ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Конспект лекции

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток

2011

Содержание

Введение

Кинематика

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел. Движущиеся тела рассматриваются как чисто геометрические объекты – точки и тела – без учета их материальных характеристик (массы и др.). При этом не рассматриваются причины (действующие на тела силы), вызывающие и изменяющие движение объекта.

Движение

Под движением в механике понимается изменение с течением времени положения в пространстве данного тела по отношению к какому-либо другому телу.

Система отсчёта

Характер наблюдаемого движения существенно зависит от выбора тела, с которым связан наблюдатель. С твердым телом, по отношению к которому изучается движение, жестко соединяют какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом системy отсчета

Пространство и время

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово. Время считается универсальным, т. е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета. В задачах кинематики время (скалярная, непрерывно изменяющаяся величина) принимается за независимое переменное (аргумент). Отсчет времени ведется от некоторого условного начального момента, о выборе которого в каждом случае условливаются.

Уравнения движения

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано). Задать движение тела (точки) – значит, задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Если положение тела (точки) определяется какими-нибудь координатами (параметрами), то надо задать зависимость координат от времени t. Такая зависимость называется кинематическими уравнениями движения или законом движения.

Задачи кинематики

Основной задачей кинематики является установление математических способов задания движения тел (точек) и методов определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

1. Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих способов: **векторный**, **координатный**, **естественный**.

Векторный способ задания движения точки. Положение точки *M*, движущейся по отношению к системе отсчета *Oxyz*, определяется радиус-вектором, проведенным из начала координат *O* в точку *M* (рис. 1).

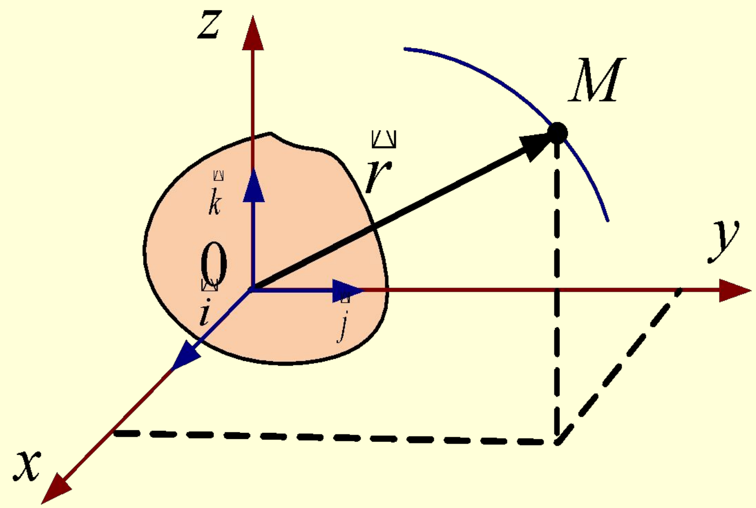


Рис. 1

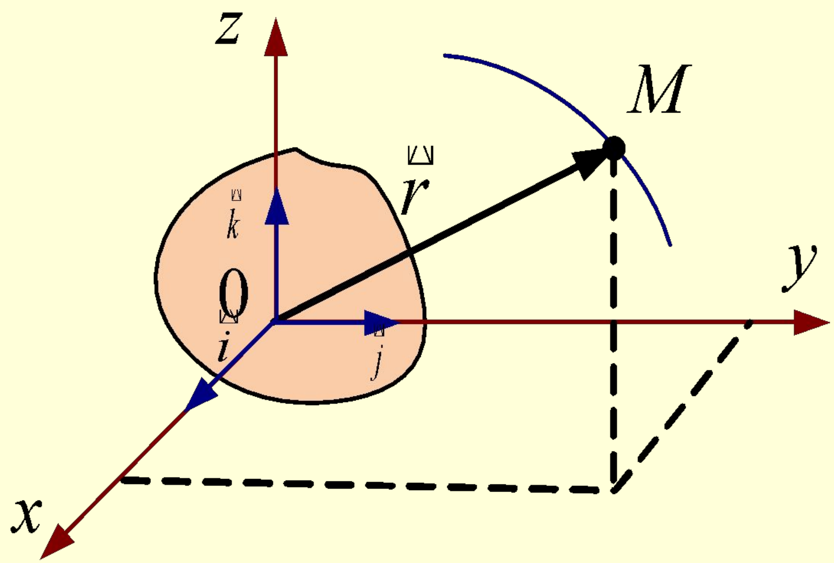


Рис. 1

Радиус-вектор будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению, т. е. он будет вектором-функцией, зависящим от аргумента *t*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1)$$

Равенство (1) и определяет, закон движения точки в векторной форме.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией точки является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, а если кривая – криволинейным.

При векторном способе задания движения траектория точки представляет собой геометрическое место концов вектора (годограф этого вектора), рис. 2.

