ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Конспект лекции

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток

2011

Содержание

1. Уравнения и характеристики плоскопараллельного движения тела

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета.

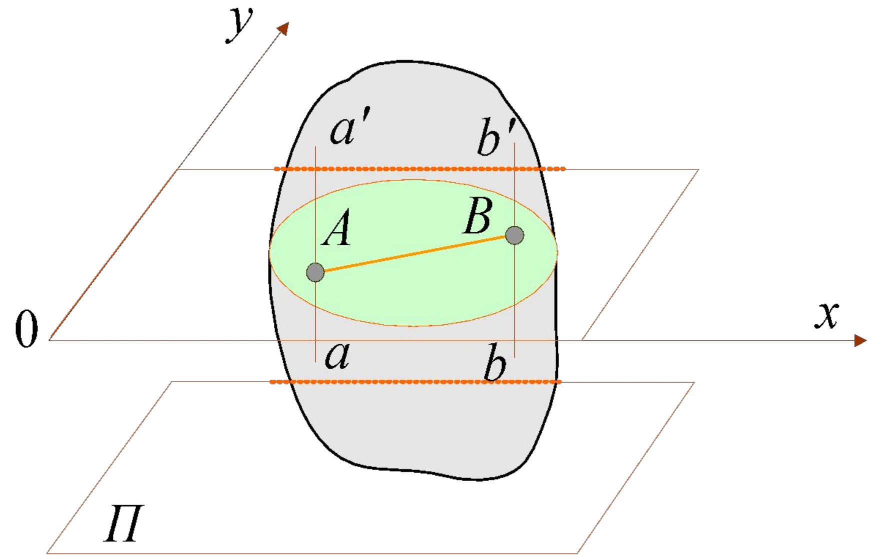


Рис. 1

Примеры плоского движения тел

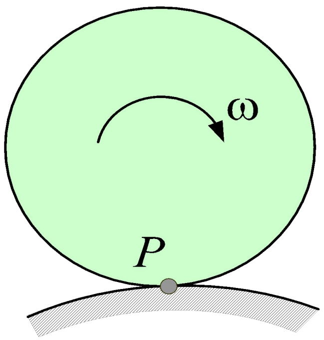


Рис. 2

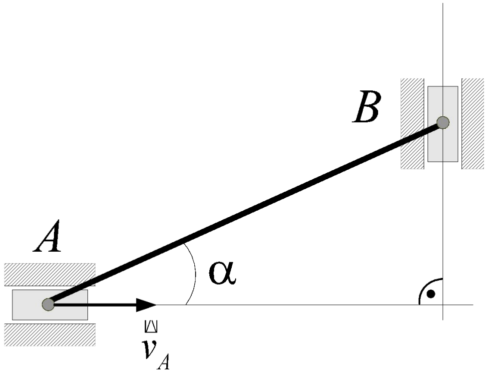


Рис. 3

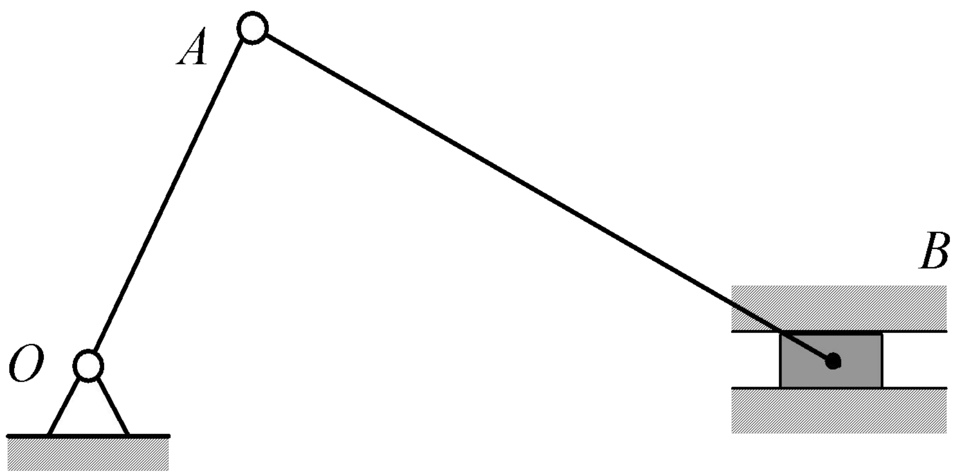


Рис. 4

При плоском движении тела любая прямая, перпендикулярная неподвижной плоскости П (например, прямые aa', bb' на рис. 1), будут совершать поступательное движение, а значит, все кинематические характеристики точек, лежащих на этой прямой, будут тождественны. Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно исследовать, как движется в плоскости *Oxy* сечение этого тела, образующее некоторую плоскую фигуру.

