ЛЕКЦИЯ 18
ПАРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ.
НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ВИДА $Y=AX^{B}$

Некоторые процессы описываются нелинейными уравнениями различного вида . Например-зависимость силы давления воздуха на движении автомобиля от скорости и т. д. Для определения коэффициентов регрессии уравнение необходимо линеаризовать.

Пример: Определить коэффициенты регрессии уравнения разгона автомобиля (зависимость скорости от времени) по экспериментальным данным, приведенным в таблице 1. В таблице обозначено : X – время; Y_i - скорость. В каждой точке эксперимента проводилось по 3 опыта. На рисунке приведен график зависимости скорости от времени, построенный по средним значениям в каждой точке эксперимента.

Таблица 1.

Результаты эксперимента

№	X	Y_1	Y_2	Y_3
1	1	2,4	2,1	1,5
2	1,5	8	8,1	8,8
3	2	22	23	23,4
4	2,5	49	53	48

Экспериментальные данные и график показывают, что это уравнение нелинейное и имеет вид (***$Y=AX^B$***), причем показатель степени больше 3, но меньше 4.

Произведем линеаризацию уравнения и замену переменных: ***$\lg Y = \lg A + B\lg X$ ==>***

==> $X_1 = \lg X$ $Z = \lg Y$ $a_0 = \lg A$ $a_1 = B$

В результате получим линейное уравнение: ***$Z = a_0 + a_1 X_1$*** .Все расчеты производим в табличной форме (табл.2).

Таблица 2.

Результаты эксперимента и расчет коэффициентов регрессии

№	X	Y_1	Y_2	Y_3	$Y_{ср}$	X_1	Z	$X_1 Z$	$X_1^{\ 2}$	$Y_{расч}$	D_Y	D_A
1	1	2,4	2,1	1,5	2	0	0,3	0	0	2	0,21	0
2	1,5	8	8,1	8,8	8,3	0,177	0,92	0,163	0,031	8,3	0,19	0
3	2	22	23	23,4	22,8	0,3	1,357	0,406	0,09	23	0,52	0,12
4	2,5	49	53	48	50	0,4	1,70	0,68	0,16	50,2	7,0	0,12
∑						0,877	4,28	1,25	0,281		7,92	0,24

Система уравнений для определения неизвестных коэффициентов имеет вид:

$4{,}28 = 4\,a_0 + 0{,}87a_1$
$1{,}25 = 0{,}877\,a_0 + 0{,}281a_1$
В результате решения этой системы уравнений получаем: $a_0 = 0{,}3 \quad a_1 = 3{,}51 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \quad a_0 = \lg A \quad A=2 \quad a_1 = B = 3{,}51$
Уравнение регрессии имеет вид:

$$Y=2X^{3,51} \qquad (1)$$

По уравнению 1 определяем расчетные значения целевой функции - $Y_{расч}$, а затем определяем дисперсию адекватности по формуле (дисперсия приведена в последнем столбце таблицы 2):

где k - число экспериментов в каждой точке (в нашем примере k =3);
n - число точек эксперимента (в нашем примере n =4).
Дисперсия эксперимента находится из уравнения:
Определяется критерий Фишера и сравнивается с табличным значением.
При $\varphi_1 = n-2 = 4-2 = 2$ и $\varphi_2 = N - n = 12 - 4 = 8$ критическое значение критерия Фишера с надежностью 95% равно 19,2 ($F_{кр}$ 19,37), что меньше расчетного $F \approx 8$ Следовательно математическая модель (1) адекватно описывает данный процесс.

Корреляционное отношение уравнения 1 находится из формулы:

$$\eta = [(D_Y - D_A)/D_Y]^{0,5} = [(7{,}92 - 0{,}24)/7{,}92]^{0,5} = 0{,}98$$

Вывод: Связь между Y и X существенная.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ ВИДА *Y=Aexp (BX)*

Процесс разрушения горной породы ударом описывается нелинейными уравнениями различного вида . Например- зависимость суммарной энергии, необходимой для разрушения негабарита от энергии единичного удара. Для определения коэффициентов регрессии это уравнение необходимо линеаризовать.

Пример: Определить коэффициенты регрессии зависимости суммарной энергии, необходимой для разрушения негабарита от энергии единичного удара. по экспериментальным данным, приведенным в таблице 1. В таблице обозначено : X – энергия единичного удара; Y_i - суммарная энергия разрушения куска горной породы. В каждой точке эксперимента проводилось по 3 опыта. На рисунке приведен график зависимости суммарной энергии, необходимой для разрушения негабарита от энергии единичного удара, построенный по средним значениям в каждой точке эксперимента.

Таблиц

а 1.

Результаты эксперимента

№	X	Y_1	Y_2	Y_3
1	4	48	41	17,8
2	6	6	15	6,3
3	7	6	5	5,1
4	9	2,55	0,8	0,7
5	12	0,18	0,21	0,24

Экспериментальные данные и график показывают, что это уравнение нелинейное и имеет вид (***Y=Aexp(BX)***.

Произведем линеаризацию уравнения (логарифмируем уравнение) и замену переменных:

$\ln Y = \ln A + BX \implies X_1 = X \quad Z = \ln Y \quad a_0 = \ln A \quad a_1 = B$

В результате получим линейное уравнение: $Z = a_0 + a_1 X_1$.Все расчеты производим в табличной форме (табл.2).

