ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

# СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

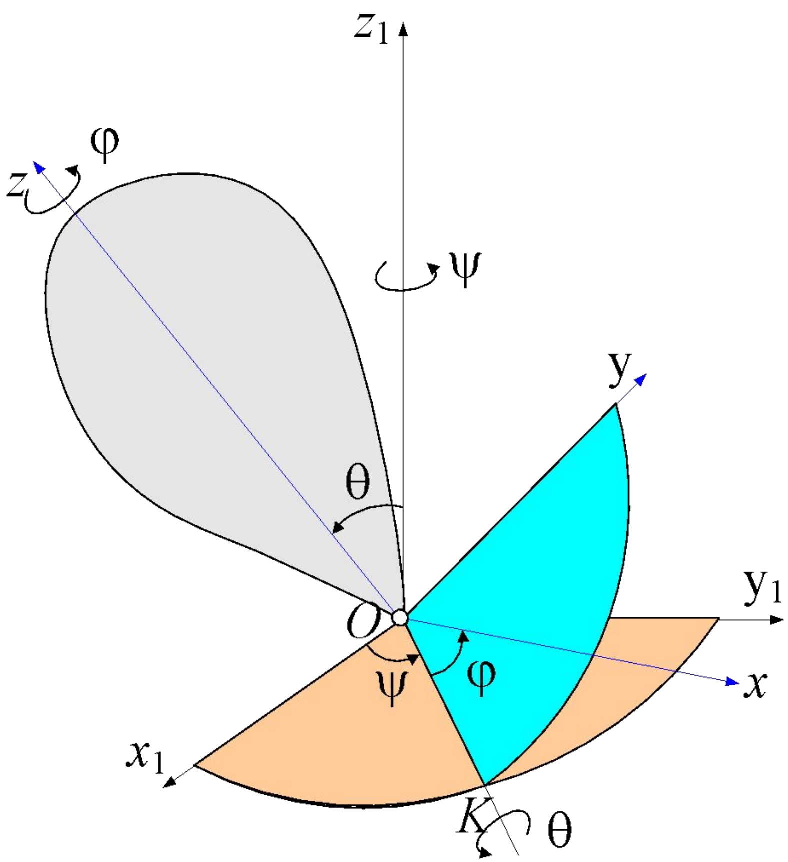
Конспект лекции

Составил В. Г. Непейвода

Владивосток
2011

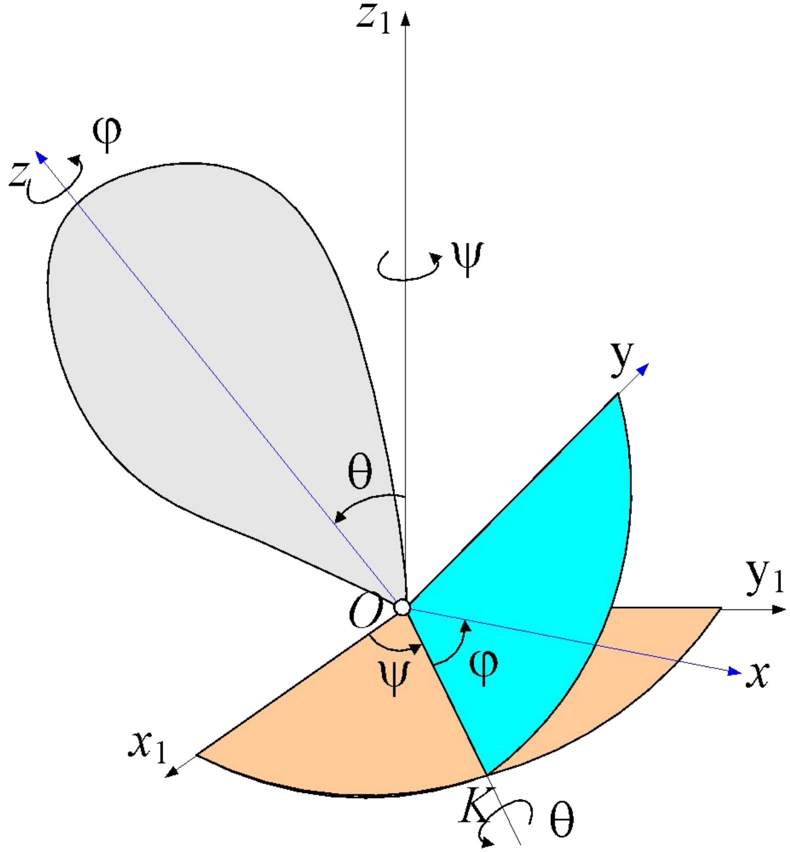
# Содержание

# 1. Уравнения сферического движения тела




Сферическим называется такое движение тела, при котором одна его точка остаётся неподвижной.