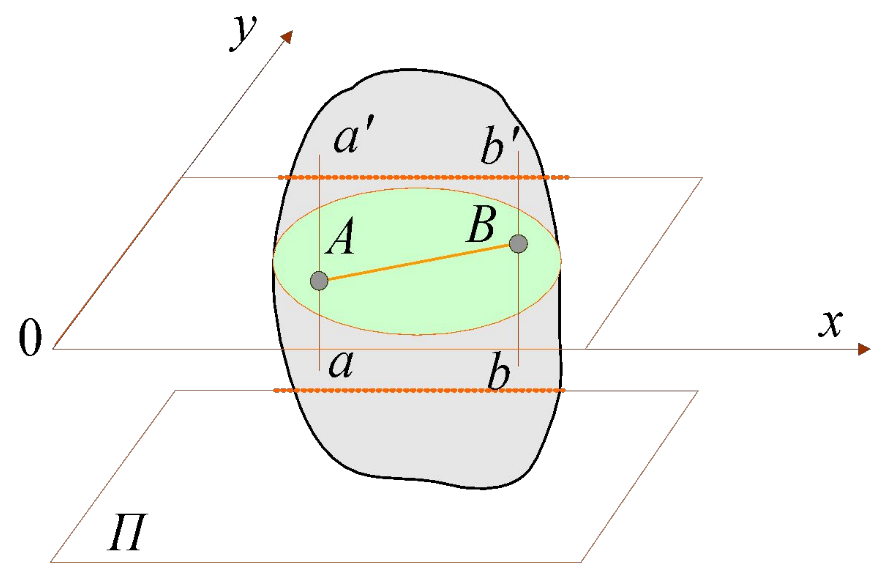


Рис. 1

Положение плоской фигуры в плоскости Oxy определяется положением какого-либо проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис. 5). В свою очередь, положение отрезка AB определяется, например, координатами x_A, y_A точки A и величиной угла ϕ между отрезком AB и осью x. Точку A, выбранную для определения положения плоской фигуры, называют полюсом.

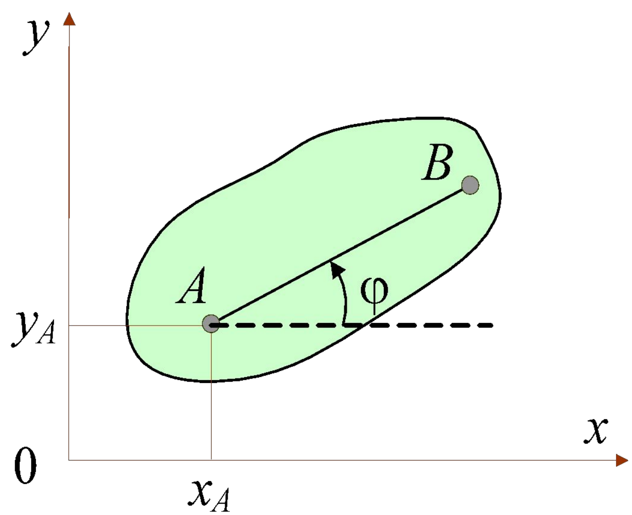
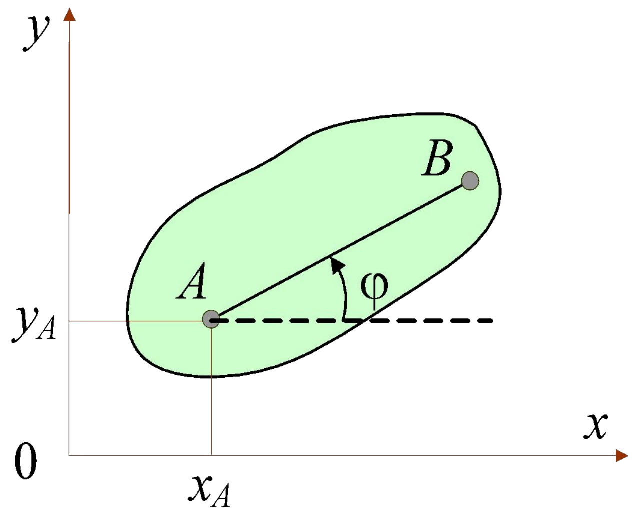


Рис. 5

Таким образом, движение плоской фигуры в её плоскости, а следовательно, и плоскопараллельного движения твердого тела относительно системы координат *Oxy*, определяется тремя уравнениями:

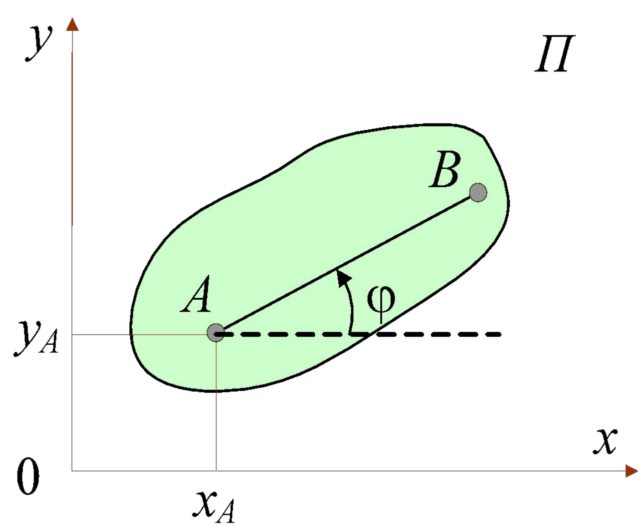
$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t).$$



Анализируя уравнения движения плоской фигуры,

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t),$$

можно заключить, что движение плоской фигуры в ее плоскости представляет собой совокупность двух движений: поступательного движения, при котором все точки движутся так же, как и полюс *A*, и вращательного движения вокруг этого полюса (при этом фигура вращается вокруг оси, проходящей через точку *A* перпендикулярно плоскости *П*).