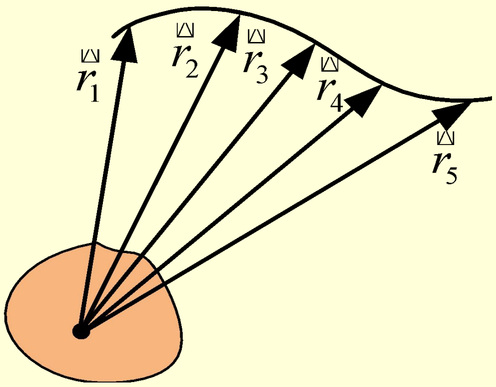
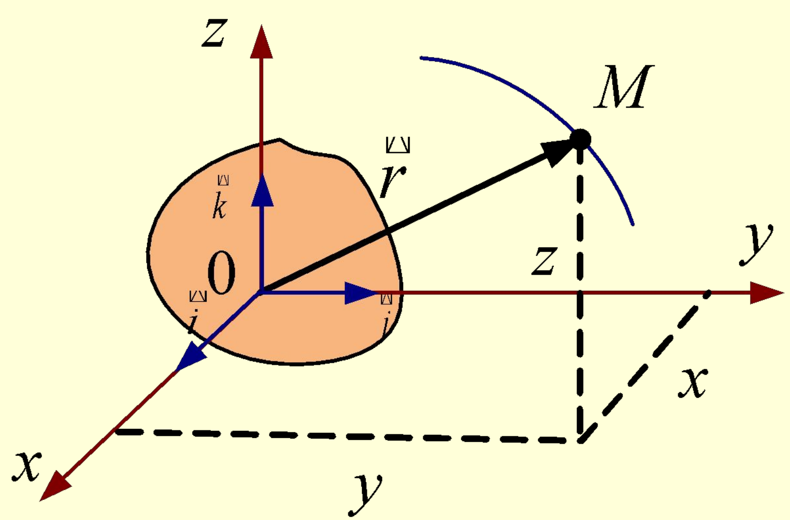


Рис. 2

Координатный способ задания движения точки. При движении точки в пространстве её декартовы координаты x, y, z, изменяются непрерывно во времени.



На 10

Тогда положение точки в любой момент времени определяется зависимостями

$$x = f_1(t),\; y = f_2(t),\; z = f_3(t). \qquad (2)$$

Уравнения (2) представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах и одновременно являются и уравнения траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t.

Исключив из уравнений движения точки (2) время t, найдём уравнение траектории точки в виде зависимости между координатами точки. Для точки, движущейся в пространстве получим

$$t = \varphi(z); \quad x = f_1\left[\varphi(z)\right] \quad y = f_2\left[\varphi(z)\right] \qquad (3)$$

Для точки, совершающей движение в плоскости уравнение траектории имеет вид

$$t = \varphi(x); \quad y = f\left[\varphi(x)\right] \qquad (4)$$

Между векторным и координатным способами движения точки существует взаимосвязь, которая заключается в следующем. Зная координаты точки *M* как функции времени, можно найти радиус вектор точки как функцию времени:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t). \qquad (5)$$

Естественный способ задания движения точки. Этот способ задания движения может быть применен, если заранее известна траектория движущейся точки. На траектории выбирают неподвижную точку *O*, которую принимают за начало отсчета криволинейной (дуговой) координаты *s*, и устанавливают её положительное и отрицательное направления отсчета, рис. 4.

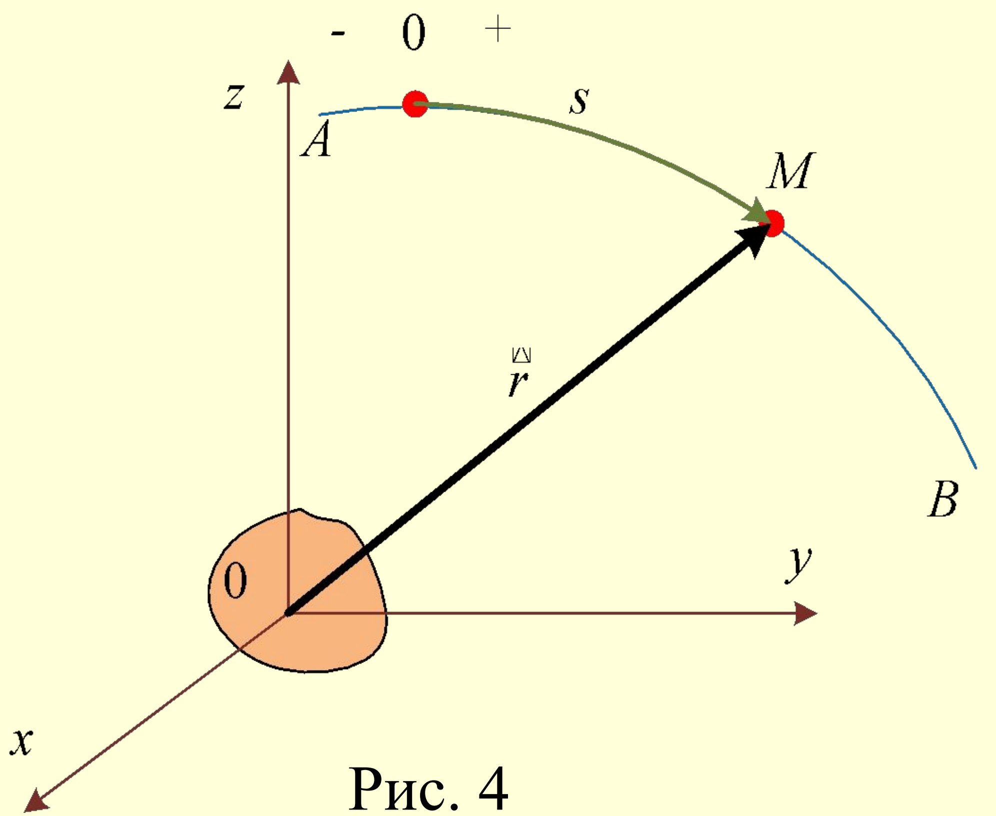


Рис. 4

Положение точки в любой момент времени определяется зависимостью

$$s = f(t). \qquad (6)$$

2. Скорость точки при векторном способе задания её движения

Величина, характеризующая быстроту и направление движения точки называется скоростью точки.

Рассмотрим точку M, которая совершает произвольное движение в пространстве, рис. 5. В момент времени t_1 точка занимает положение M_1 и имеет радиус-вектор $\vec{r}_1$, в момент времени t_2 – положение M_2 и имеет радиус-вектор $\vec{r}_2$.

