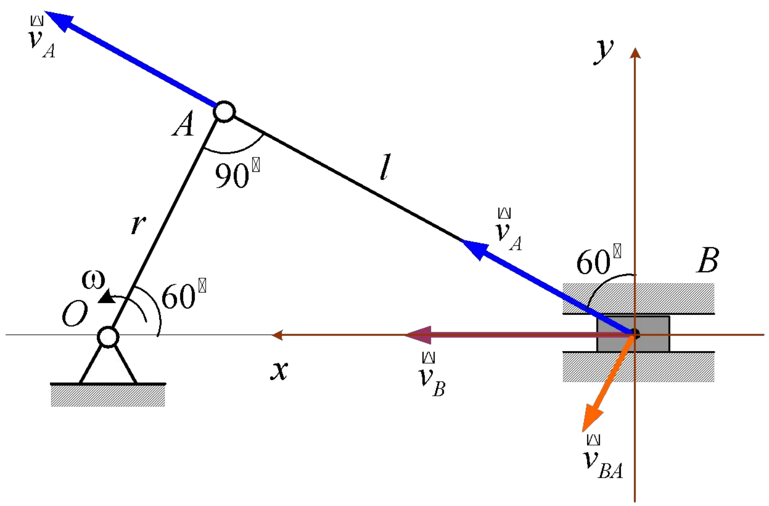
Попутно можно из треугольника найти скорость точки B во вращательном движении вокруг полюса A.



$$v_{BA} = v_B \sin 30° = \frac{2\omega r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\omega r}{\sqrt{3}}.$$

Аналитический способ

При аналитическом способе применения формулы Эйлера в точке B строятся векторы скоростей, линии действия которых заданы или определены.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Затем строятся декартовы координатные оси и формула Эйлера проецируется на эти оси:

на ось x : $v_B = v_A \cos 30^\circ + v_{BA} \cos 60^\circ;$

на ось y : $0 = v_A \cos 60^\circ - v_{BA} \cos 30^\circ.$

Из полученной системы уравнений находим неизвестные величины.

Из второго уравнения:

$$0 = v_A \cos 60^\circ - v_{BA} \cos 30^\circ$$

$$v_{BA} = \frac{v_A \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{2\omega r}{2\sqrt{3}} = \frac{\omega r}{\sqrt{3}}.$$

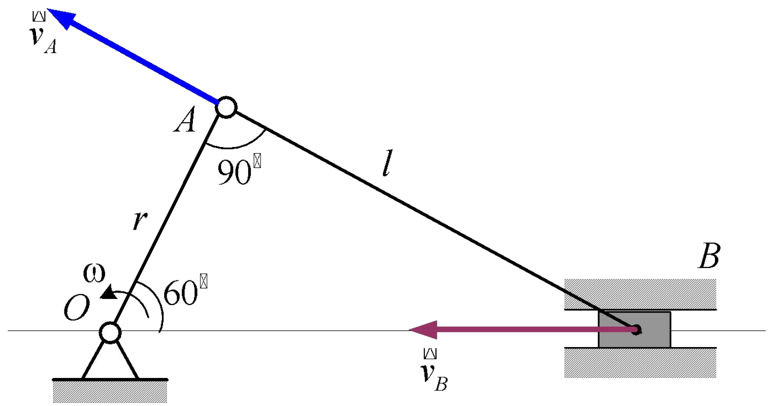
Подставляем v_{BA} в первое уравнение и найдём скорость точки B:

$$v_B = v_A \cos 30^\circ + v_{BA} \cos 60^\circ;$$

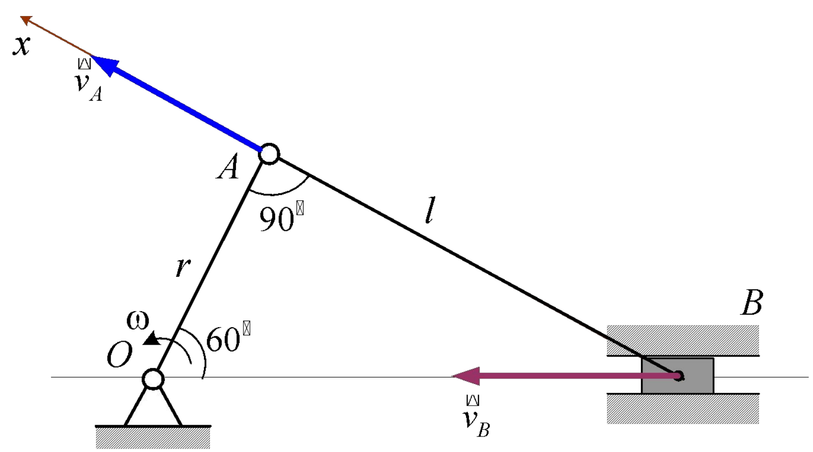
$$v_B = v_A \cos 30^\circ + \frac{\omega r}{\sqrt{3}} \cos 60^\circ = \frac{\omega r \sqrt{3}}{2} + \frac{\omega r}{2\sqrt{3}} = \frac{2\omega r}{\sqrt{3}}.$$

Применение теоремы о проекциях скоростей

Построим векторы скоростей точек *A* и *B*.



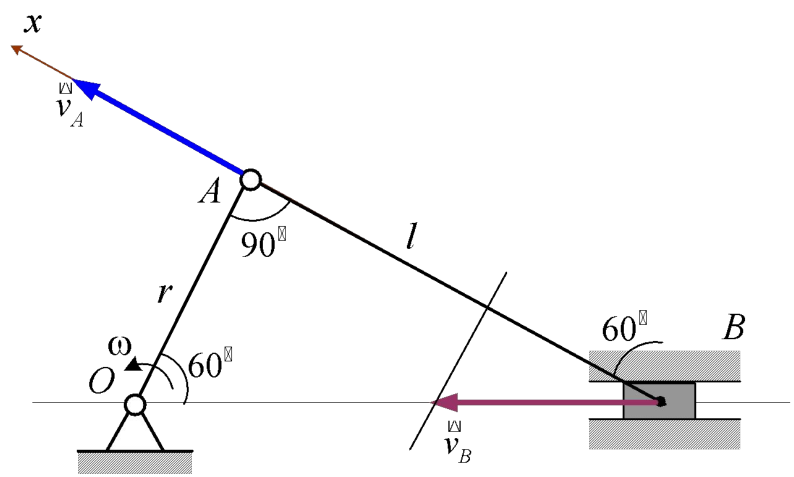
Через эти точки проведём ось *x*.



По теореме о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры:

$$\text{Пр}_x(\vec{v}_B) = \text{Пр}_x(\vec{v}_A).$$

Находим из рисунка проекции на ось x скоростей точек A и B и приравниваем их:



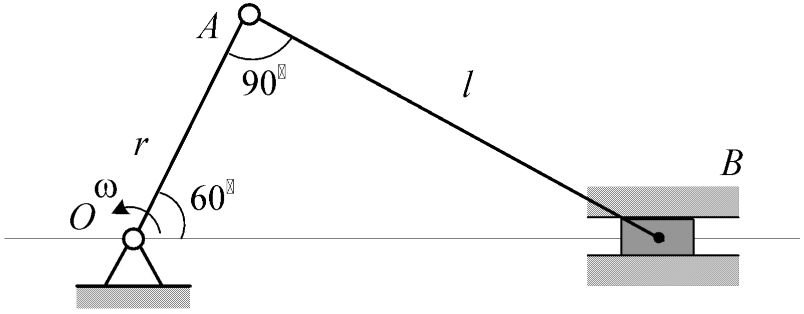
$$v_B \cos 30^\circ = v_A.$$

Скорость точки B равна:

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2\omega r}{\sqrt{3}}.$$

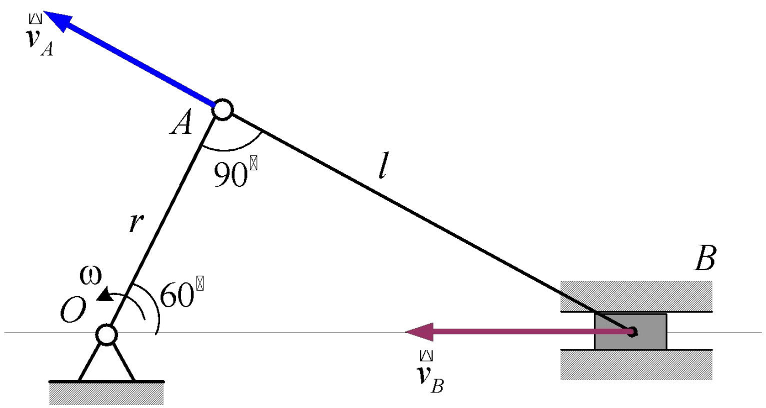
Определение скорости точки с помощью мгновенного центра скоростей

Определим скорость точки A:

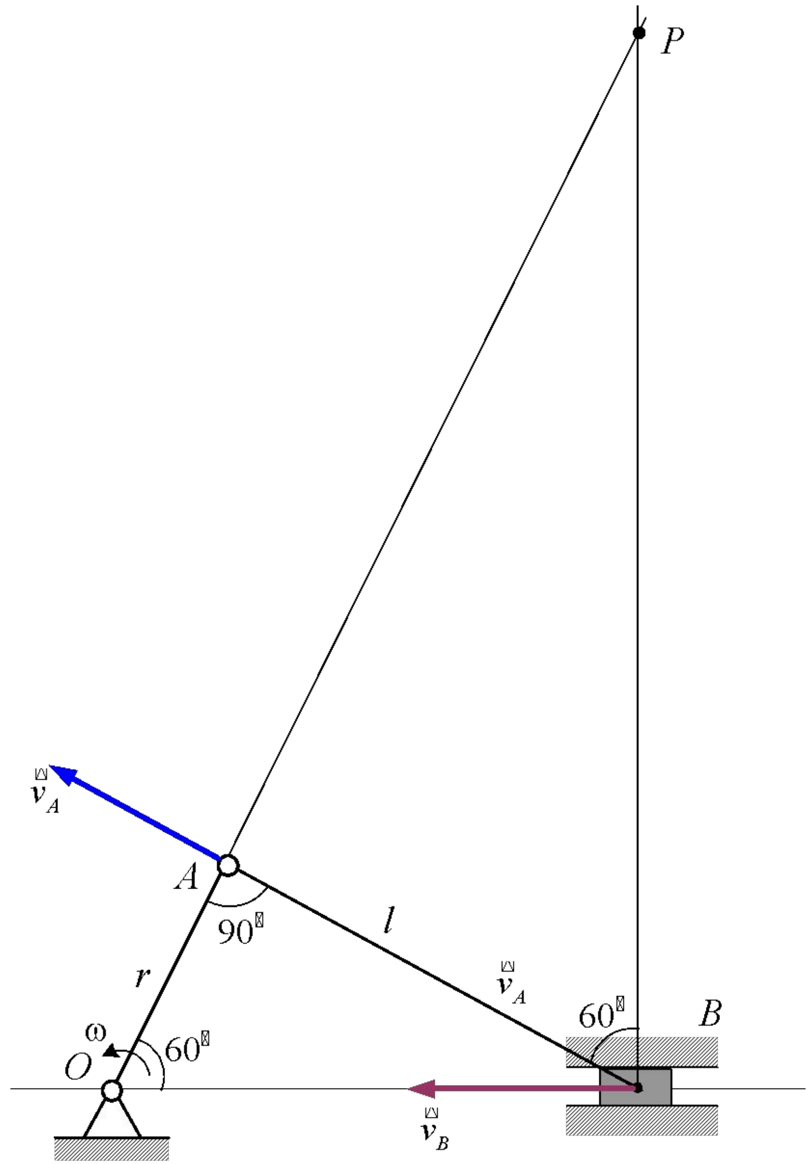


$$v_A = \omega r.$$

Построим векторы скоростей точек A и B.