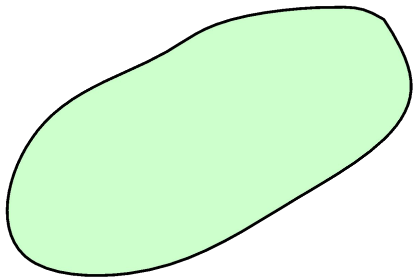


Основными кинематическими характеристиками плоско-параллельного движения твердого тела являются скорость и ускорение полюса ($\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$ – характеристики поступательной части движения), а также угловая скорость и угловое ускорение тела (ω, ε – характеристики вращательной части движения).

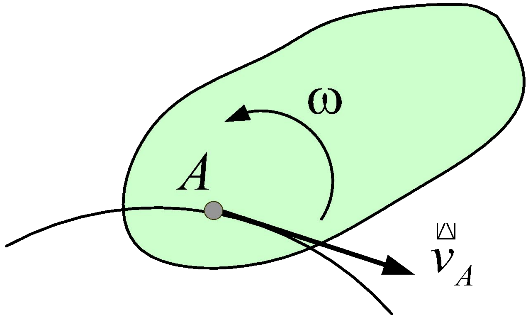
В качестве полюса вообще можно выбирать любую точку фигуры. При изменении точки, выбираемой за полюс, характеристики поступательной части движения изменяются (скорость и ускорение другой точки фигуры в общем случае будут отличаться от $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$), а характеристики вращательной части движения ω, ε останутся неизменными (так как любая прямая сечения, параллельного плоскости *П*, при плоскопараллельном движении твердого тела поворачивается на один и тот же угол).

2. Определение скорости точки плоской фигуры

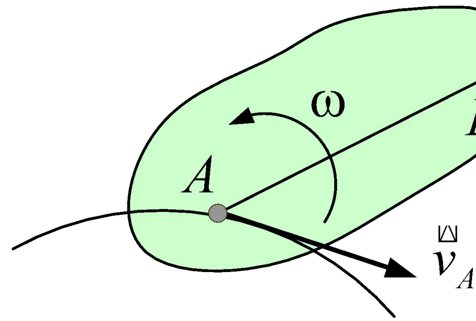
Рассмотрим плоскую фигуру, которая перемещается в плоскости экрана.



Выберем в качестве полюса произвольную точку *A* плоской фигуры, которая перемещается по своей траектории со скоростью $\vec{v}_A$.

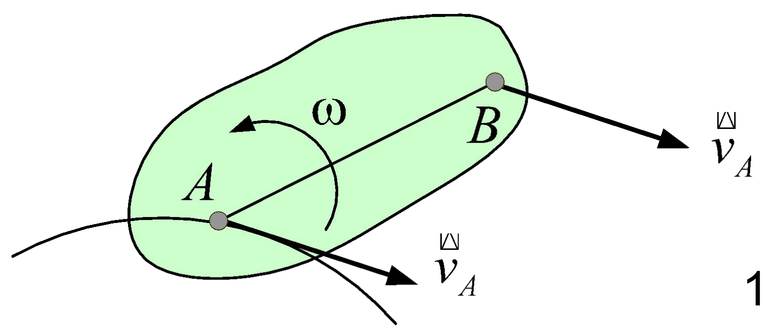


Определим скорость произвольной точки B.

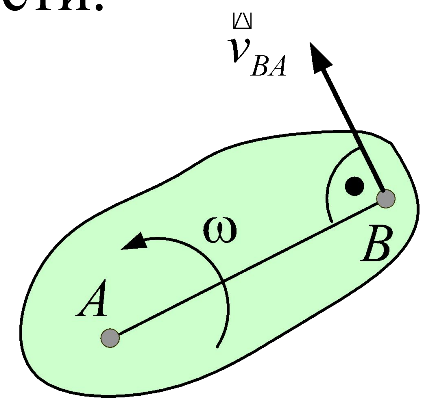


В предыдущем параграфе мы установили, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из двух движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса.