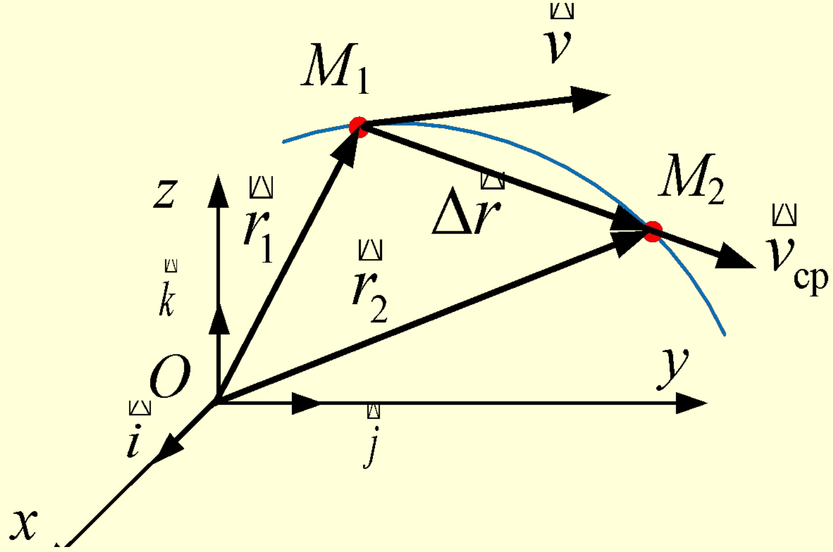


Рис. 5

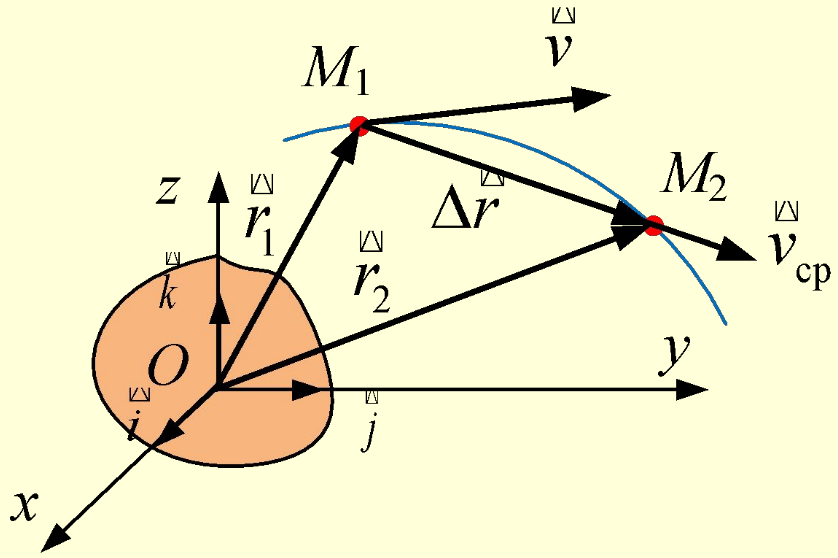


Рис. 5

Приращение радиус-вектора точки за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

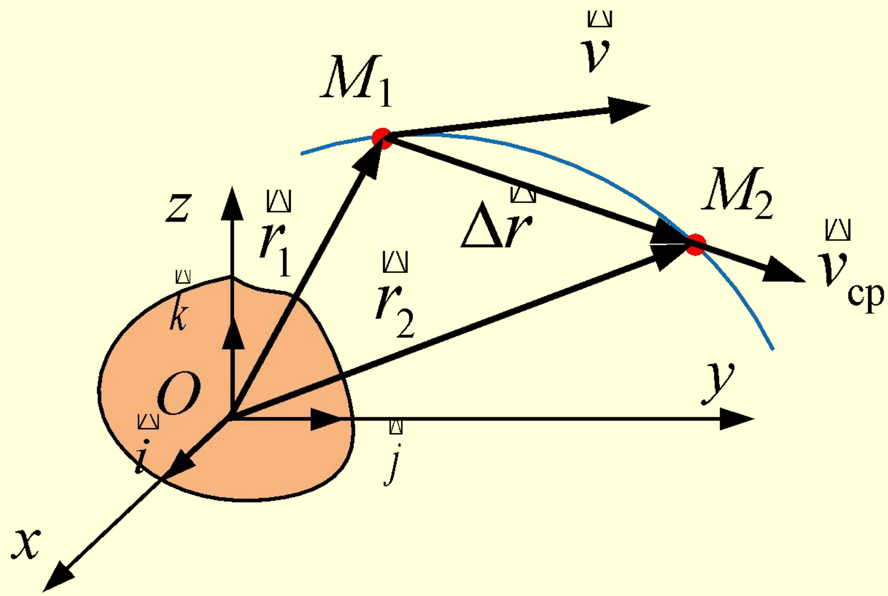


Рис. 5

Отношение приращения радиус-вектора точки к соответствующему этому приращению промежутку времени равно вектору, который называется средней по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{7}$$