Из точек *A* и *B* проведём перпендикуляры к векторам скоростей этих точек.



Точка пересечения перпендикуляров P – мгновенный центр скоростей.

Шатун AB совершает мгновенное вращательное движение вокруг МЦС. Угловая скорость вращения равна:

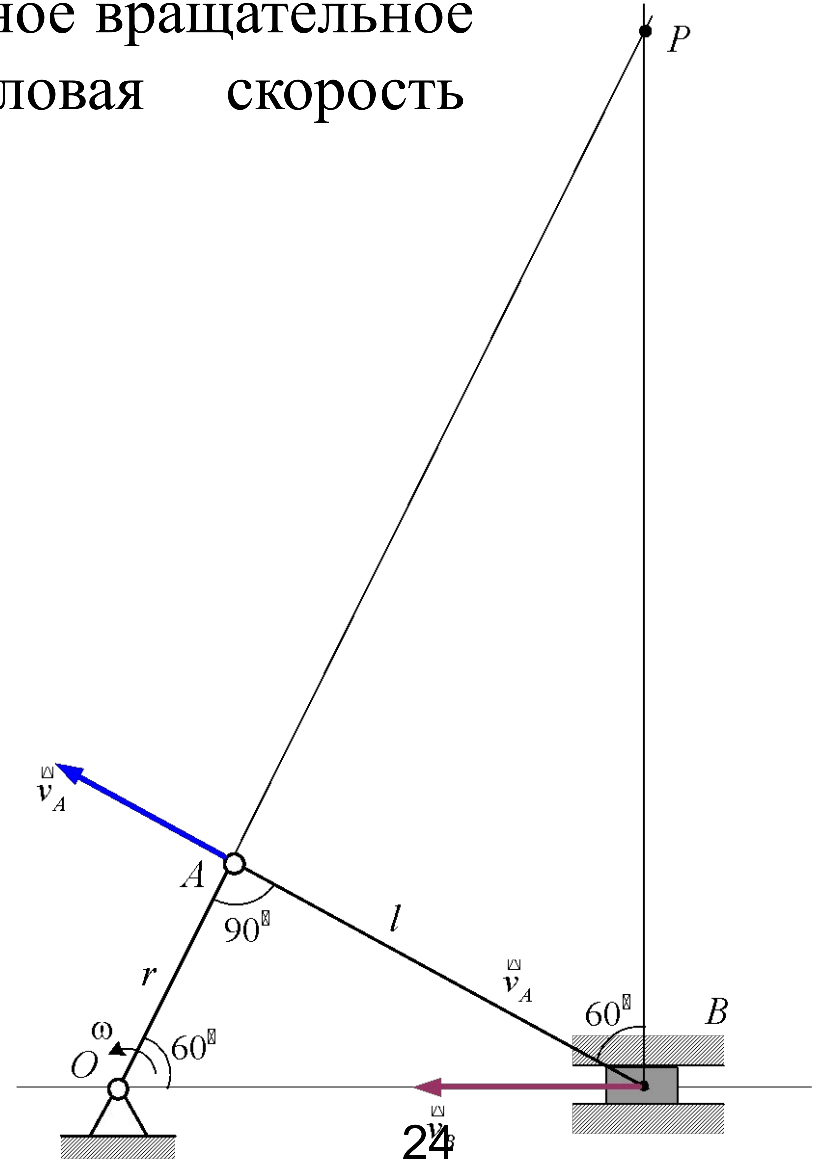
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Из этого равенства найдём:

$$v_B = \frac{v_A BP}{AP}.$$

Из треугольника ABP получим

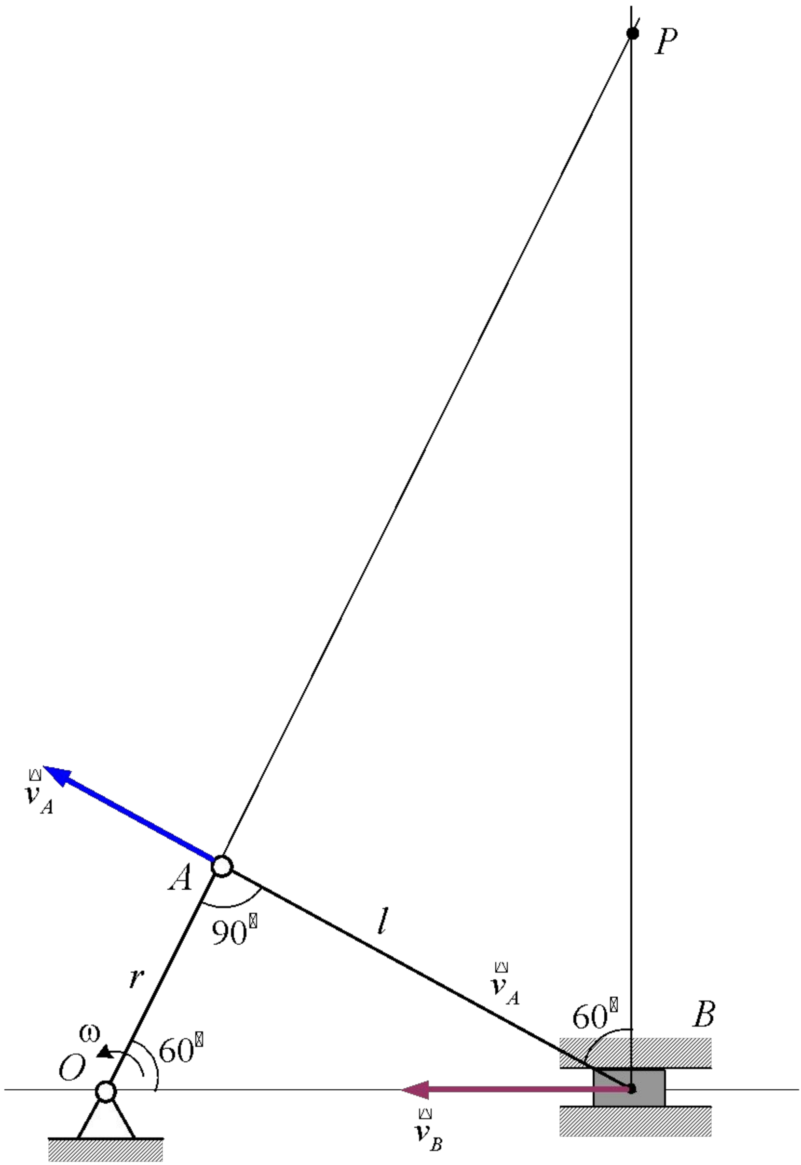
$$\frac{BP}{AP} = \frac{1}{\cos 30^\circ}.$$



Учитывая это равенство, найдём скорость точки B

$$\frac{BP}{AP} = \frac{1}{\cos 30^\circ}.$$

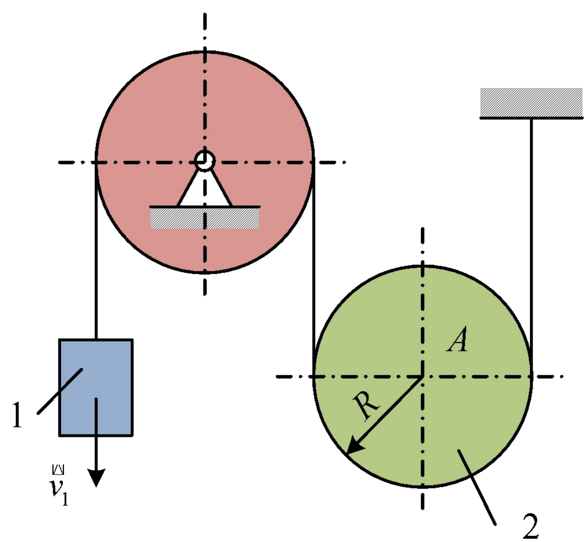
$$v_B = \frac{v_A BP}{AP} = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{2\omega r}{\sqrt{3}}.$$



3. Задачи для самостоятельного решения

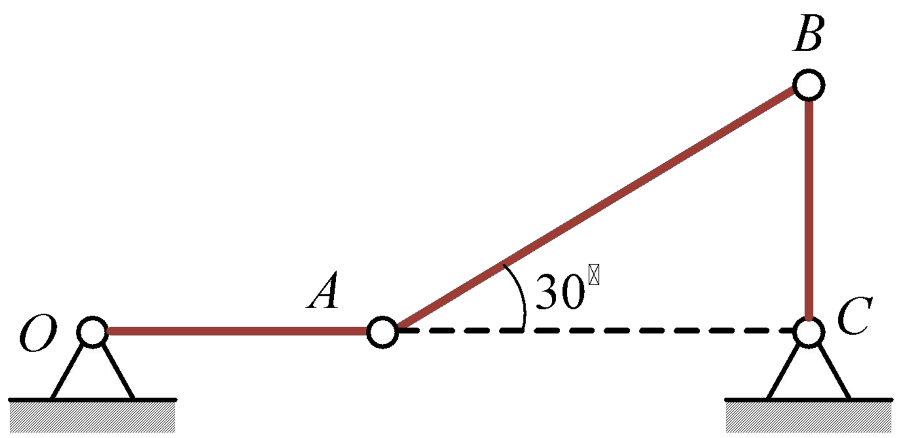
3.1. Скорость груза 1 $v_1 = 0{,}5$ м/с. Определить угловую скорость подвижного блока 2 и скорость точки A этого блока, если его радиус $R = 0{,}1$ м.

Ответ: $\omega_2 = 2{,}5$ с$^{-1}$, $v_A = 0{,}25$ м/с.



3.2. Для заданного положения шарнирного четырёхзвенника определить скорость точки B, если точка A имеет скорость 1 м/с.

