

Лекция № 9

Математическая логика

Системы счисления и логика предикатов

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Математическая логика стремится к возможно большей точности. Эта цель достигается с помощью точного языка, построенного из устойчивых, наглядно воспринимаемых знаков.

В исчислении высказываний используются символы трех видов:

- **1. Пропозициональные переменные.**
- Их будем обозначать малыми буквами латинского алфавита с индексами или без них: $x, y, x, \dots, p, q, \dots$. Различные буквы обозначают разные суждения, внутренняя структура суждений нас не интересует.
- **Суждения, обозначенные пропозициональными переменными, называются высказываниями.**

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Будем полагать, что высказывания удовлетворяют закону исключенного третьего и закону непротиворечия, т.е. **каждое высказывание либо истинно, либо ложно.**
- Так что каждая переменная у нас будет принимать два значения: значения «истина» будем обозначать «1», а значение «ложь» – «0».
- 2. **Константы или логические связи** – «—», « \wedge », « \vee », « \rightarrow », « \equiv ».
- 3. **Скобки**: «(» - левая скобка и «)» - правая скобка.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- С помощью констант (связок) атомарные высказывания соединяются в более сложные высказывания. Так из двух высказываний p и q с помощью констант образуются высказывания
- $\neg p$ - читается «не- p » - отрицание
- $\neg q$ - читается «не- q »
- $p \wedge q$ – читается « p и q » - конъюнкция
- $p \vee q$ – читается « p или q » - дизъюнкция
- $p \rightarrow q$ - читается «если p , то q » - импликация
- $p \equiv q$ - читается « p тогда и только тогда, когда q » - эквивалентность
- Сложное высказывание, образованное с помощью знака « \neg » называется отрицанием, знака – « \wedge » - конъюнкцией, знака « \vee » - дизъюнкцией, знака « \rightarrow » - импликацией, знака « \equiv » - эквивалентностью.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Переменные и сложные высказывания, образованные из них посредством многократного применения логических связок и скобок называются формулами исчисления высказываний, если они удовлетворяют трем условиям:

.Пропозициональная переменная есть формула

.Если φ и ψ – формулы, то $(\Box\varphi)$, $(\Box\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \equiv (\psi)$ – формулы. Входящие в эти формулы, формулы (φ) и (ψ) мы будем называть подформулами этих формул.

.Всякая формула есть либо пропозициональная переменная или образуется из пропозициональных переменных последовательным применением правила 2).

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Для того, чтобы избежать слишком, большое количество скобок принимаются следующее соглашение:
 1. Опускаются скобки, объемлющие отдельные переменные.
 2. Полагают, что знак конъюнкций связывает сильнее, чем дизъюнкции и в формулах $(\varphi \wedge \psi) \vee \gamma, \gamma \vee (\varphi \wedge \psi)$ скобки можно опускать.
 3. Аналогичные соглашения принимаются относительно других знаков, т.е. считается, что знак « \wedge » связывает сильнее, чем знаки « \vee », « \rightarrow », « \equiv », знак « \vee » сильнее, чем знаки « \rightarrow », « \equiv », знак « \rightarrow » сильнее, чем знак « \equiv ».

Правда, для легкости чтения формул мы будем иногда отступать от этих соглашений.

2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Любая формула алгебры высказываний рассматривается как сложное высказывание, принимающее значение 0,1.
- В алгебре высказываний решается следующая задача: определить истинностное значение формулы исчисления высказываний для любой комбинации истинностных значений входящих в нее переменных.
- Для решения этой задачи пользуются следующим алгоритмом.
 1. Атомарное высказывание, т.е. переменная, может принимать два значения «1» или «0».
 2. Значение формул образованных неоднократным применением логических связок к атомарным высказываниям, задается таблицей:

2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

3. Для произвольной формулы сначала задаются все комбинации истинностных значений переменных. Затем для каждой комбинации истинностных значений переменных вычисляются значение подформул данной формулы, образованных из переменных однократным применением логических связок, далее вычисляется значение подформул, образованных из предыдущих подформул однократным применением логических связок и т.д. пока в итоге не найдут истинностное значение всей формулы.

2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Так, пользуясь указанным алгоритмом можно легко вычислить истинностное значение формулы:

-

- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	p → q	q → r	p → r	$(p \rightarrow q) \wedge$ $(q \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \wedge$ $(q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Каждой формуле исчисления высказываний соответствует определенная функция, аргументы которой принимают значение из множества $\{0,1\}$ и сама она принимает значение из этого множества.

Эту функцию называют функцией исчисления высказываний.

Проблема разрешимости в алгебре высказываний заключается в решении вопроса, является ли сложная формула

.тождественно истинной, т.е. истинной при всех значениях входящих в нее переменных,

.выполнимой, т.е. истинной лишь для некоторого набора значений переменных,

.тождественно ложной, т.е. ложной при всех значениях переменных.

2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Это проблема полностью решается посредством вычисления значения функции, представленной данной формулой, с помощью таблиц истинности.
- **Функция исчисления высказываний выражает логический закон, если является тождественно истинной при всех возможных значениях переменных.**
- Так, с помощью таблицы убеждаемся, что функция $p \vee \neg p$ выражает логический закон - **закон исключенного третьего**:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- Аналогичным образом убеждаемся, что функция $p \wedge \neg p$ тоже выражается логический закон: **закон непротиворечия**:

p	\bar{p}	$p \wedge \bar{p}$	$\overline{p \wedge \bar{p}}$
0	1	0	1
1	0	0	1

3. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

- С помощью таблиц истинности можно убедиться, что нижеприведенные функции выражают логические законы.
- Напишем следующие **9 законов логики**:
- **Закон тождества**: $p \equiv p$ (1)
- **Закон отрицания**:
 - для конъюнкции: $p \wedge \neg p$ (2) (закон непротиворечия)
 - для дизъюнкции: $p \vee \neg p$ (2^1) (закон исключенного третьего)

3. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

Закон идемпотентности:

- для конъюнкции: $p \wedge p \equiv p$ (3)
- для дизъюнкции: $p \vee p \equiv p$ (3¹)

Закон коммутативности:

- для конъюнкции: $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (4)
- для дизъюнкции: $p \vee q \equiv q \vee p$ (4¹)

Ассоциативный закон:

- для конъюнкции: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$ (5)
- для дизъюнкции: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$ (5¹)

Дистрибутивный закон:

- для конъюнкции дизъюнкций: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (6)
- для дизъюнкции конъюнкций: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (6¹)

3. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

Закон поглощения:

- для конъюнкции дизъюнкций: $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ (7)
- для дизъюнкции конъюнкций: $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ (7¹)

Закон двойственности (теорема де Моргана):

- для конъюнкции: $p \wedge q \equiv \neg p \vee \neg q$ (8)
- для дизъюнкции: $p \vee q \equiv \neg p \wedge \neg q$ (8¹)

Закон двойного отрицания: $\neg \neg p \equiv p$ (9)

Вопросы

1. Перечислите 8 этапов подготовки и решения задач на ЭВМ
2. Чему следует уделять первостепенное внимание при постановке задачи
3. Что такое математическая формулировка (формализация) задачи
4. Что необходимо учитывать при выборе (разработке) метода решения
5. Дайте определение алгоритма
6. Способы описания алгоритмов

**Благодарю
за внимание !!!**