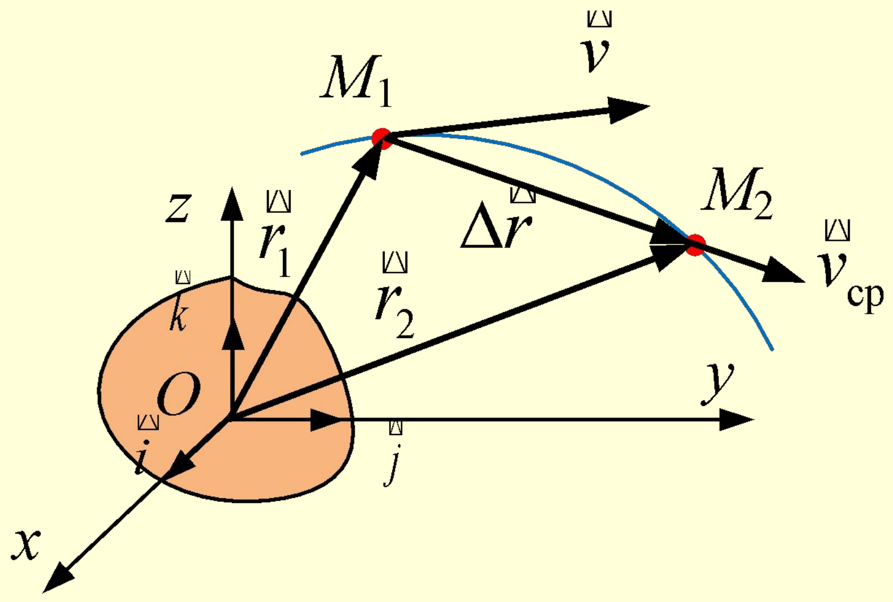


Рис. 5

Направлен вектор средней скорости точки так же, как вектор $\Delta \vec{r}$.

Скорость точки в данный момент равна пределу, к которому стремится средняя скорость точки при стремлении промежутка времени Δt к нулю.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (8)$$

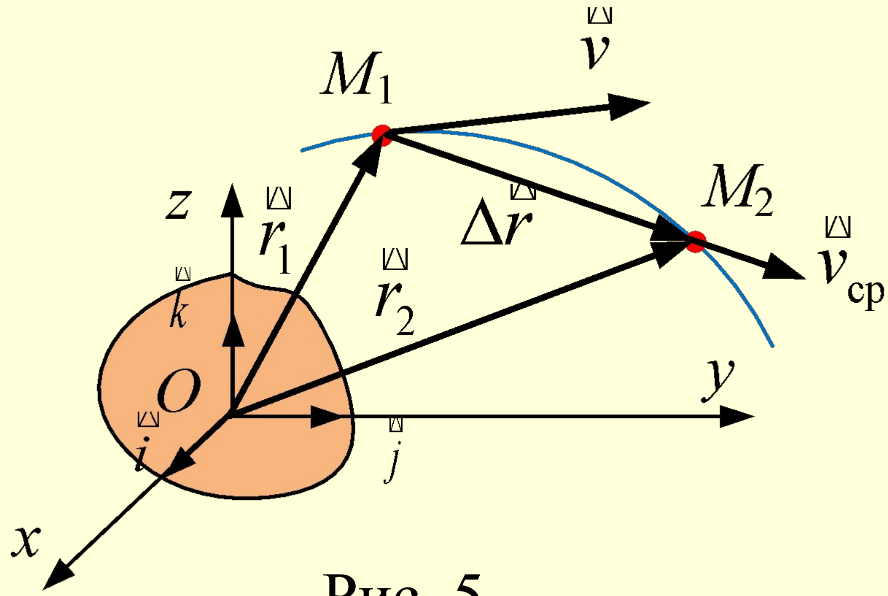


Рис. 5

При стремлении Δt к нулю вектор средней скорости поворачивается и в пределе совпадает с касательной траектории точки, рис. 5.

Таким образом, скорость точки в данный момент времени это вектор, равный первой производной по времени от радиус-вектора точки и направленный по касательной к траектории точки:

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt}. \qquad (9)$$

<u>3.</u> Скорость точки при координатном способе задания её движения

Радиус- вектор точки равен:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \qquad (10)$$

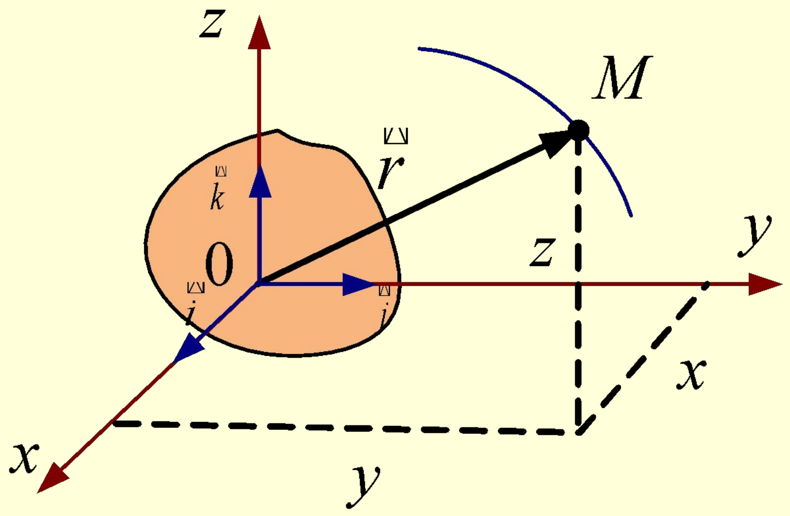


Рис. 6

Найдём скорость точки, продифференцировав (5) по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}.$$

Разложим вектор скорости точки по координатным осям.

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z. \qquad (12)$$

Сравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых ортах, получим:

$$v_x = \frac{dx}{dt};\, v_y = \frac{dy}{dt};\, v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (13)$$

Из (13) следует: проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным по времени от соответствующих координат.

Модуль скорости точки равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (14)$$

Направление скорости точки определяется направляющими косинусами.

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v};\ \cos\beta = \frac{v_y}{v};\ \cos\gamma = \frac{v_z}{v}, \tag{15}$$

где α, β, γ - углы, которые составляет вектор скорости с координатными осями, соответственно x, y, z.