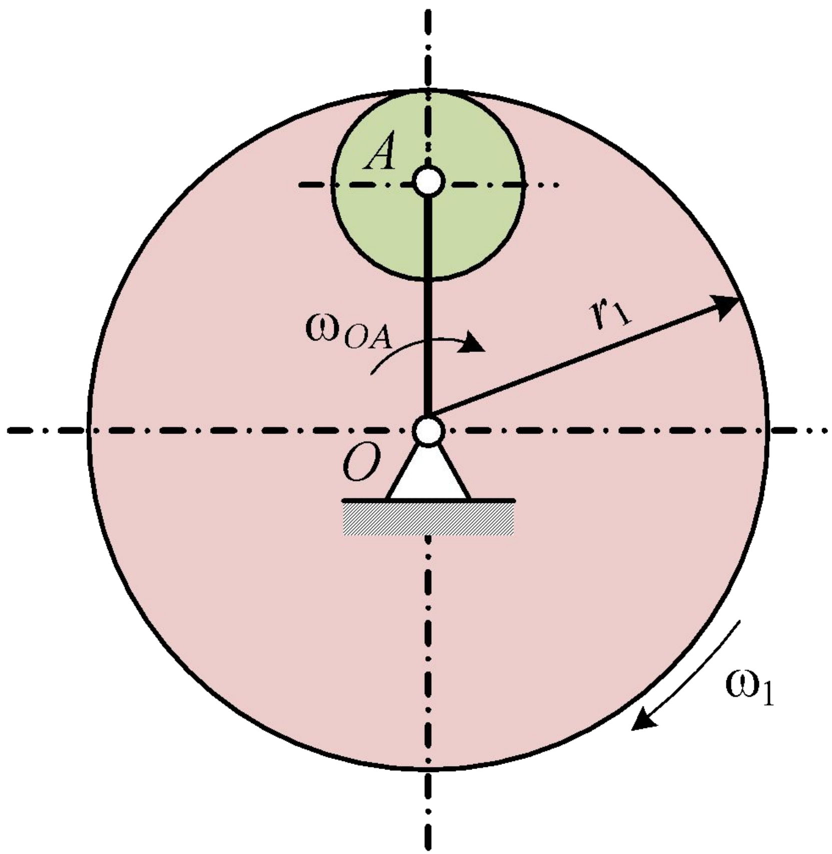
Ответ: $v_B = 0{,}577$ м/с.



3.3. В дифференциальном механизме с внутренним зацеплением зубчатое колесо 1 и кривошип *OA* вращаются независимо друг от друга с угловыми скоростями $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$ и $\omega_{OA} = 4$ с$^{-1}$.

Определить угловую скорость зубчатого колеса 2, если радиус $r_1 = 0{,}3$ м, длина кривошипа *OA* = равна 0,2 м.

Ответ: $\omega_2 = 2$ с$^{-1}$.



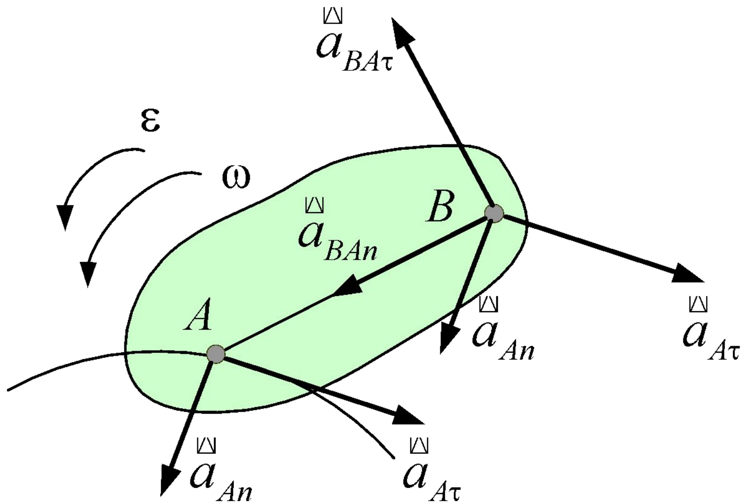
4. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорение произвольной точки плоской фигуры равно сумме двух ускорений: ускорения полюса и ускорения точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An}; \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn}.$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn},$$



При решении задач векторное выражение ускорения точки плоской фигуры проецируется на координатные оси:

$$a_{Bx} = a_{A\tau x} + a_{Anx} + a_{BA\tau x} + a_{BAnx};$$

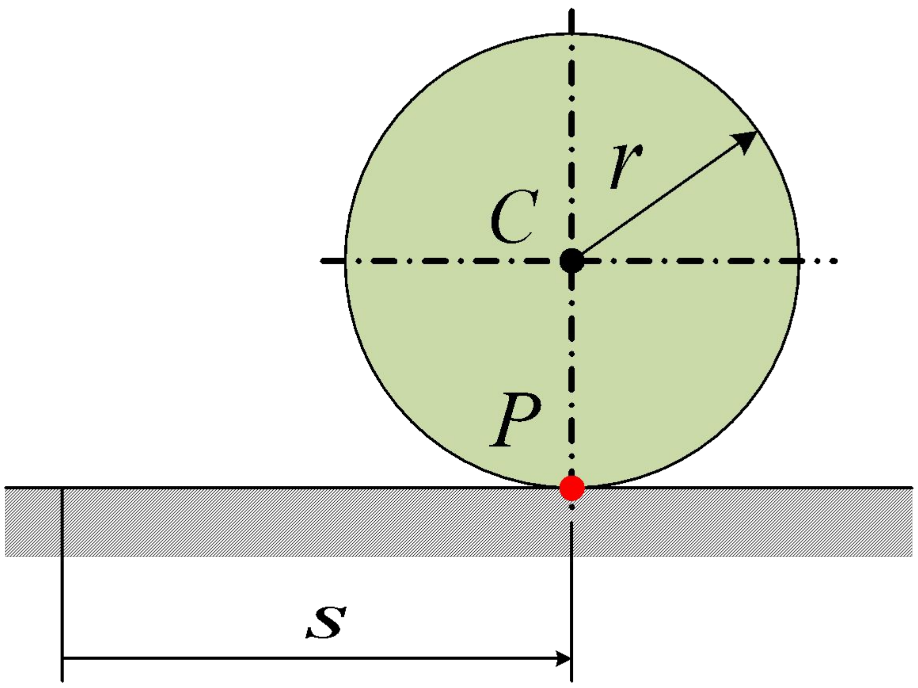
$$a_{By} = a_{A\tau y} + a_{Any} + a_{BA\tau y} + a_{BAny}.$$

Если неизвестным является ускорение точки B, то находят модуль этого ускорения:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}.$$

Пример 2

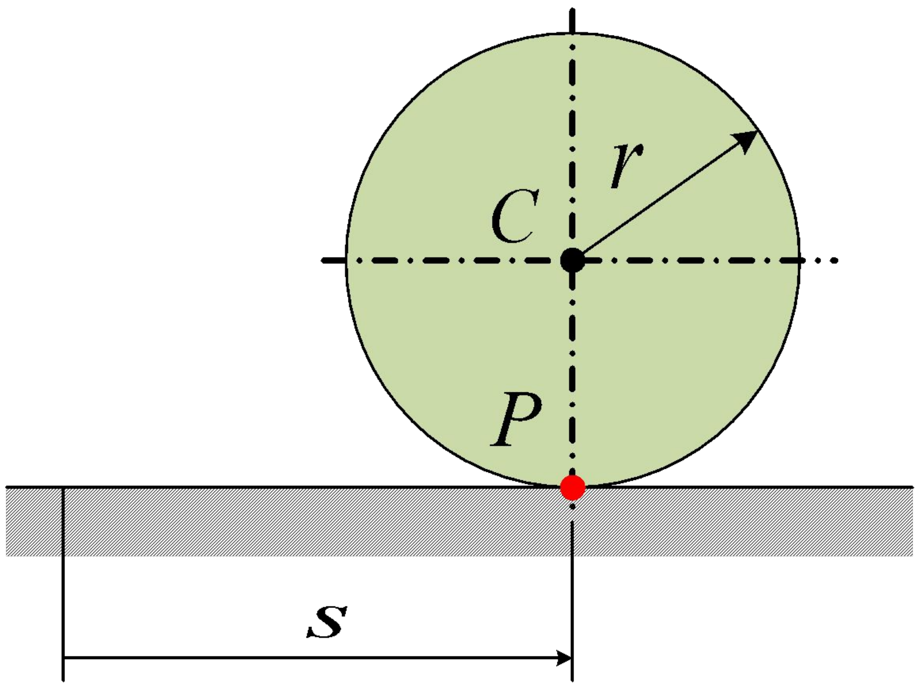
Центр катящегося по плоскости колеса радиуса 0,5 м движется согласно уравнению $s = 2t$. Определить ускорение точки соприкосновения колеса с плоскостью.



Решение

Дано: $r = 0{,}5$ м; $s = 2t$.

Определить: a_P.

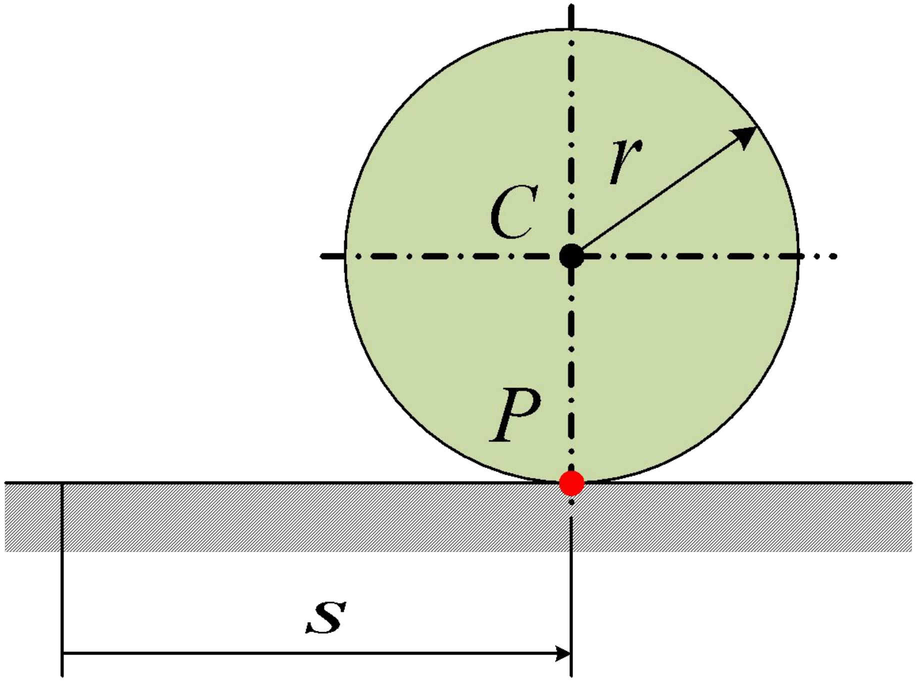


Принимаем точку C за полюс.