Все другие точки движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. По этой причине и называется движение тела с одной неподвижной точкой сферическим.




$ox_1y_1z_1$ – неподвижная система координат.

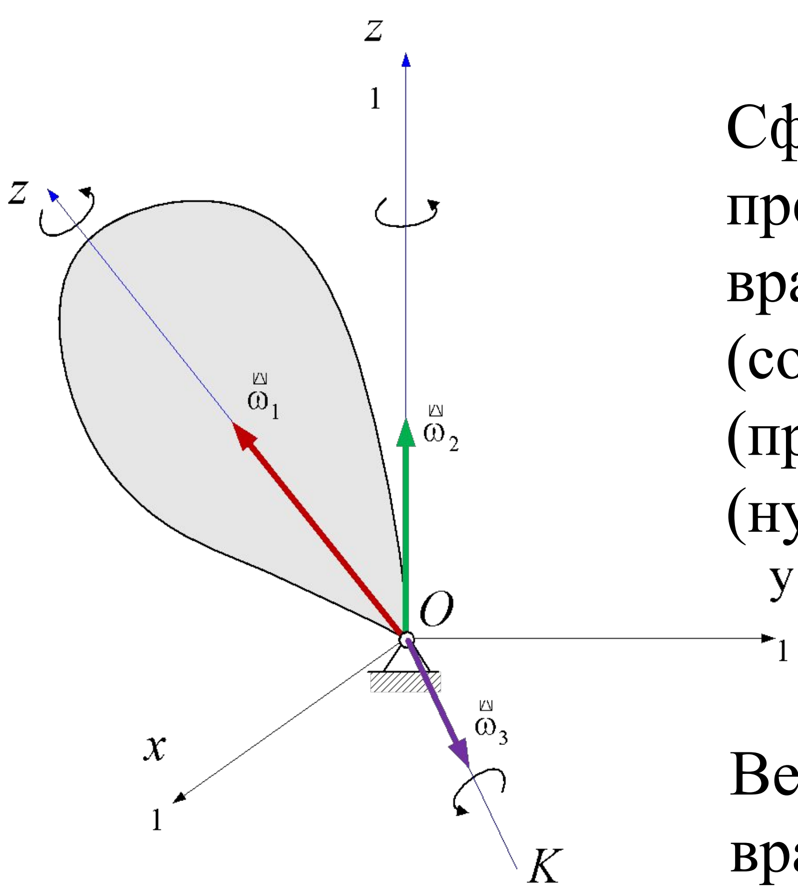
$oxyz$ - подвижная система координат, связанная с телом.

ϕ – угол собственного вращения;
Ψ – угол прецессии.
θ – угол нутации.