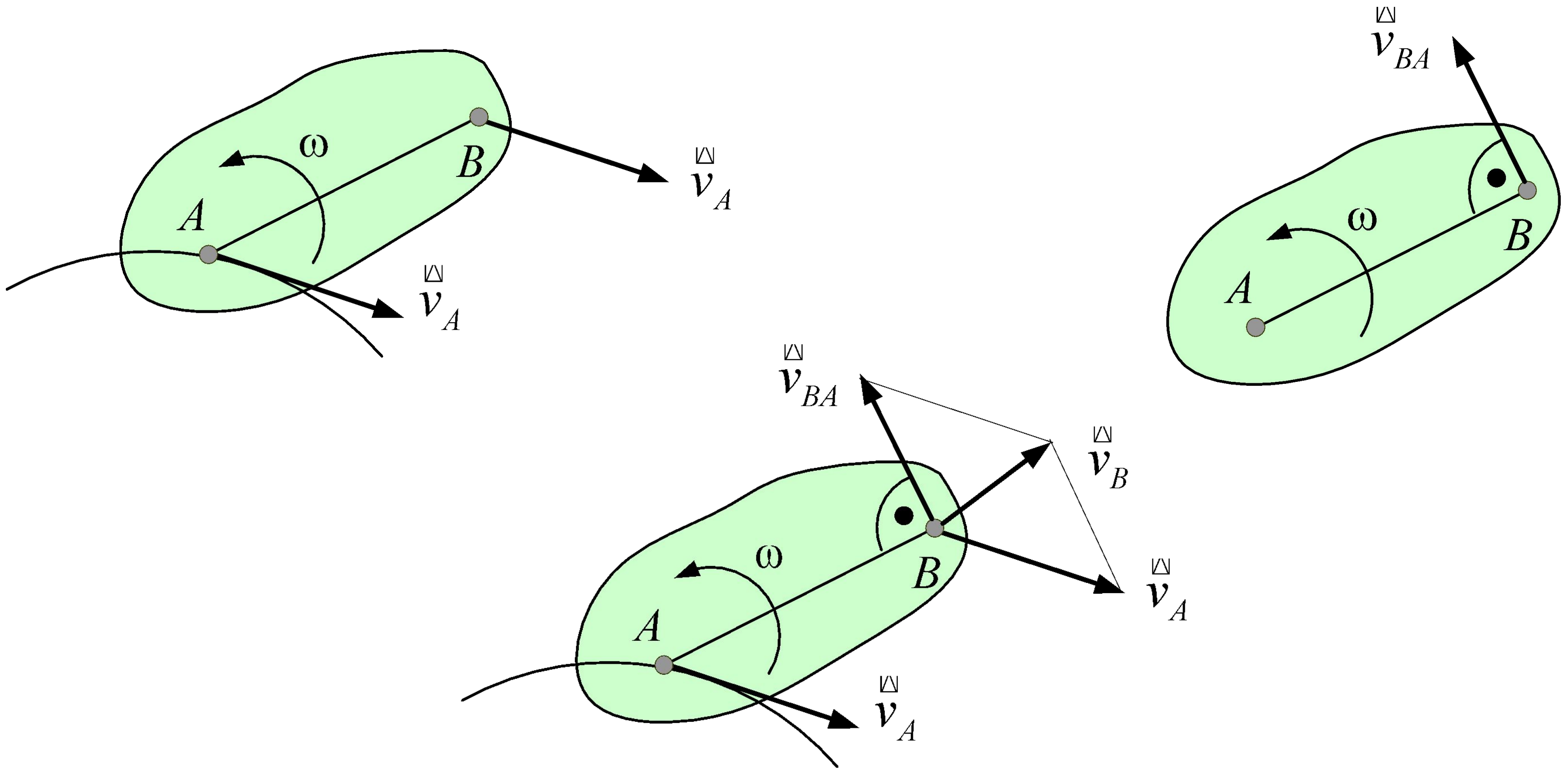
Остановим вращательное движение плоской фигуры относительно полюса. В этом случае плоская фигура совершает поступательное движение и скорость точки B равна скорости точки A.



Остановим поступательное движение плоской фигуры. Точка *B* во вращательном движении вокруг полюс *A* будет иметь скорость, вектор которой направлен перпендикулярно линии *AB* в сторону угловой скорости.



При плоскопараллельном движении плоская фигура одновременно совершают два движения: поступательное и вращательное. Поэтому вектор скорости точки *B* будет складываться из двух скоростей: скорости в поступательном движении вместе с полюсом *A* и скорости во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.



Таким образом, скорость произвольной точки *B* плоской фигуры геометрически равна сумме двух скоростей: скорости полюса, и скорости точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Приведенное векторное равенство получило название формулы Эйлера. В соответствии с правилами векторной алгебры модуль скорости точки *B* равен:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA}\cos\left(\vec{v}_{A,}\vec{v}_{BA}\right)}.$$

Модуль скорости точки *B* можно определить, проецируя Формулу Эйлера на координатные оси:

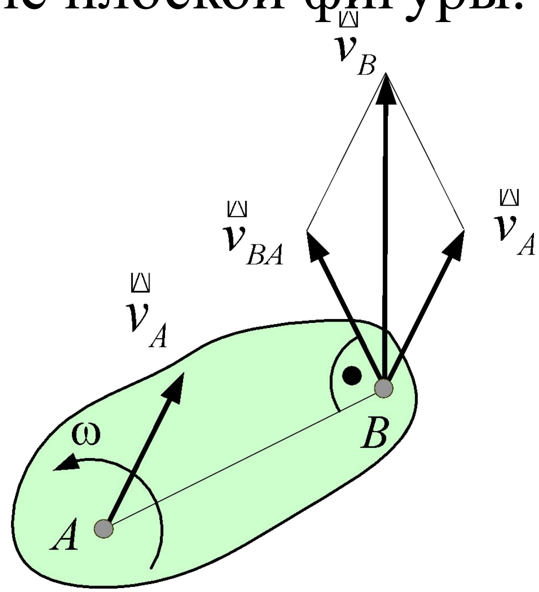
$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{BAx};$$

$$v_{By} = v_{Ay} + v_{BAy};$$

$$v_{Bx} = \sqrt{v_{By}^2 + v^2}\ .$$

3. Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры

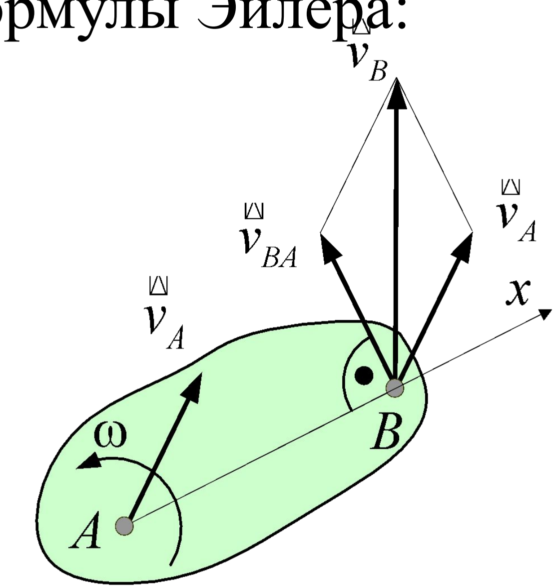
Рассмотрим движение плоской фигуры.



Для двух произвольных точек плоской фигуры A и B справедлива формула Эйлера:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Проведём через точки *AB* ось *x* и спроецируем на неё векторное выражение формулы Эйлера:



$$\text{Пр}_x\left(\vec{v}_B\right) = \text{Пр}_x\left(\vec{v}_A\right) + \text{Пр}_x\left(\vec{v}_{BA}\right).$$

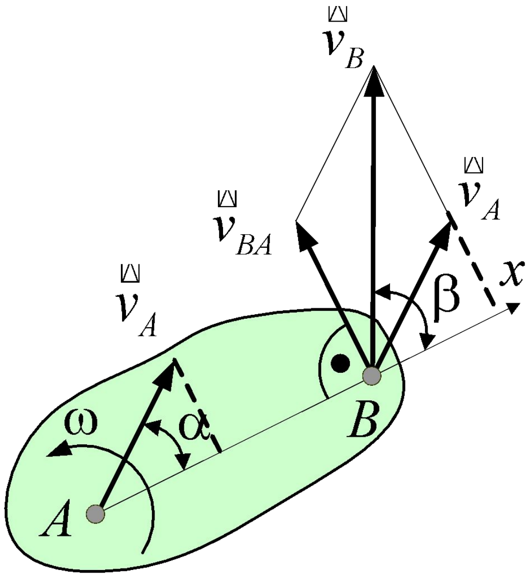
Так как вектор $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярен оси, то его проекция на ось равна нулю. Поэтому

$$\text{Пр}_x\left(\vec{v}_B\right) = \text{Пр}_x\left(\vec{v}_A\right).$$

Таким образом мы доказали теорему: проекции скоростей двух произвольных точек плоской фигуры на ось, проведённую через эти точки, равны.

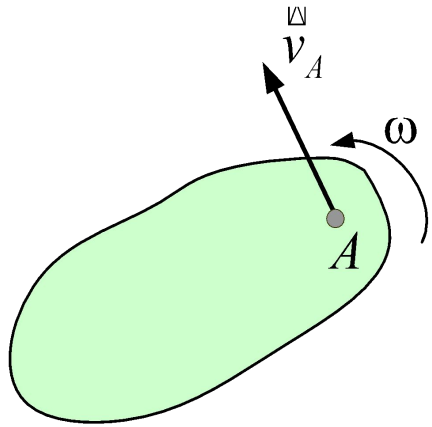
Если углы, которые составляют векторы скоростей точек A и B с осью известны, то в соответствии с теоремой получим:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.$$



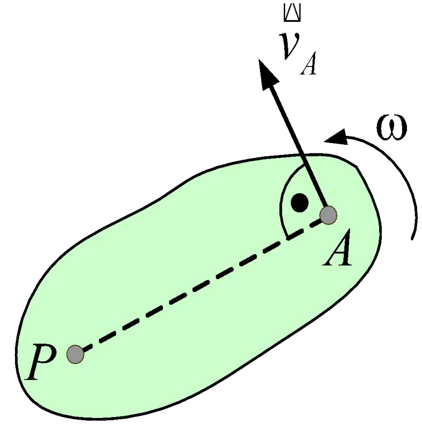
4. Мгновенный центр скоростей

Рассмотрим плоскую фигуру, которая в данный момент совершает плоскопараллельное движение и имеет угловую скорость ω. Точки A имеет скорость $\vec{v}_A$.