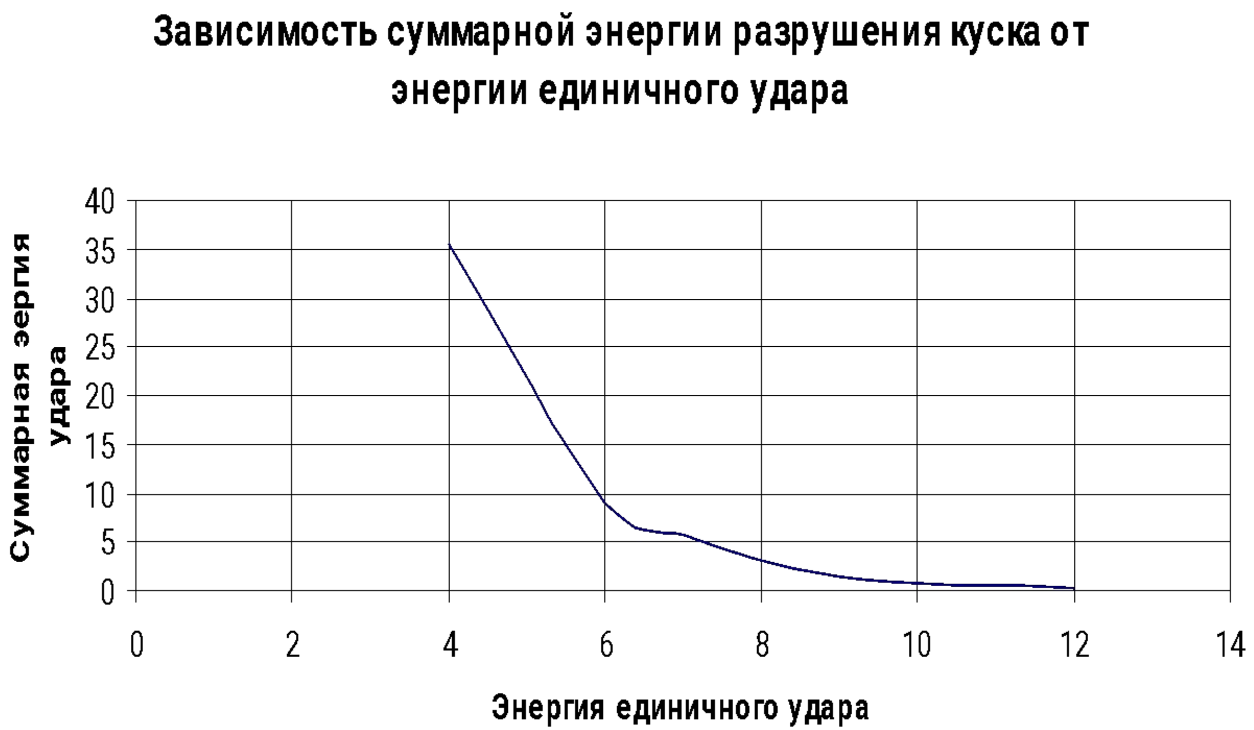

Таблица 2.
Результаты эксперимента и расчет коэффициентов регрессии

№	X	Y_1	Y_2	Y_3	$Y_{ср}$	X_1	Z	$X_1 Z$	X_1^2	$Y_{расч}$	D_Y	D_A
1	4	48	41	17,8	35,6	4	3,51	14,04	16	43,2	237	174
2	6	6	15	6,3	9,1	6	2,17	13,02	36	10,1	27	3
3	7	6	5	5,1	5,7	7	1,71	11,97	49	5,4	0,5	0,2
4	9	2,55	0,8	0,7	1,35	9	0,3	2,7	81	1,22	1,1	0
5	12	0,18	0,21	0,24	0,21	12	-1,55	-18,6	144	0,16	≈ 0	0
∑					51,91	38	6,14	20,43	326		262	177

Система уравнений для определения неизвестных коэффициентов имеет вид:

$6{,}14 = 5\, a_0 + 38 a_1$
$20{,}43 = 38\, a_0 + 326 a_1$
В результате решения этой системы уравнений получаем: $a_0 = 6{,}5$ $a_1 = -0{,}695$ == >
== > $a_0 = \lg A$ $A = 750$ $a_1 = B = -0{,}695$
Уравнение регрессии имеет вид:

$$Y=750\exp(-0{,}695X) \qquad (1)$$

По уравнению 1 определяем расчетные значения целевой функции - $\mathbf{Y_{расч}}$, а затем определяем дисперсию адекватности и эксперимента:

$$S_A^2 = \sum_{1}^{6} \cdot 3(\overline{y}_i - \hat{y})^2 = 262 \qquad S_y^2 = \sum_{1}^{6} \sum_{1}^{3} \frac{(y_i - \overline{y}_i)^2}{3-1} = 177$$

где k - число экспериментов в каждой точке (в нашем примере k =3);

n - число точек эксперимента (в нашем примере n =5).

Определяется критерий Фишера и сравнивается с табличным значением.

$$F = \frac{S_A^2/\varphi_2}{S_y^2/\varphi_1} = \frac{262/10}{177/3} = 0.4$$

При φ_1 = n-2 = 5-2 = 3 и φ_2 =N –n = 15 -5 = 10 критическое значение критерия Фишера с надежностью 95% равно 8,78 ($F_{кр}$ = 8,78), что меньше расчетного F ≈ 0,4 Следовательно математическая модель (1) адекватно описывает данный процесс.

Корреляционное отношение уравнения 1 находится из формулы:

$$\boldsymbol{\eta = [(D_Y - D_A)/D_Y]^{0,5} = [(262 - 177)/262]^{0,5} = 0,57}$$