Уравнения сферического движения

$$\phi = f_1(t);\ \psi = f_2(t);\ \theta = f_3(t).$$

# 2. Угловая скорость вращения тела. Мгновенная ось вращения

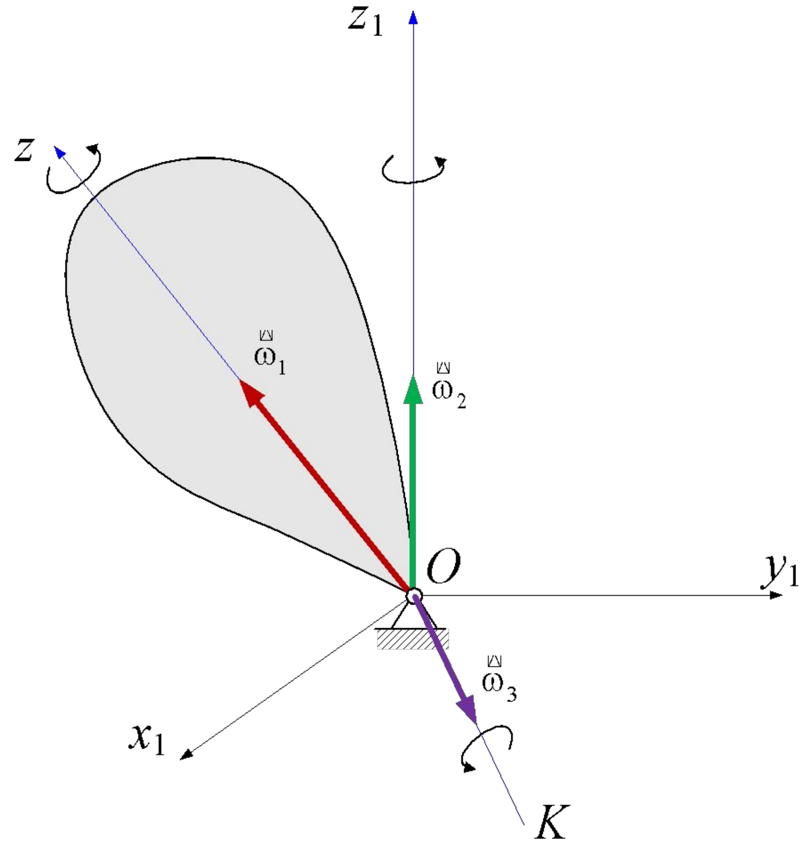



Сферическое движение тела представляется как совокупность трёх вращательных движений: вокруг оси $z$ (собственное вращение); вокруг оси $z_1$ (прецессия); вокруг линии узлов $ok$ (нутация).

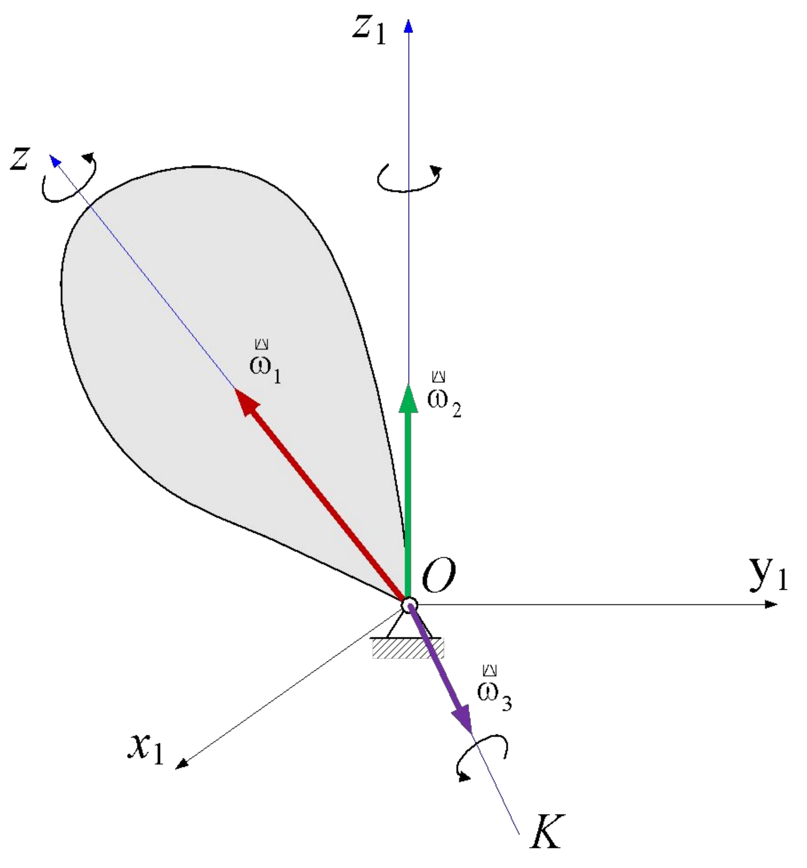
Векторы угловых скоростей этих вращательных движений направлены соответственно по осям $z$, $z_1$, $ok$.