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}_{PC};$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{C\tau} + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{PC\tau} + \vec{a}_{PCn};$$

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{d\left(2t\right)}{dt} = 2 \text{ м/с}.$$



$$a_{C\tau} = \frac{dv_C}{dt} = 0;$$

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{\rho} = \frac{v_C^2}{\infty} = 0; \qquad \vec{a}_C = 0.$$

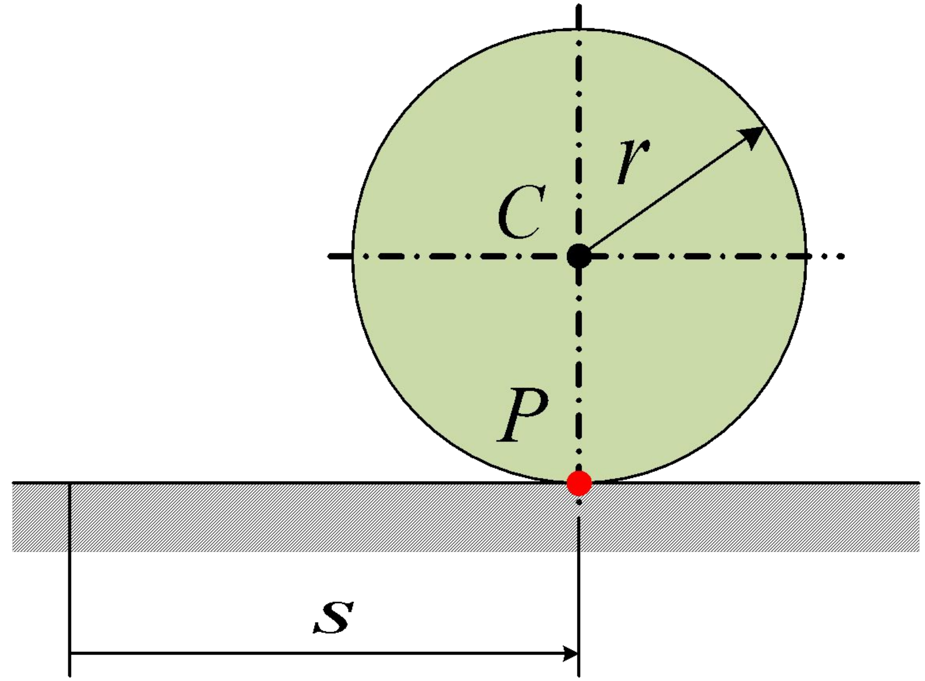
$$a_{PC\tau} = \varepsilon r;$$

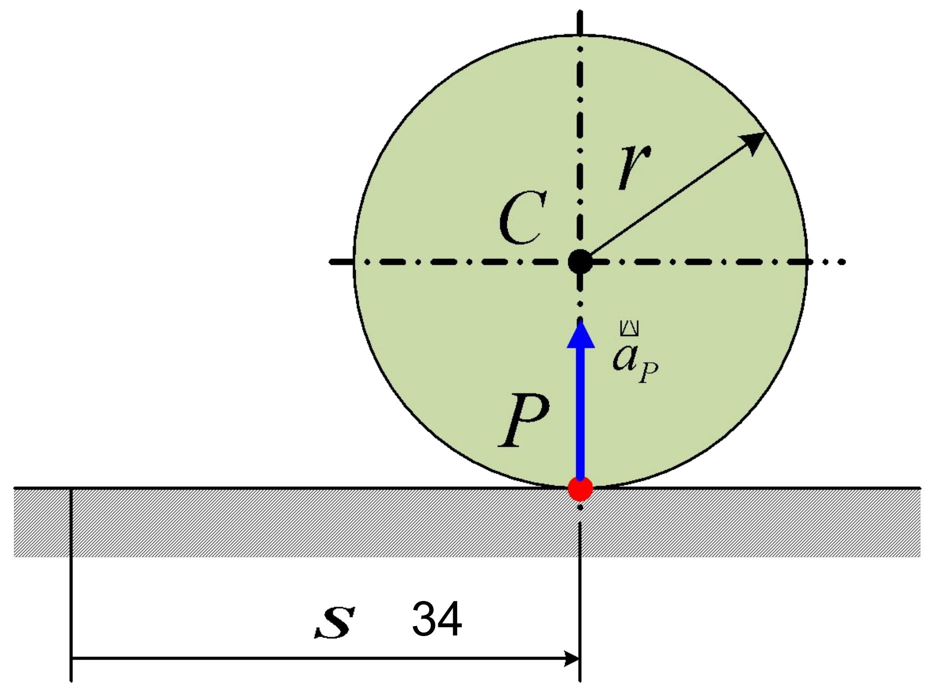
$$\varepsilon = \frac{a_{C\tau}}{r} = 0;$$

$$a_{PCn} = \frac{v_C^2}{CP} = \frac{v_C^2}{r} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ м/с}^2.$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{PCn};$$

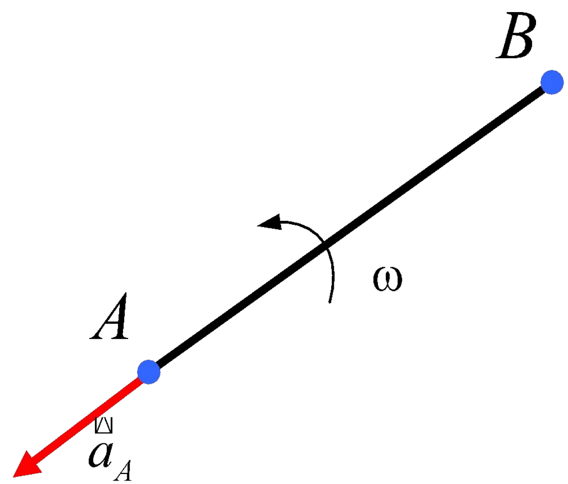
$$a_P = 8 \text{ м/с}^2.$$





Пример 3

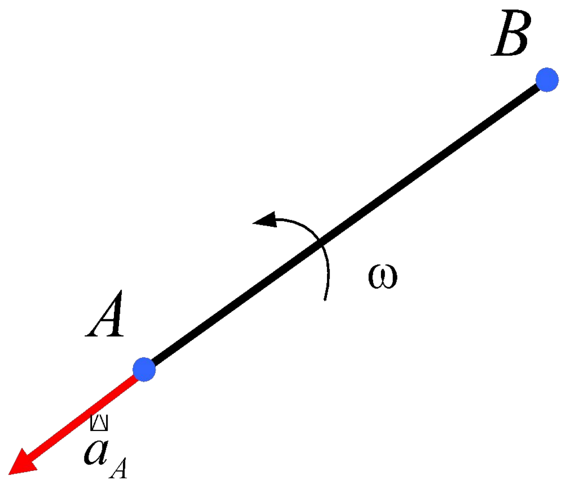
Стержень AB длиной 2 м находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки B, если ускорение точки A равно 1 м/с^2, угловая скорость стержня ω = 1 рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 0$.



Решение

Дано: $AB = 2$ м; $a_A = 1$ м/с^2; $\omega = 1$ рад/с; $\varepsilon = 0$.

Определить: a_B.



Принимаем точку A за полюс.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

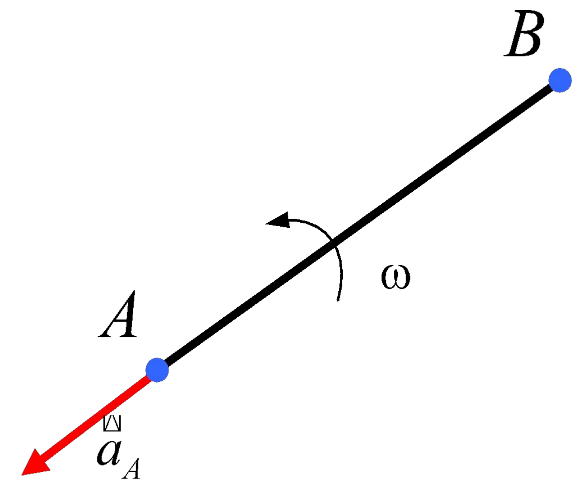
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn};$$

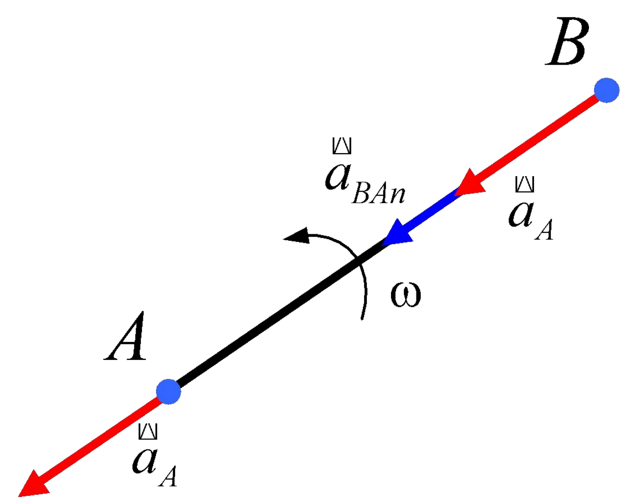
$$a_A = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA\tau} = \varepsilon \cdot AB = 0;$$

$$a_{BAn} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м/с}^2;$$

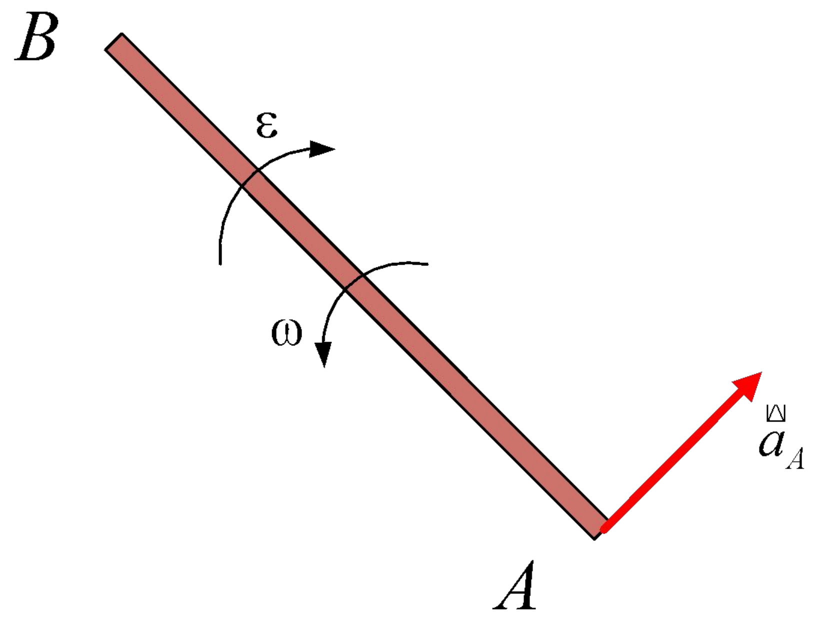
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BAn};$$