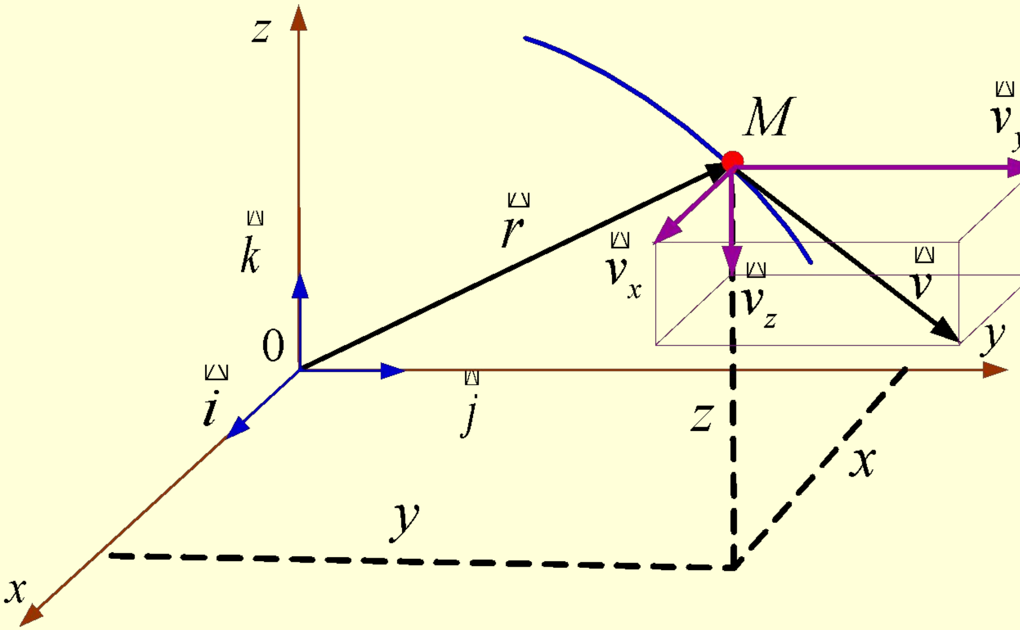
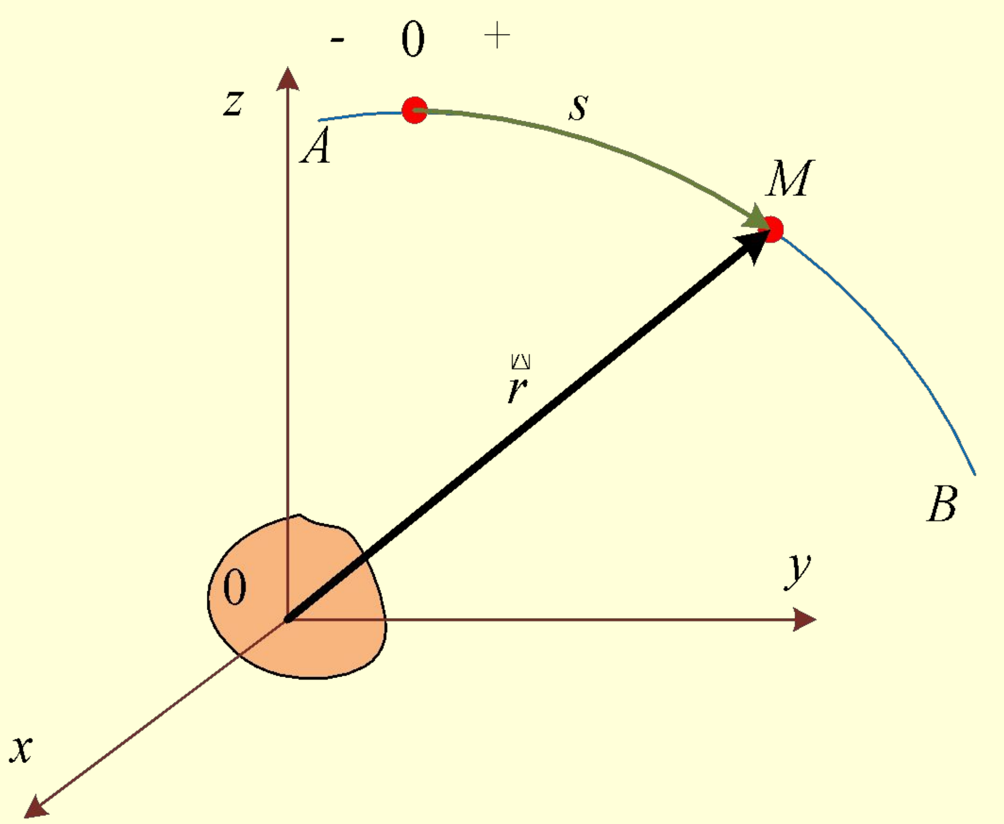


Рис. 7

4. Скорость точки при естественном способе задания её движения

При естественном способе задания движения радиус-вектор точки является сложной функцией:

$$\vec{r} = \vec{r}\left[s\left(t\right)\right] \qquad (16)$$



Чтобы найти скорость точки продифференцируем (16) по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad (17)$$

Модуль производной $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ равен:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1. \qquad (18)$$

Таким образом, производна $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ является единичным вектором, который принято обозначать так:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}. \qquad (19)$$

С учётом (19) вектор скорости точки равен:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\,\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\,v, \tag{20}$$

где $v = \dfrac{ds}{dt}$ – проекция вектора скорости на касательную к траектории точки, рис. 9.