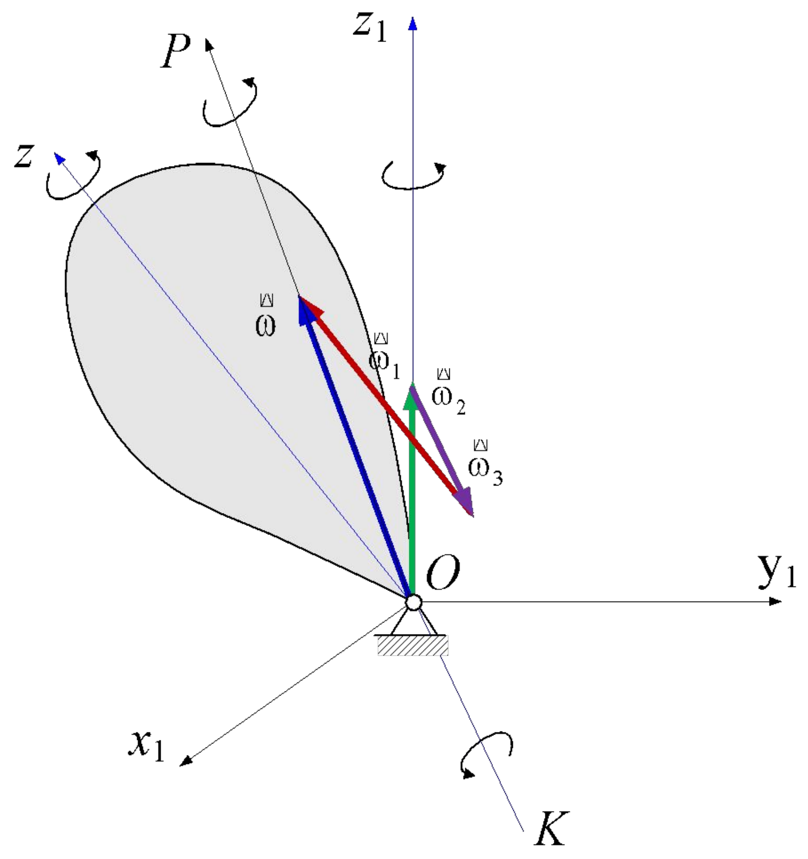
В целом же движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей вращения вокруг осей z, $z_1$, $ok$.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.$$

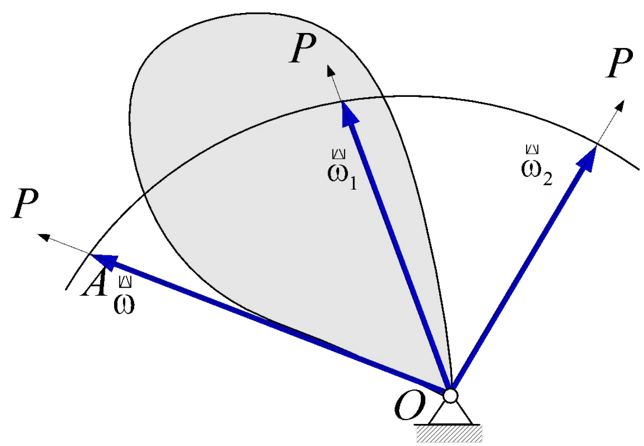


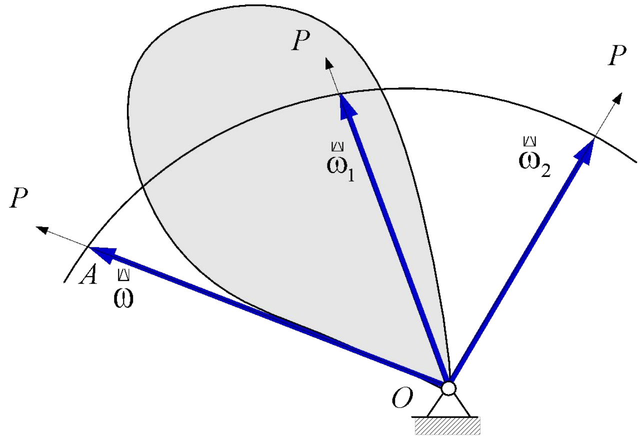
Вектор угловой скорости, полученный от сложения угловых скоростей сферического движения тела, направлен вдоль оси, относительно которой тело совершает вращательное движение в данный момент времени.