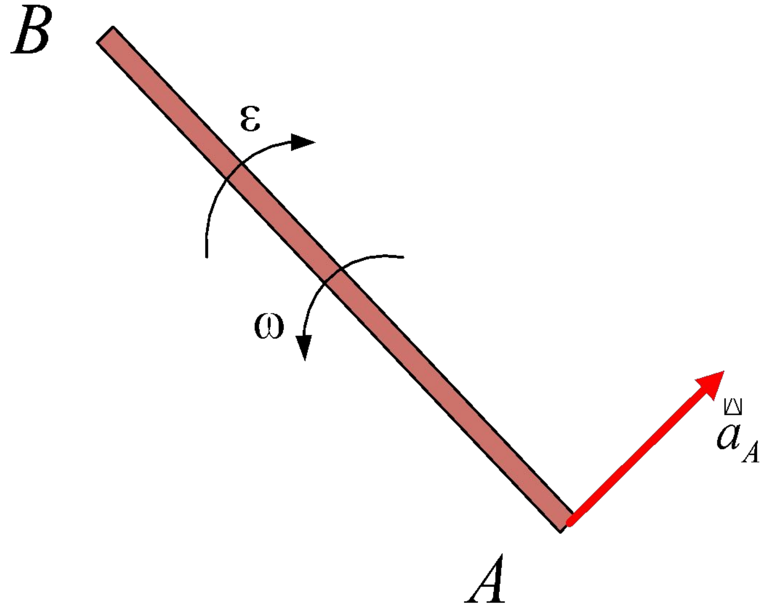
Пример 4

Стержень AB движется в плоскости. Ускорение точки A в данный момент времени $a_A = 1$ м/с^2, угловая скорость $\omega = 2$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Определить ускорение точки B стержня, если длина $AB = 1$ м.



Решение

Дано: $a_A = 1$ м/с^2, $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon = 2$ рад/с^2, $AB = 1$ м.
Определить: a_B.



Принимаем точку *A* за полюс.

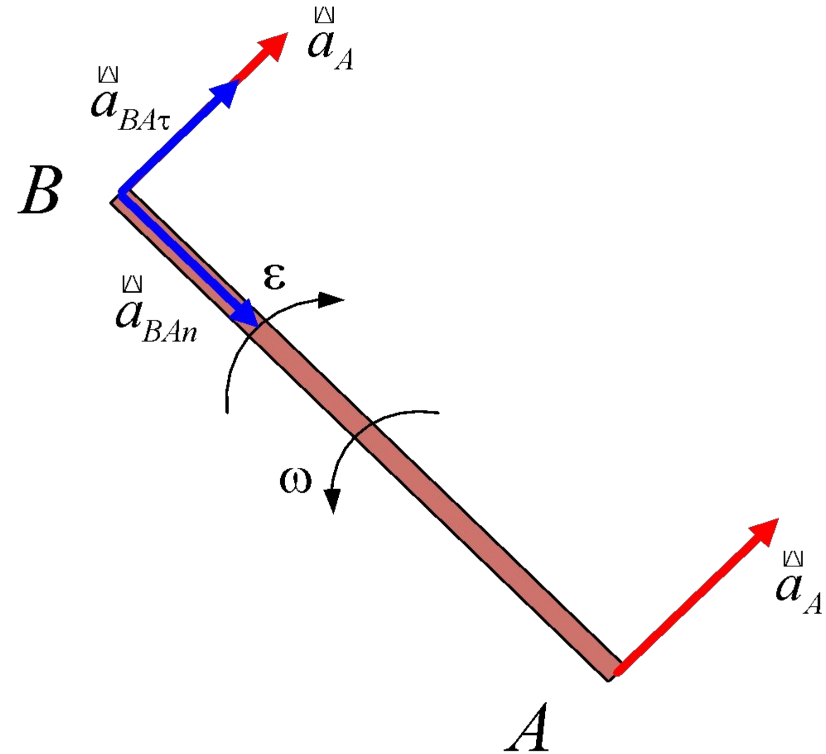
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn};$$

$$a_A = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA\tau} = \varepsilon \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}^2;$$

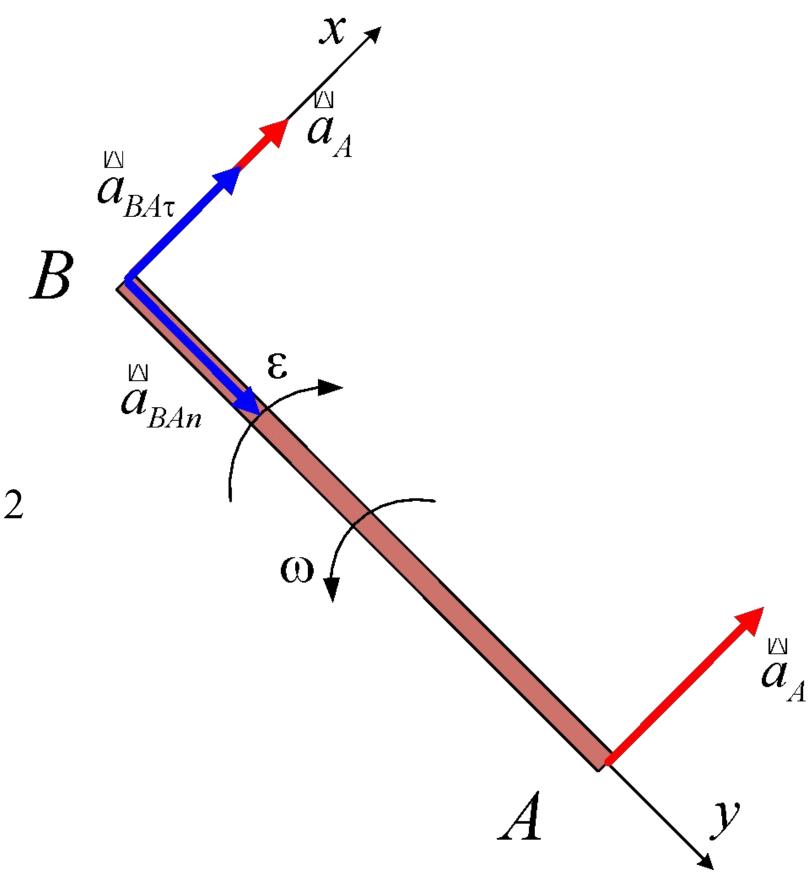
$$a_{BAn} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2;$$



$$a_{Bx} = a_A + a_{BA\tau} = 1 + 2 = 3;$$

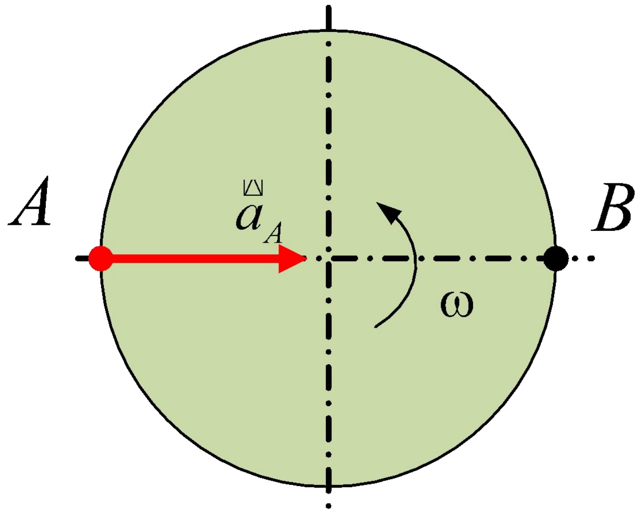
$$a_{By} = a_{BAn} = 4;$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{9+16} = 5 \text{ м/с}^2$$



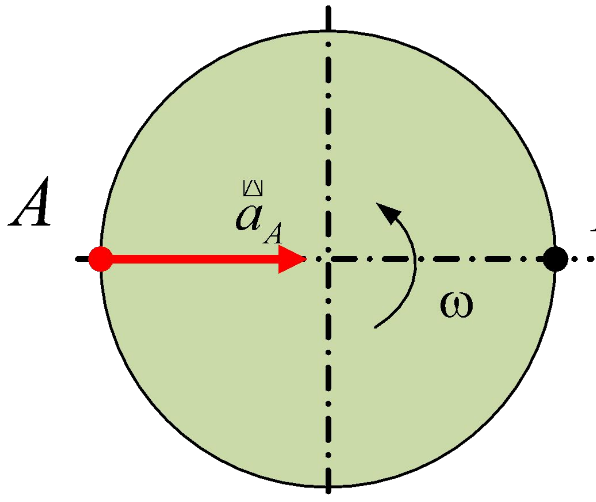
Пример 5

Тело находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки B, если ускорение точки A равно 3 м/с^2, угловая скорость $\omega = 1$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 0$, расстояние $AB = 1$ м.



Решение

Дано: $a_A = 3$ м/с^2; $\omega = 1$ рад/с; $\varepsilon = 0$; $AB = 1$ м.
Определить: a_B.



Принимаем точку A за полюс.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

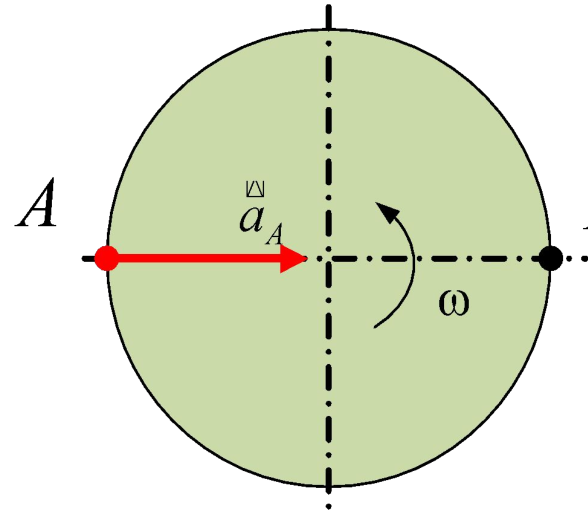
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn};$$

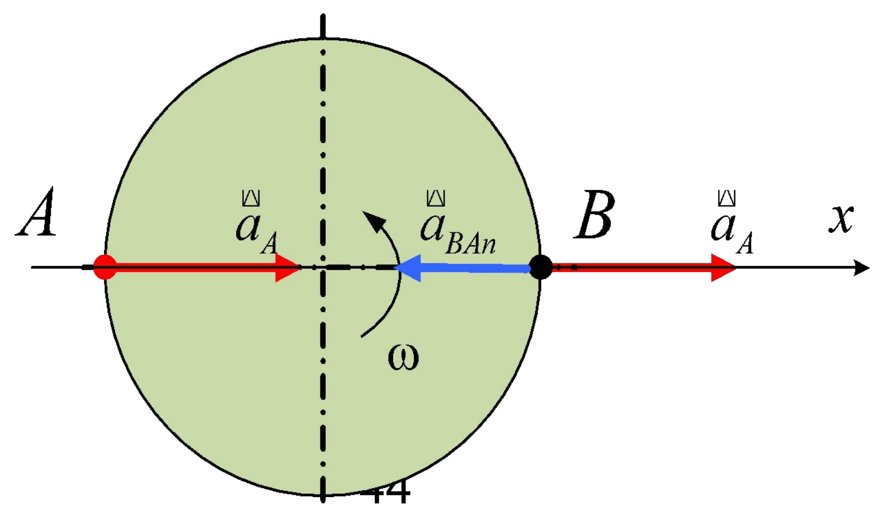
$$a_{BA\tau} = \varepsilon \cdot AB = 0;$$

$$a_{BAn} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 1 \cdot 1 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Bx} = a_A - a_{BAn} = 3 - 1 = 2.$$