Из точки A построим перпендикуляр к вектору скорости точки и отложим на нём отрезок AP, равный:

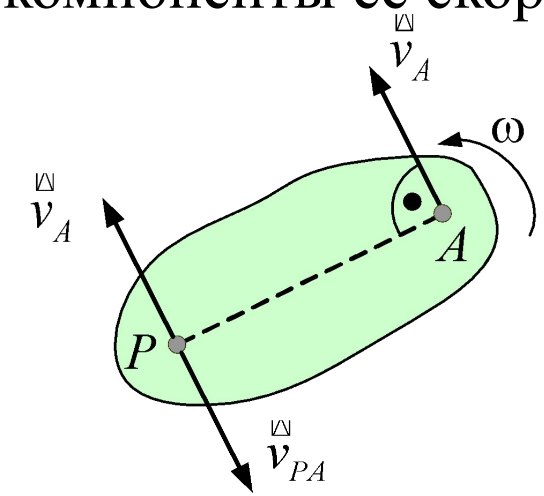
$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$



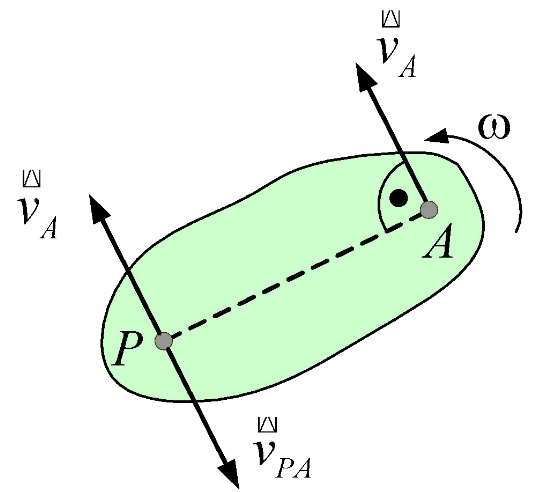
Примем точку A за полюс и определим скорость точки P по формуле Эйлера.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}.$$

Построим в точке P компоненты её скорости.



Как видим, эти векторы имеют противоположное направление.



Определим величину вектора $\vec{v}_{PA}$.

$$v_{PA} = \omega PA = \frac{\omega v_A}{\omega} = v_A.$$

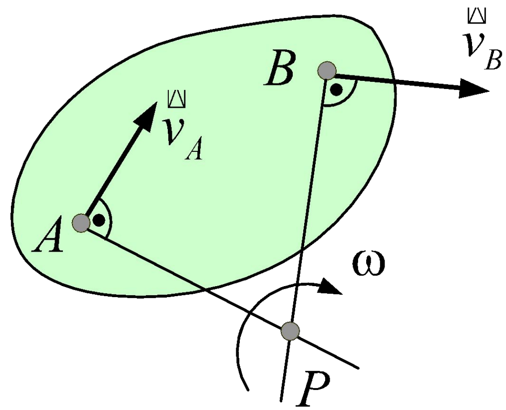
Таким образом, векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{PA}$ равны и противоположны. Значит скорость точки P равна нулю.

Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС).

Мгновенный центр скоростей находится на перпендикуляре к вектору скорости любой точки плоской фигуры и может быть расположен как на самой фигуре так и за её пределами на её мысленном продолжении.

5. Определение положения мгновенного центра скоростей

Если известны направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ каких-нибудь двух точек *A* и *B* плоской фигуры, то мгновенный центр скоростей будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек *A* и *B* к скоростям этих точек.

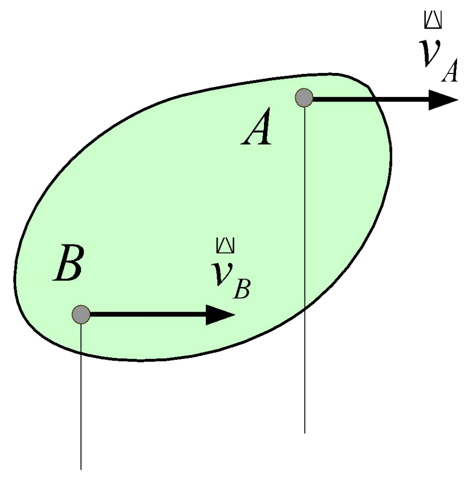


Скорости точек равны:

$$v_A = \omega AP;\ v_B = \omega BP \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

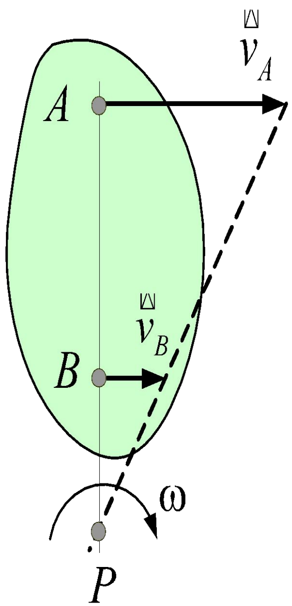
Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как будто эта фигура вращается вокруг мгновенного центра скоростей.