Угловая скорость сферического движения непрерывно изменяются с течением времени по величине и направлению. Поэтому ось *OP*, вдоль которой направлен вектор суммы угловых скоростей непрерывно меняет своё направление в пространстве но походит всё время через точку *O*.





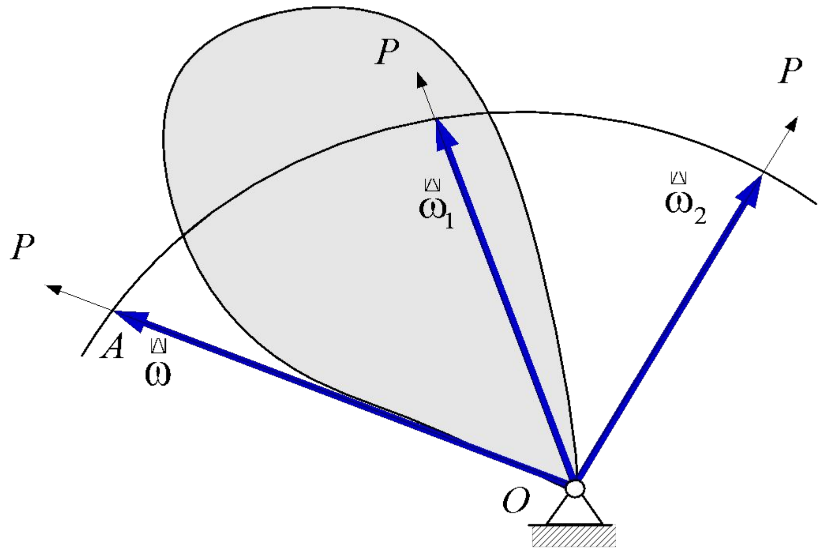

Суммарная угловая скорость тела характеризует движение тела в какой-то определённый момент времени.

Поэтому вектор $\bar{\omega}$ называют вектором мгновенной угловой скорости, а ось *OP* – мгновенной осью вращения.

Мгновенная ось вращения представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

# 3. Угловое ускорение тела

При сферическом движении тела положение мгновенной оси вращения со временем изменяется. Следовательно, изменяется не только модуль но и направление вектора угловой скорости тела.



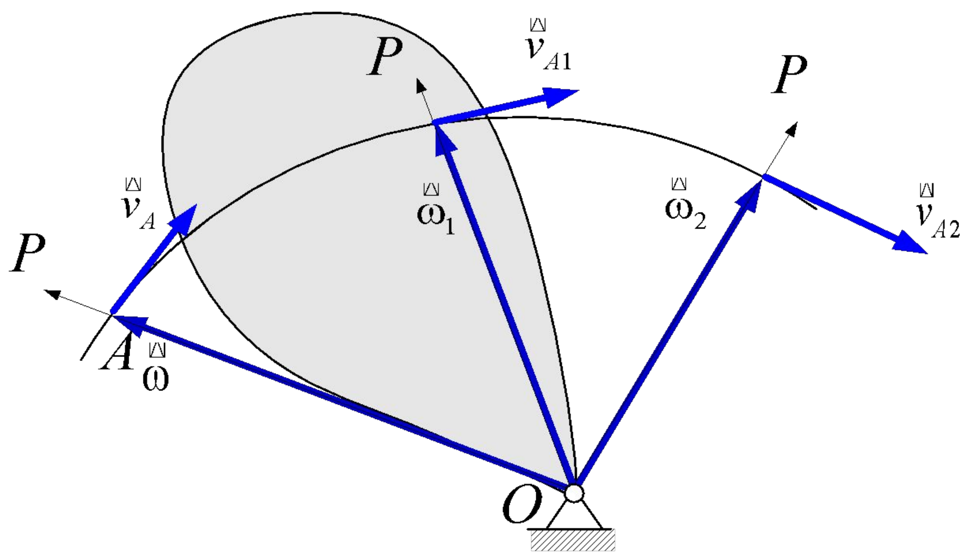

Изменение вектора угловой скорости характеризуется вектором углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Вектор угловой скорости является радиус-вектором точки $A$. Поэтому скорость точки $A$ равна:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Направлен вектор скорости точки $A$ по касательной к её траектории.