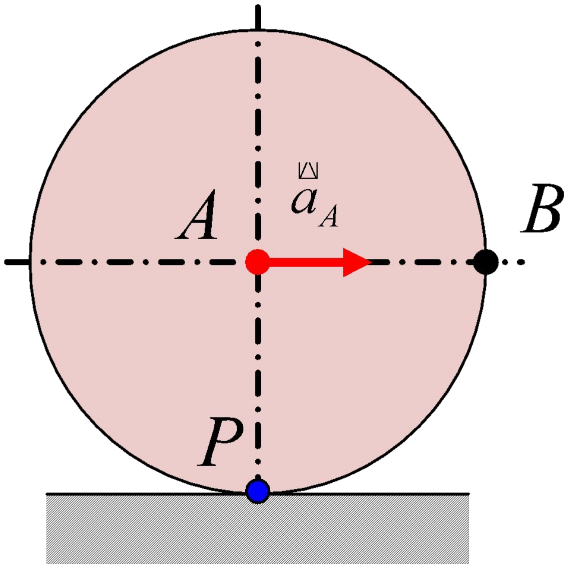
$$a_B = a_{Bx} = 2 \text{ м/с}^2.$$





Пример 6

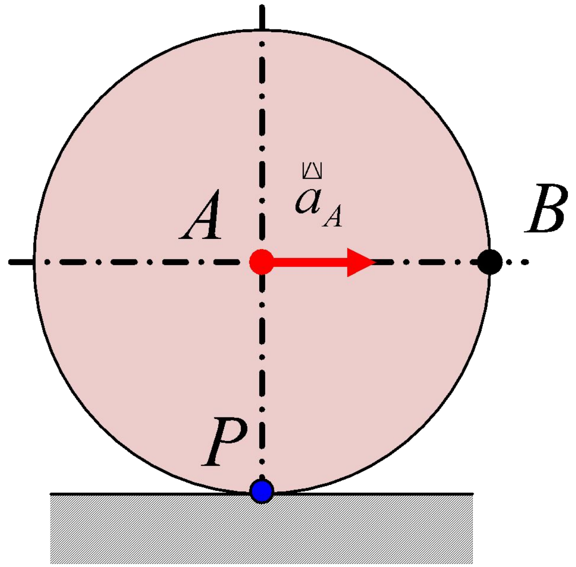
Колесо катится без скольжения. Определить ускорение точки B в тот момент, когда скорость точки A равна нулю, а ускорение $a_A = 2$ м/с^2.



Решение

Дано: колесо катится без скольжения; $v_A = 0$; $a_A = 2$ м/с^2.

Определить: a_B.



Принимаем точку A за полюс.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn};$$

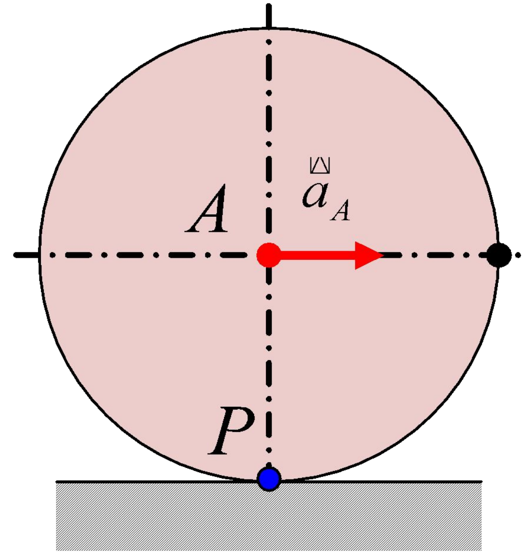
$$a_A = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

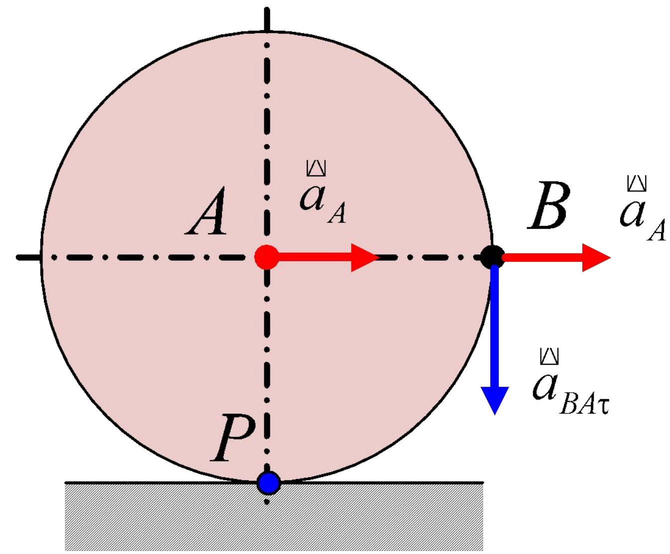
$$\varepsilon = \frac{a_A}{AP} = \frac{a_{BA\tau}}{AB}\Bigg| \Rightarrow a_{BA\tau} = a_A;$$

$$a_{BAn} = \frac{v_A^2}{AB} = \omega^2 AB = 0;$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau};$$

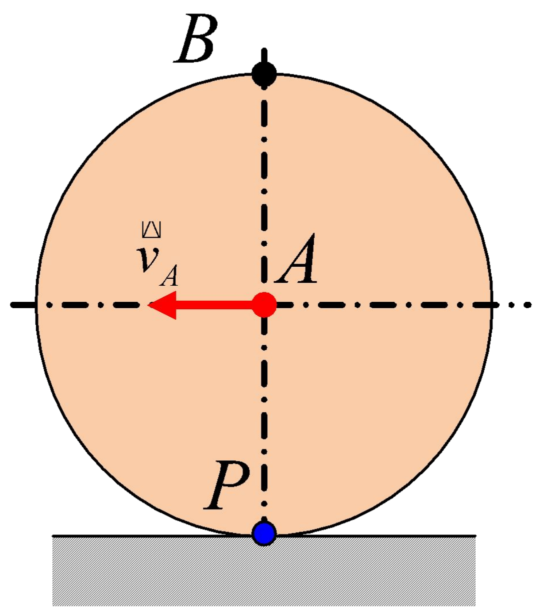
$$a_B = \sqrt{a_A^2 + a_{BA\tau}^2} = \sqrt{2a_A^2} = \sqrt{2\cdot 4} = \sqrt{8} = 2{,}83 \text{ м/с}^2$$





Пример 7

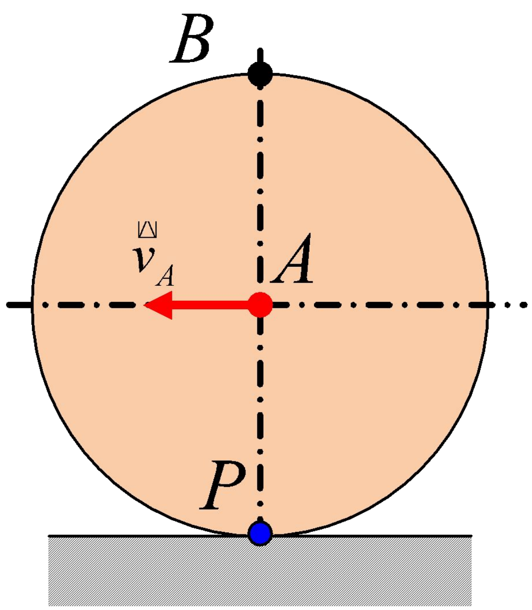
Колесо радиуса $r = 0{,}1$ м катится без скольжения. Определить ускорение точки B если центр колеса A перемещается с постоянной скоростью $v_A = 2$ м/с.



Решение

Дано: r = 0,1 м; v_A = 2 м/с. Колесо катится без скольжения.

Определить: a_B.



Принимаем точку A за полюс.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn};$$

$$v_A = \text{const}\Big| \Rightarrow a_{A\tau} = 0;$$

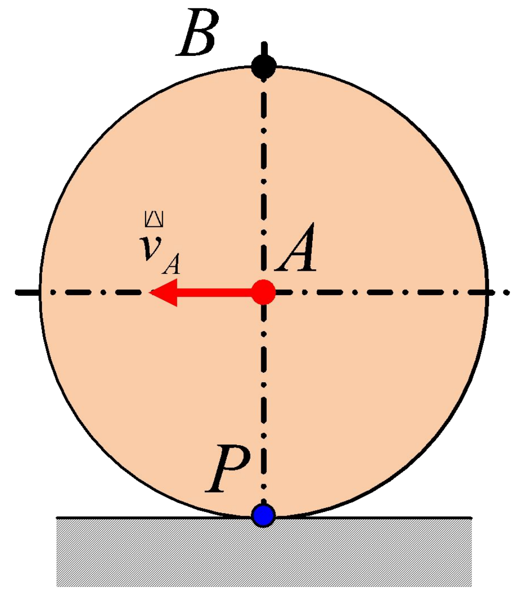
$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{A\tau}}{r} = 0; \qquad \omega = \frac{v_A}{r} = \frac{2}{0{,}1} = 20\,\frac{1}{\;};$$

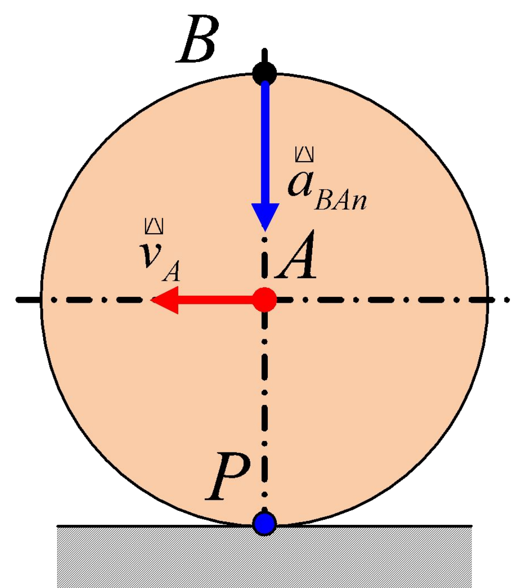
$$a_{An} = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{v_A^2}{\infty} = 0;$$

$$a_{BA\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot BA = 0;$$

$$a_{BAn} = \omega_{AB}^2 \cdot BA = 20^2 \cdot 0{,}1 = 40;$$

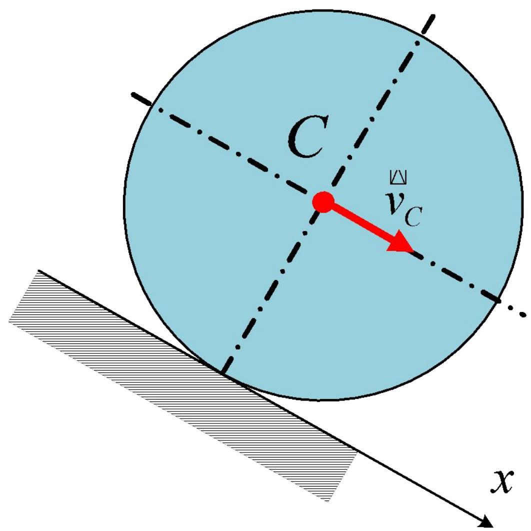
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{BAn}; \qquad a_B = 40 \text{ м/с}^2.$$