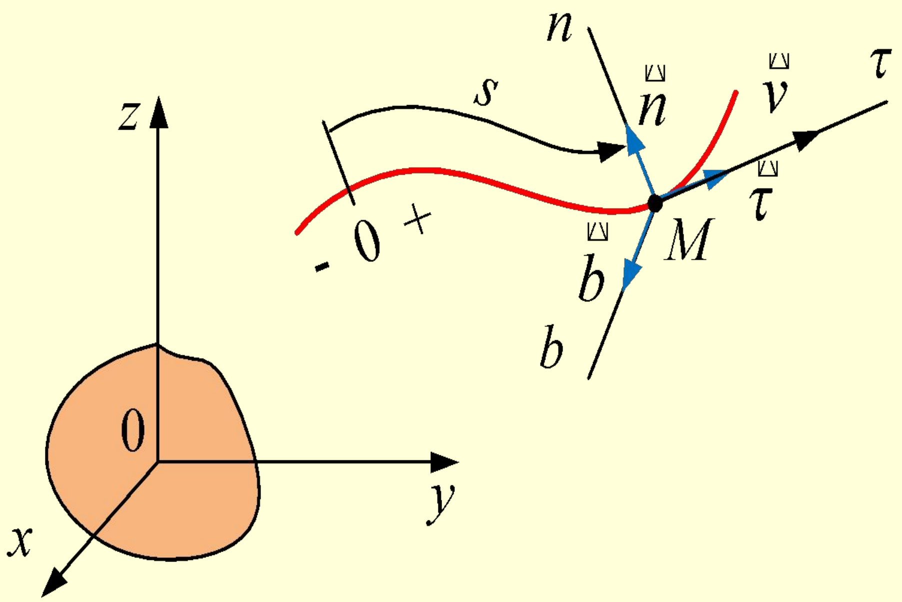


Рис. 9

5. Ускорение точки при векторном способе задания её движения

Величина, характеризующая изменение скорости точки называется ускорением.

Рассмотрим движение точки по траектории, рис. 10.

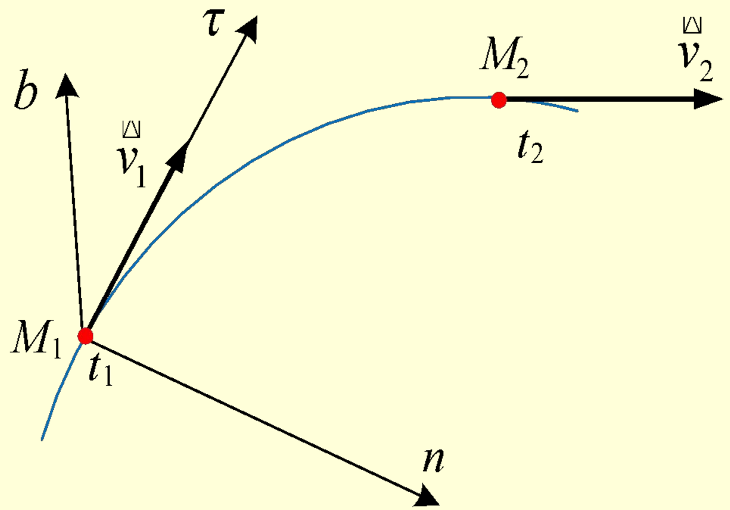


Рис. 10

Допустим, что в момент времени t_1 точка занимает положение M_1 и имеет скорость V_1. В момент времени t_2 точка занимает положение M_2 и имеет скорость V_2.