Сравнивая формулы:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}; \qquad \vec{v}_A = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

приходим к выводу:

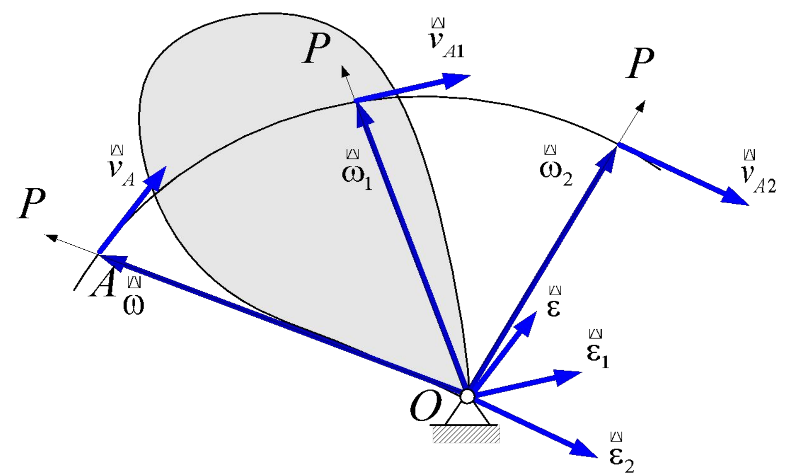
$$\vec{\varepsilon} = \vec{v}_A.$$

Это равенство отражает теорему Резаля в кинематике:

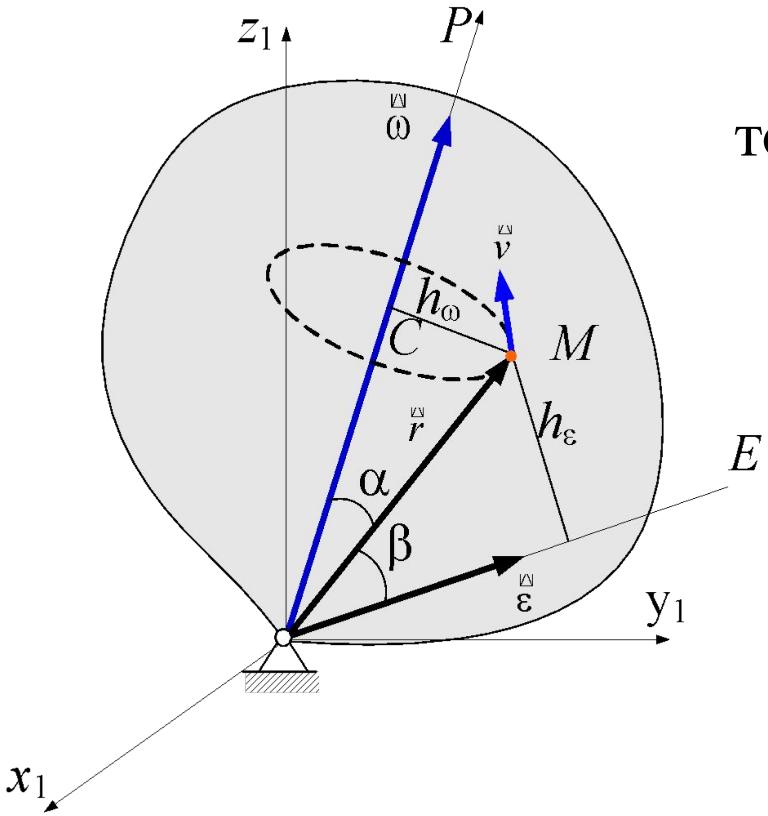
Вектор ускорения тела при сферическом движении геометрически равен скорости конца вектора мгновенной угловой скорости тела.