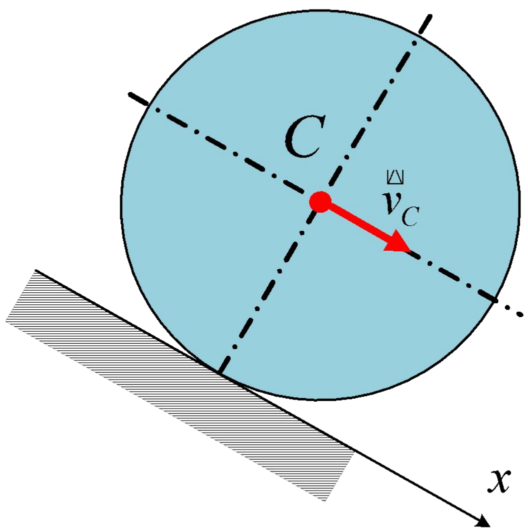
Пример 8

Скорость центра C колеса, катящегося без скольжения, постоянна. Какой угол в градусах с осью Ox составляет вектор ускорения точки, являющейся мгновенным центром скоростей колеса?



Решение

Дано: v_C = const; какой угол в градусах с осью Ox составляет вектор ускорения точки, являющейся мгновенным центром скоростей колеса?



Принимаем точку C за полюс.

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}_{PC};$$

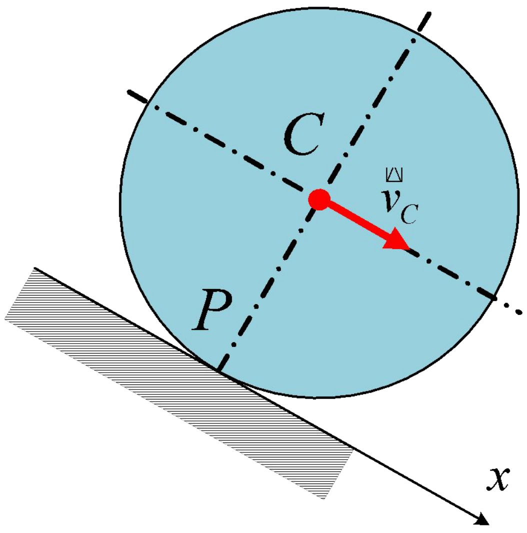
$$\vec{a}_P = \vec{a}_{C\tau} + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{PC\tau} + \vec{a}_{PCn};$$

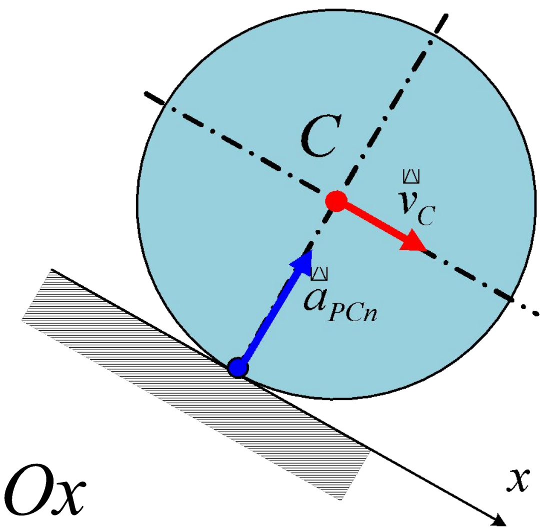
$$v_C = \mathrm{const} \Big| \Rightarrow a_{C\tau} = 0;$$

$$a_{C\tau} = 0 \Big| \Rightarrow \varepsilon_{CP} = \frac{a_{C\tau}}{PC} = 0;$$

$$a_{PC\tau} = \varepsilon_{CP} \cdot PC = 0;$$

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{\rho} = \frac{v_C^2}{\infty} = 0;$$

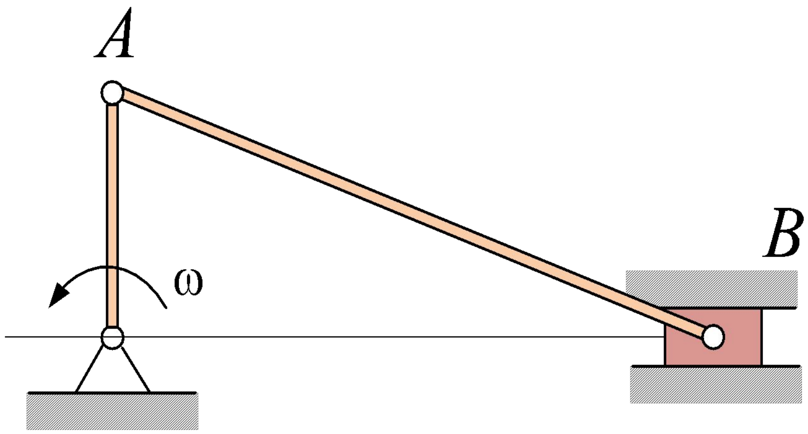




Следовательно: $\vec{a}_P = \vec{a}_{PCn} \Big| \Rightarrow \vec{a}_P \perp Ox$

Пример 9

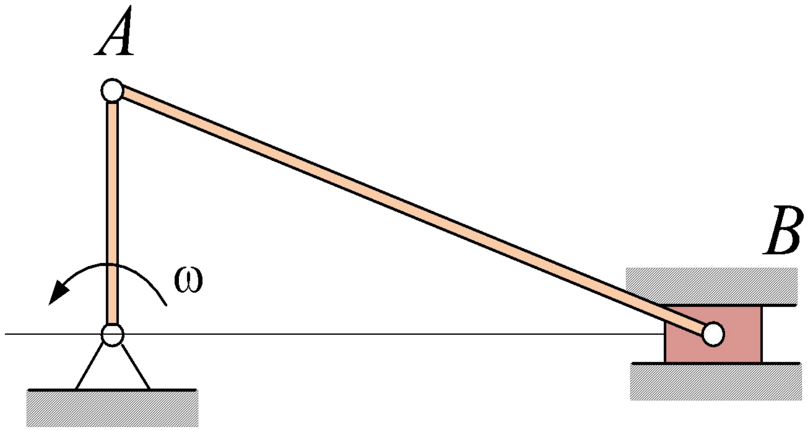
Определить ускорение ползуна B кривошипно-шатунного механизма в данном положении, если угловая скорость кривошипа $\omega = 1$ рад/с = const; длины звеньев $OA = 0{,}3$ м; $AB = 0{,}5$ м.



Решение

Дано: ω = 1 рад/с = const; OA = 0,3 м; AB = 0,5 м.

Определить: a_B.



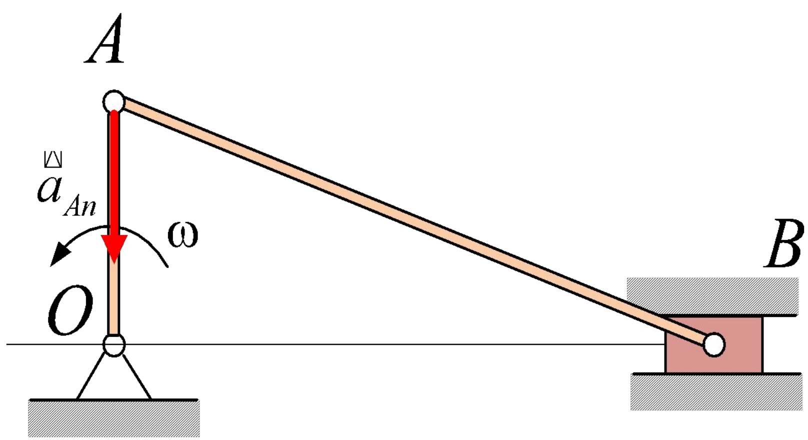
Принимаем точку A за полюс.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA};$$

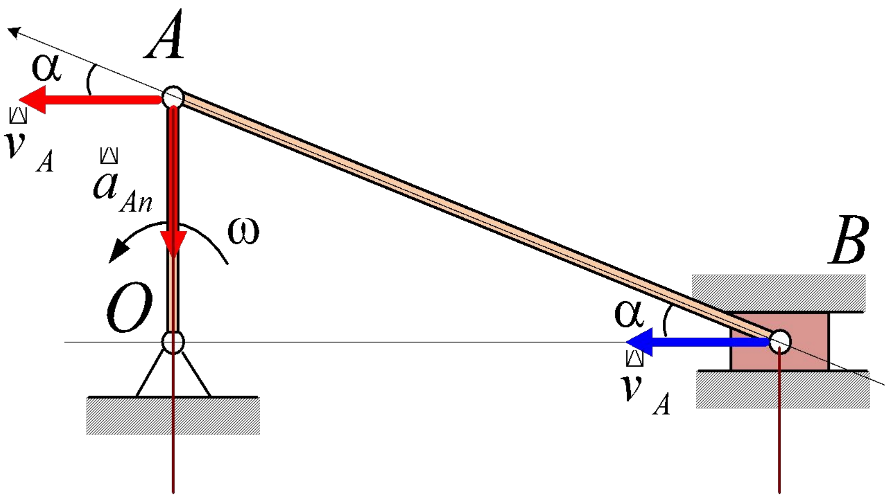
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn};$$

$$\varepsilon_{OA} = 0 \Big| \Rightarrow a_{A\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0;$$

$$a_{An} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1 \cdot 0,3 = 0,3\ \text{ì /ñ}^2;$$



$$a_{BA\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_{AB} \cdot 0,5;$$



$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha \Big| \Rightarrow v_A = v_B \Big| \Rightarrow \omega_{AB} = 0;$$