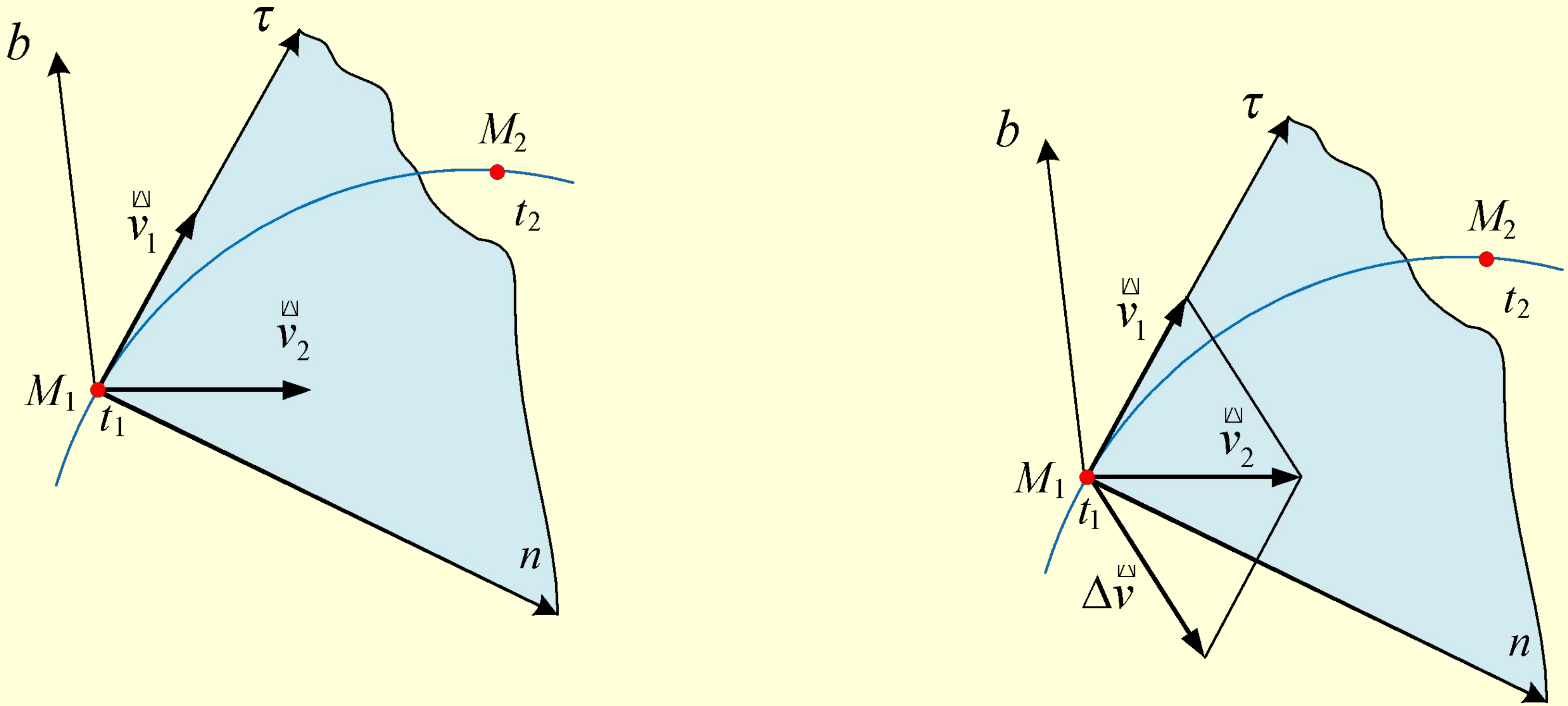


Рис. 11

Перенесём вектор $\vec{v}_2$ в точку M_2.

В соответствии с правилом параллелограмма вектор скорости $\vec{v}_2$ равен , рис. 12.

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}. \tag{21}$$

Отношение приращения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt равно вектору среднего ускорения точки, который по направлению совпадает с вектором $\Delta\vec{v}$, рис.10.

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (22)$$

Ускорение точки в данный момент времени, равно пределу вектора среднего ускорения точки при стремлении промежутка времени Δt к нулю.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (22)$$

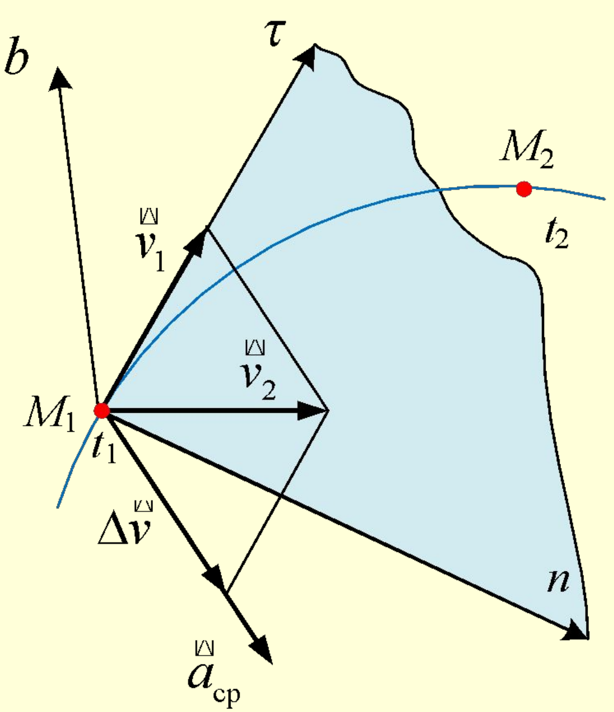


Рис. 13

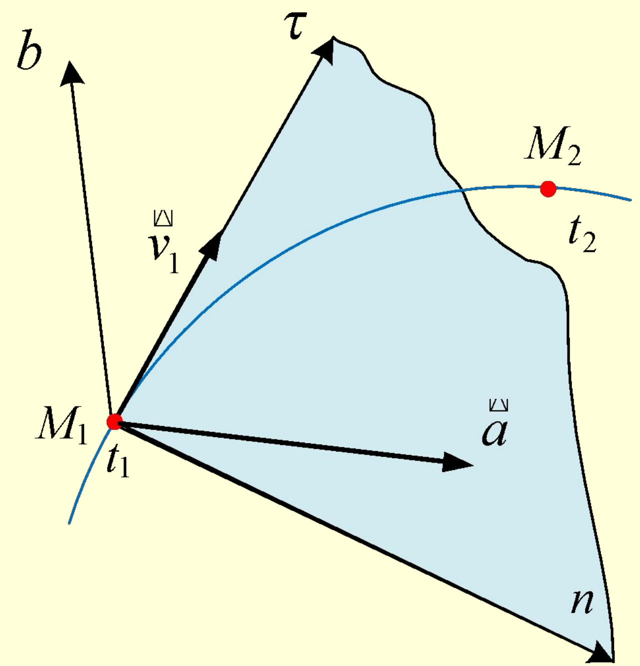


Рис. 14

При стремлении Δt к нулю точка M_2 приближается к точке M_1, при этом вектор среднего ускорения по величине приближается к величине мгновенного ускорения точки в данный момент времени и в пределе, поворачиваясь, располагается в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости осей τ и n, рис. 14.

Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (23)$$

6. Ускорение точки при координатном способе задания её движения

Вектор скорости точки при векторном способе задания движения точки равен:

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z. \qquad (24)$$

В соответствии с формулой (23)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z\right)}{dt} = \vec{i}\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\frac{dv_z}{dt}. \qquad (25)$$

Учитывая, что

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x; \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y; \quad \frac{dv_z}{dt} = a_z;$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Из (25) получим:

$$\vec{a}=\vec{i}\frac{dv_x}{dt}+\vec{j}\frac{dv_y}{dt}+\vec{k}\frac{dv_z}{dt};$$

$$\vec{a}=\vec{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\vec{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\vec{k}\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (26)$$

С другой стороны, вектор ускорения можно разложить по координатным осям:

$$\vec{a}=\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z. \qquad (27)$$

Сравнивая в формулах (26) (27) величины, стоящие при одинаковых единичных векторах, приходим к выводу: проекции ускорения точки на координатные оси x, y, z равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат.