Если скорости точек плоской фигуры параллельны, то перпендикуляры к векторам скоростей не пересекаются и мгновенный центр скоростей отсутствует. Это означает, что плоская фигура в данный момент времени совершает мгновенное поступательное движение.



$$\omega = 0.$$

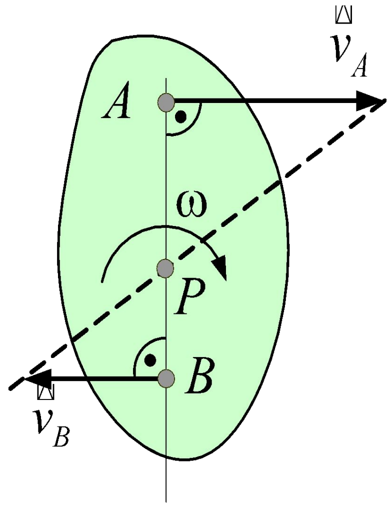
Если скорости точек плоской фигуры параллельны и перпендикуляры к векторам скоростей совпадают, то проведя линию через концы векторов скоростей, получим подобные треугольники. Из подобия треугольников получим:



$$\left.\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}\right| \Rightarrow \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega$$

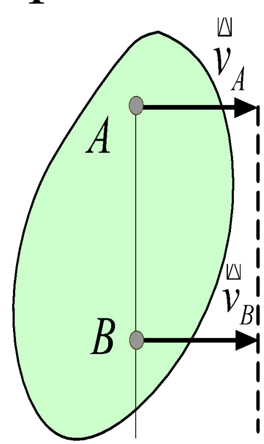
Эти соотношения справедливы для мгновенного центра скоростей. Следовательно, точка *P* для рассмотренного случая является мгновенным центром скоростей.

Если векторы скоростей имеют противоположное направление, то МЦС находится между векторами скоростей.



$$\left.\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}\right| \Rightarrow \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega$$

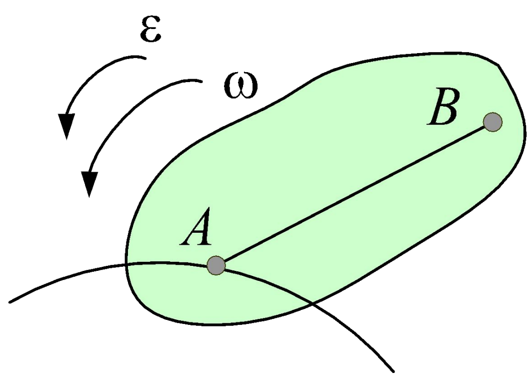
Если векторы скоростей имеют одинаковое направление и равны по величине, то мгновенного центра скоростей нет и плоская фигура совершает мгновенное поступательное движение.



$$\omega = 0.$$

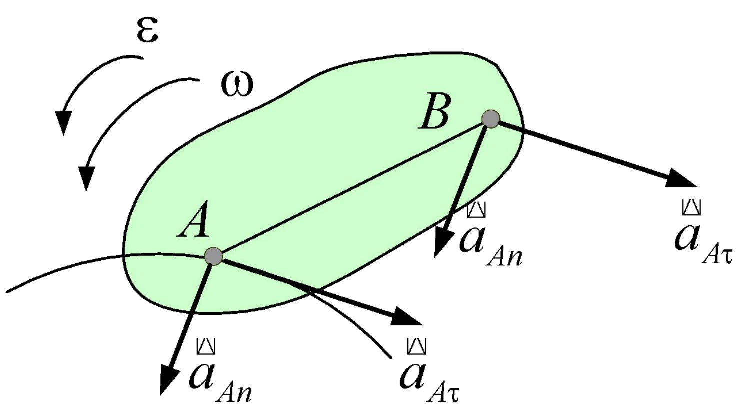
6. Определение ускорения точки плоской фигуры

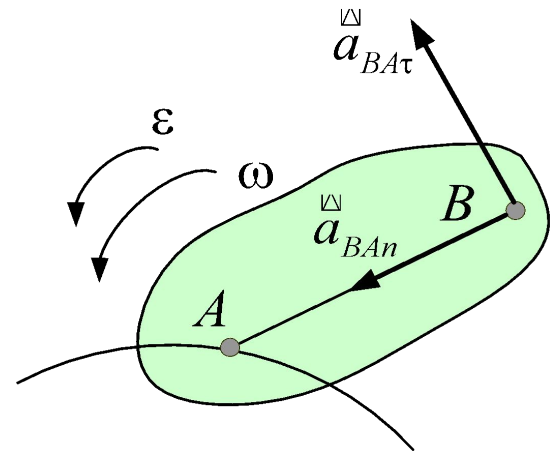
Рассмотрим плоскую фигуру. Примем точку *A* за полюс и определим ускорение точки *B*.