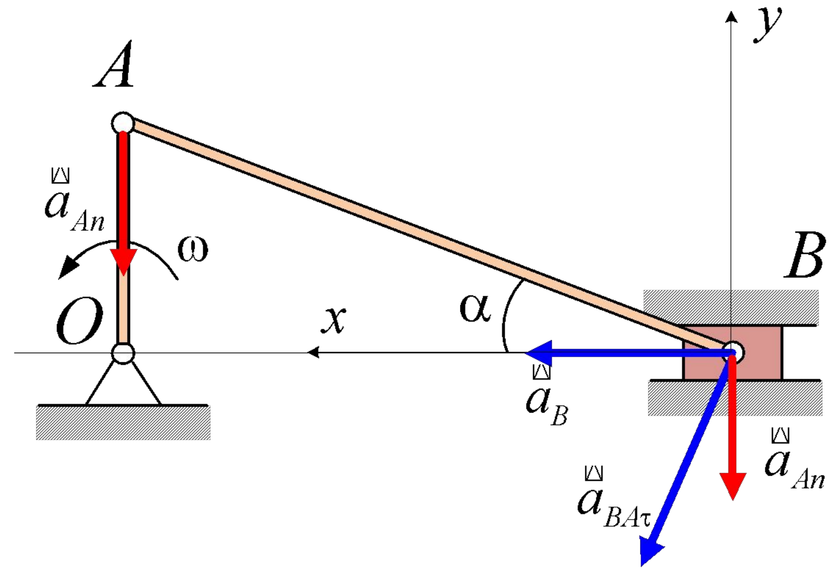
$$a_{BAn} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0;$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau};$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau};$$

на ось $x: a_B = a_{BA\tau} \cdot \sin\alpha;$

на ось $y: 0 = -a_{An} - a_{BA\tau} \cdot \cos\alpha.$

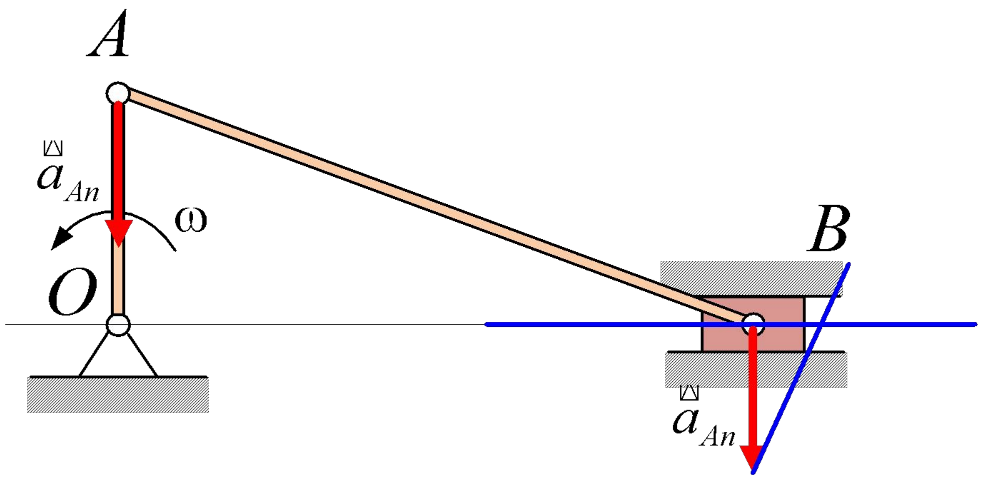


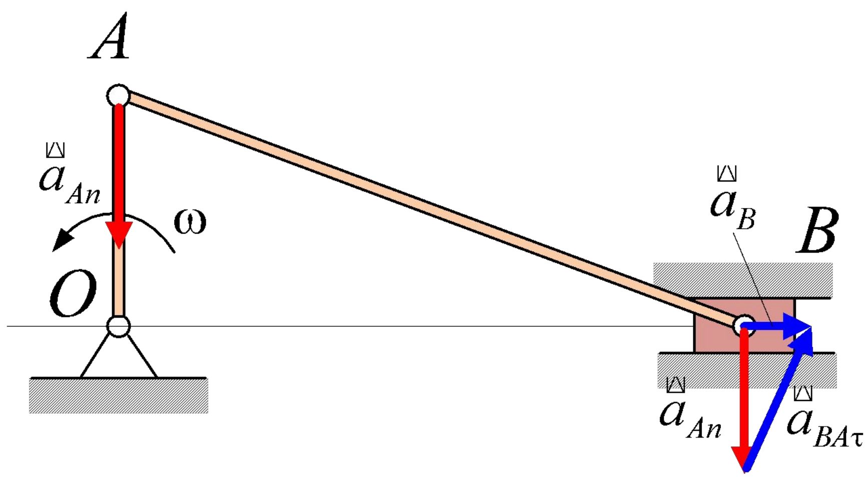
$$a_{BA\tau} = -\frac{a_{An}}{\cos\alpha}.$$

$$a_B = -\frac{a_{An}}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = -a_{An} \cdot \tan\alpha =$$

$$= -0{,}3 \cdot \frac{OA}{OB} = -\frac{0{,}3 \cdot OA}{\sqrt{AB^2 - OA^2}} = -\frac{0{,}3 \cdot 0{,}3}{\sqrt{0{,}5^2 - 0{,}3^2}} = -0{,}225 \text{ м/с}^2$$

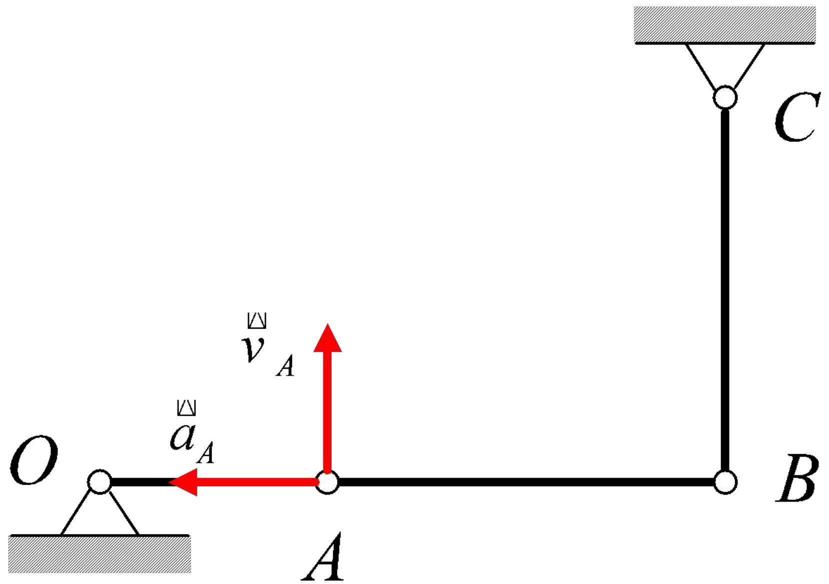
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\tau};$$





5. Задачи для самостоятельного решения

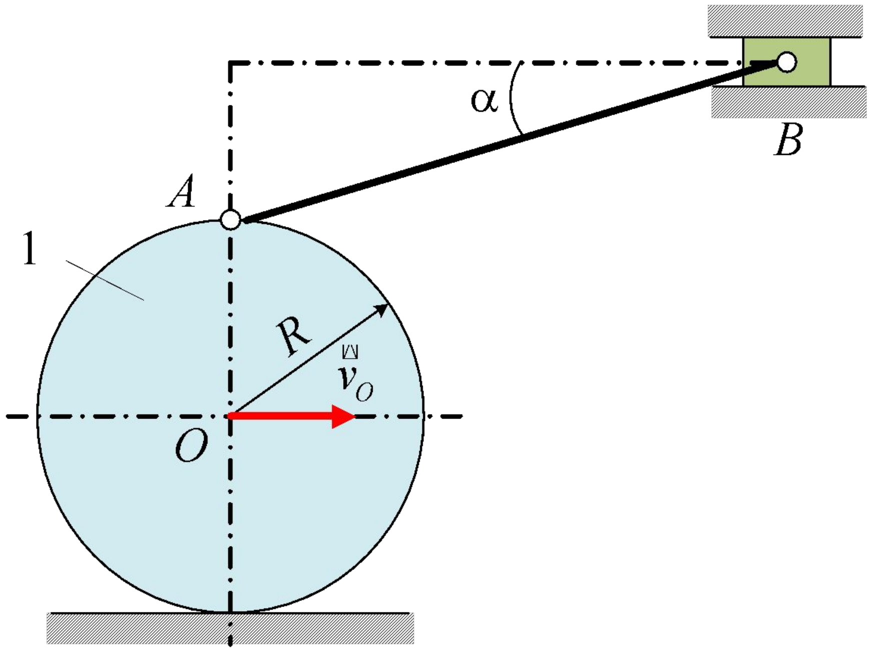
5.1. В указанном на рисунке положении четырёхзвенника скорость и ускорение точки A кривошипа OA равны: $v_A = 2$ м/с, $a_A = 20$ м/с^2. Определить ускорение точки B шатуна AB, если длины $AB = BC = 0{,}8$ м.



Какой ответ правильный?

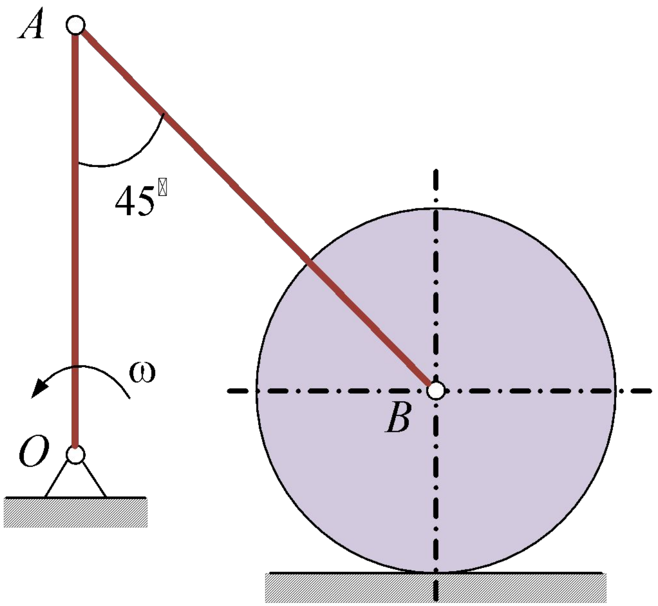
1) 15; 2) 20; 3) 25; 4) 10.

5.2. Для данного положения механизма определить ускорение ползуна B, если колесо 1 радиуса R = 50 см катится с постоянной скоростью его центра v_0 = 5 м/с; угол α = 30°.



Ответ: 1) 28,9; 2) 15,7; 3) 20,5; 4) 37,8.

5.3. Определить угловое ускорение шатуна *AB* кривошипно-шатунного механизма в данном положении, если кривошип *OA* вращается с постоянной угловой скоростью ω = 10 рад/с, а длины звеньев *OA* = 0,3 м, *AB* = 0,45 м.



Ответ: 1) 89,4;   2) 94,3;   3) 80,6; 4) 46,8.

Ответы: 6.1. (25);

6.2. (28,9);

6.3. (94,3).

КОНЕЦ