Поэтому вектор углового ускорения тела при сферическом движении в каждый момент времени направлен параллельно вектору скорости точки $A$.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{v}_A.$$



# <u>4.</u> Скорость и ускорение точки тела при сферическом движении




Определим вектор скорости точки $M$ и его модуль.

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r};$$

$$v_M = \omega \times h_\omega.$$

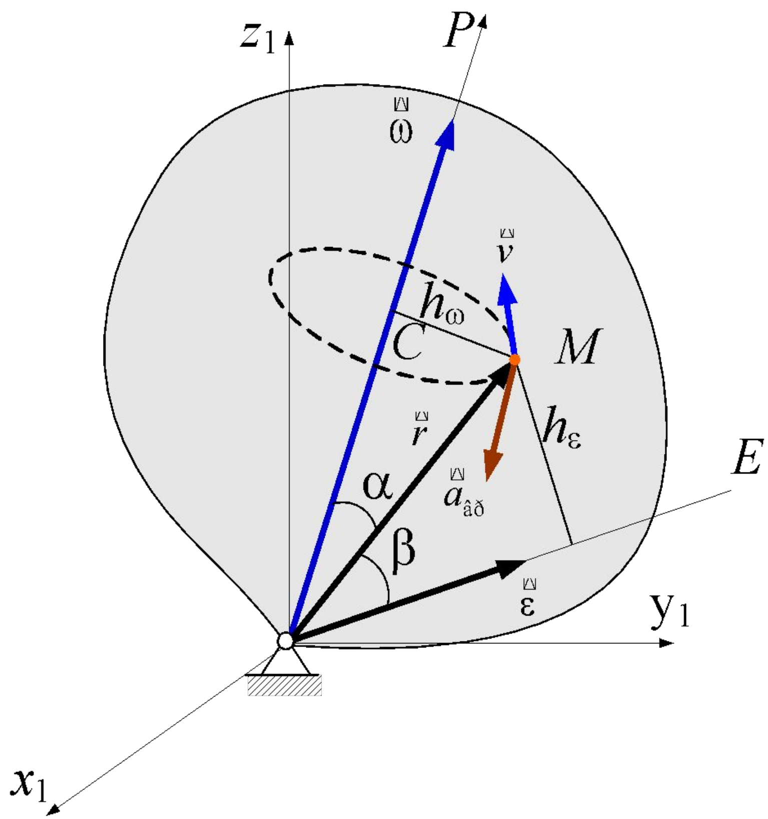
Ускорение точки $M$ равно:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v};$$

Ускорение, равное векторному произведению $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ называется вращательным. Модуль этого ускорения равен:

$$\left|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right| = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\left(\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right) = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\beta) = \varepsilon \cdot h_{\varepsilon} = a_{\text{вр}}.$$

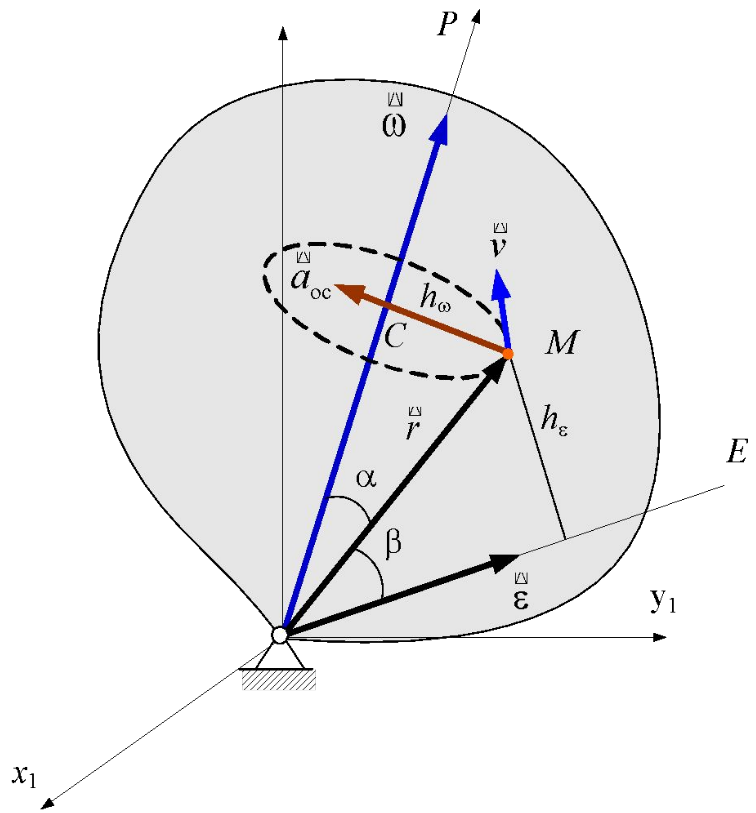
Направление вектора вращательного ускорения определяем по правилу определения направления векторного произведения.