При определении ускорения точки *B* так же будем исходить из того, что движение плоской фигуры состоит из двух движений: поступательного движения вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса.

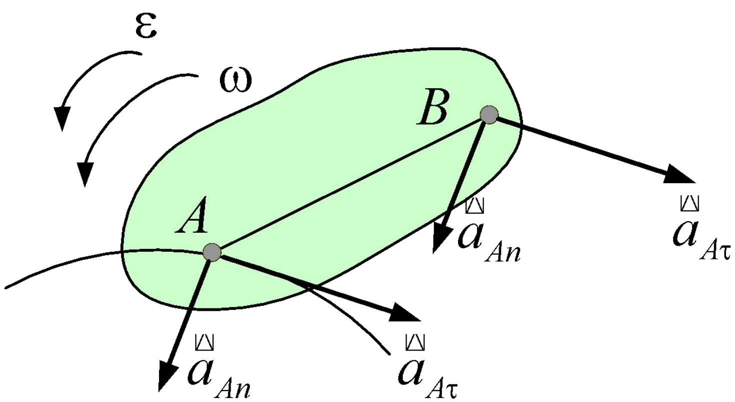
Остановим вращательное движение плоской фигуры. При поступательном движении ускорение точки *B* равно ускорению полюса и состоит из двух ускорений: касательного и нормального.

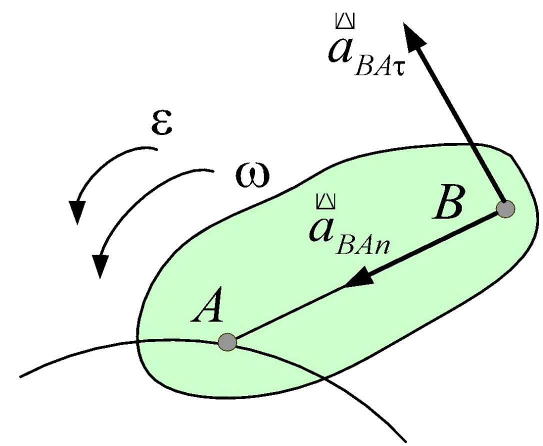




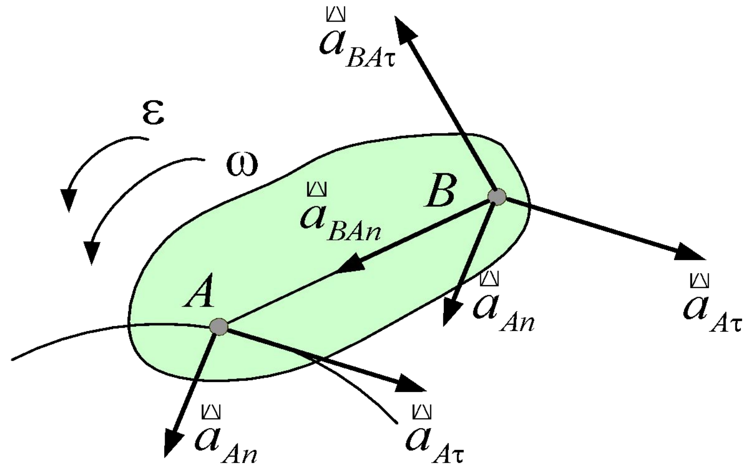
Остановим поступательное движение плоской фигуры. В этом случае ускорение точки *B* равно сумме двух ускорений во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса: касательного (вращательного) и нормального (центростреми-тельного)

Мы уже знаем, что при плоскопараллельном движении плоская фигура одновременно совершают два движения: поступательное и вращательное. Поэтому вектор ускорения точки *B* будет складываться из четырёх векторов: касательного и нормального ускорений точки в поступательном движении вместе с полюсом *A* и касательного и нормального ускорений точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.





$$\vec{a}_B = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn},$$



Складывая векторы ускорений точки B в поступательном и вращательном движениях плоской фигуры, получим:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An}; \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn}.$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

Таким образом, ускорение произвольной точки плоской фигуры равно сумме двух ускорений: ускорения полюса и ускорения точки во вращательном движении вокруг полюса.

На практике при решении задач ускорение точки плоской фигуры раскладывают на компоненты

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA\tau} + \vec{a}_{BAn},$$

а затем это векторное равенство проецируют на координатные оси:

$$a_{Bx} = a_{A\tau x} + a_{Anx} + a_{BA\tau x} + a_{BAnx};$$

$$a_{By} = a_{A\tau y} + a_{Any} + a_{BA\tau y} + a_{BAny}.$$

Если неизвестным является ускорение точки B, то находят модуль этого ускорения:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}.$$

КОНЕЦ