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2};\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2};\quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (28)$$

Модуль ускорения точки равен корню квадратному из суммы квадратов проекций ускорения на координатные оси:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (29)$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами.

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}; \ \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}; \ \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a}. \qquad (30)$$

Из формул (30) определяются значения углов, которые составляет вектор ускорения с координатными осями x, y, z.

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{a_x}{a}\right); \quad \beta_1 = \arccos\left(\frac{a_y}{a}\right); \quad \gamma_1 = \arccos\left(\frac{a_z}{a}\right) \qquad (31)$$

7. Ускорение точки при естественном способе задания её движения

При естественном способе задания движения вектор скорости точки равен:

$$\vec{v} = \vec{\tau} v_{\tau}. \tag{32}$$

Здесь проекция скорости точки на касательную равна первой производной от криволинейной координаты *s* этой точки по времени:

$$v_{\tau} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{33}$$

Продифференцируем по времени равенство (32) и найдём ускорение точки.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} v_{\tau}) = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v. \tag{34}$$

Здесь производная $\frac{dv}{dt}$ равна проекции вектора ускорения точки на касательную.

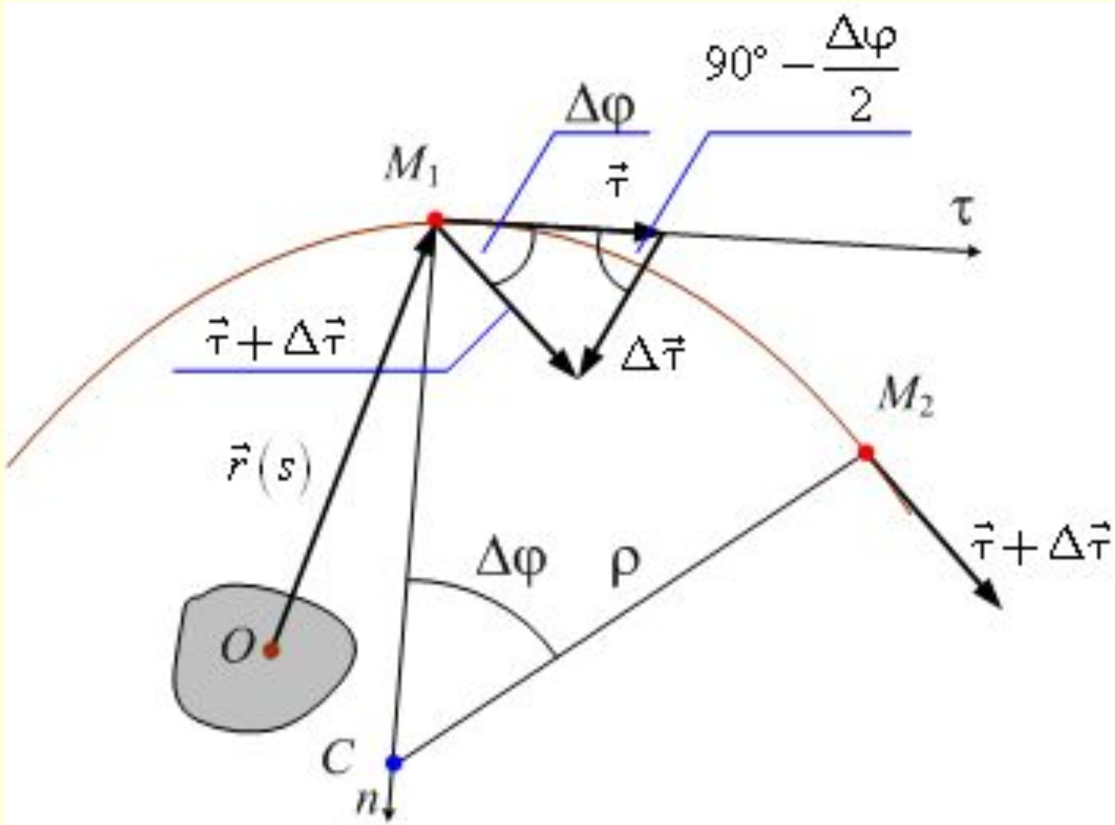
$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (35)$$

Учитывая, что единичный вектор $\vec{\tau}$ является функцией дуговой координаты, которая в свою очередь, является функцией времени, производную $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ представим так:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\left\{\vec{\tau}\left[s(t)\right]\right\}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}v. \qquad (36)$$

Модуль производной $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ равен:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}\right| = \frac{\Delta \varphi}{\rho \Delta \varphi} = \frac{1}{\rho} = k. \qquad (37)$$



$$\left|\Delta\vec{\tau}\right| = 2\cdot\tau\cdot\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cong 2\cdot 1\cdot\frac{\Delta\varphi}{2} \cong \Delta\varphi$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right| = \frac{\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{1}{\rho} = k.$$

Вектор $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ направлен по нормали к центру кривизны.

Таким образом производная (36) равна:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\vec{n}}{\rho} v. \qquad (37)$$

Подставим производную (37) в равенство(34).

$$\vec{a} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \vec{n}\frac{v^2}{\rho}. \qquad (38)$$

Как видим, ускорение точки равно сумме двух векторов. :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (39)$$

Первый вектор направлен по касательной. Его проекция на касательную равна:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \qquad (40)$$

Второй вектор направлен по нормали. Его проекция на нормаль равна:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{41}$$

Модуль вектора ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{42}$$

Угол μ отклонения вектора ускорения от нормали *Mn* определяется по формуле

$$\tan\mu = \frac{a_\tau}{a_n}, \tag{43}$$

а его значения могут быть в интервале

$$-\pi/2 \le \mu \le \pi/2.$$

Конец