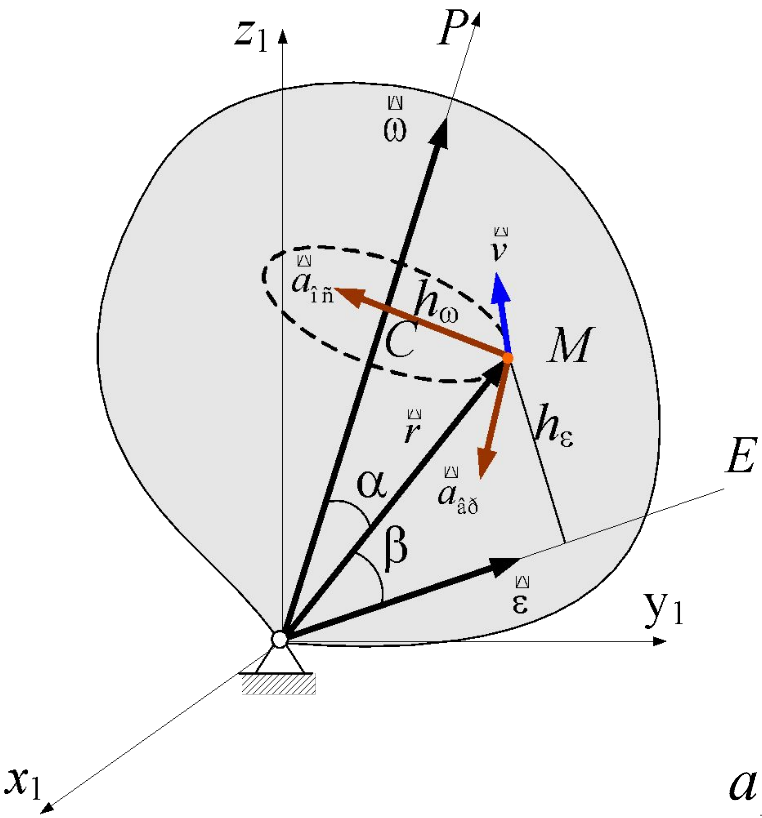
Ускорение, равное векторному произведению $\vec{\omega}\times\vec{v}$, называется осестремительным. Модуль этого ускорения равен:

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{v}\right| = \omega\cdot v\cdot\sin\left(\vec{\omega},\vec{v}\right) = \omega\cdot v\cdot\sin\left(90^{\circ}\right) = \omega\cdot v = \omega\cdot\omega\cdot h_{\omega} = \omega^{2}\cdot h_{\omega} = a_{oc};$$

Направление вектора осестремительного ускорения определяем по правилу определения направления векторного произведения.



Таким образом, ускорение точки тела при сферическом движении равно сумме двух ускорений: вращательного и осестремительного.




$$\vec{a}_M = \vec{a}_{вр} + \vec{a}_{ос};$$

Модуль ускорения точки определяется по формуле косинусов:

$$a_M = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{ос}^2 + 2 \cdot a_{вр} \cdot a_{ос} \cdot \cos\left(\vec{a}_{вр}, \vec{a}_{ос}\right)}.$$

Аналогами вращательного и осестремительного ускорений в кинематике точки являются соответственно касательное и нормальное ускорения.

**КОНЕЦ**