ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

ЛЕКЦИЯ 2

3. ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ.

3. ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

3.1. Обобщенные координаты.

3.2. Координатное пространство.

3.3. Обобщенные скорости и ускорения.

3.4. Псевдокоординаты.

3. ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

3.1. Обобщенные координаты.

Рассмотрим несвободную систему с r голономными и s неголономными связями. Будем предполагать, что указанные связи независимы, т.е., что ни одна из них не является линейной комбинацией остальных.

Определение 1. *Наименьшее число параметров* (m) *необходимое для задания возможного положения системы, называется числом независимых обобщенных координат системы.*

Очевидно, что

$$m = 3N - r \geq n = 3N - r - s.$$

Таким образом, число независимых обобщенных координат не превосходит числа степеней свободы системы.

Пусть набор параметров $q_1, q_2, \ldots, q_m \in Q \subset R^m$ обладает следующим свойством.

1) В любой момент времени t и для всех $q_1, q_2, \ldots, q_m \in Q$ справедливо равенство

$$r_\nu^* = r_\nu\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_m\right), \nu = 1, \ldots, N \qquad (1)$$

где $r_\nu^*, \nu = 1, \ldots, N$ - допустимое положение системы в момент времени $t.$

2) Зависимость (1) дважды непрерывно дифференцируемая.

3) Справедливо равенство

$$rang \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_m} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial q_m} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_m} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial q_m} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_N}{\partial q_m} \end{pmatrix} = m. \qquad (2)$$

Определение 2. *Набор параметров, удовлетворяющий свойствам 1)-3) называется*

обобщенными координатами системы.

В общем случае от выполнения равенства (2) для всех допустимых положений системы можно отказаться. Достаточно ввести локальные обобщенные координаты. Это означает, что для различных совокупностей возможных положений системы вводятся различные системы обобщенных координат. При этом для каждой локальной области условие 3) выполняется.

Заметим. что если система склерономна. То обобщенные координаты можно выбрать так, чтобы в зависимости (1) не присутствовало время.

3.2. Координатное пространство.

Множество $Q \subset R^m$ называют координатным пространством параметров $q_1, \ldots, q_m$. Каждому возможному положению системы соответствует изображающая точка в координатном пространстве. В силу непрерывной зависимости (1.1) из близости возможных положений системы следует близость их изображающих точек.

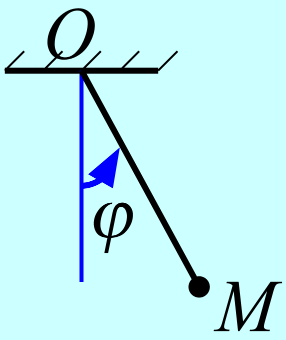
Пример 1. ***Точка на плоскости.*** *Координатное пространство сама плоскость*

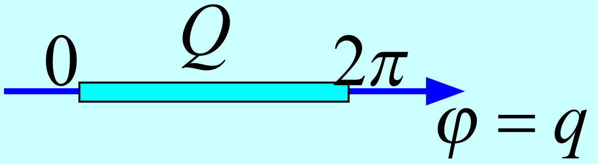
$$\left(q_1, q_2\right) \in Q = R^2 .$$

Пример 2. ***Система из*** N ***свободных точек.*** *Координатное пространство* $3N$ – *мерное пространство*

$$\left(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}\right) \in Q = R^{3N} .$$

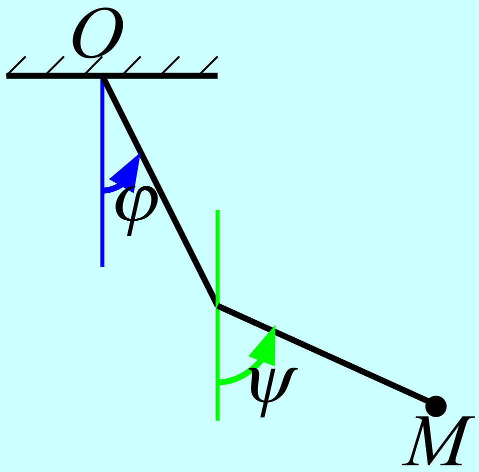
Пример 3. ***Математический маятник.***

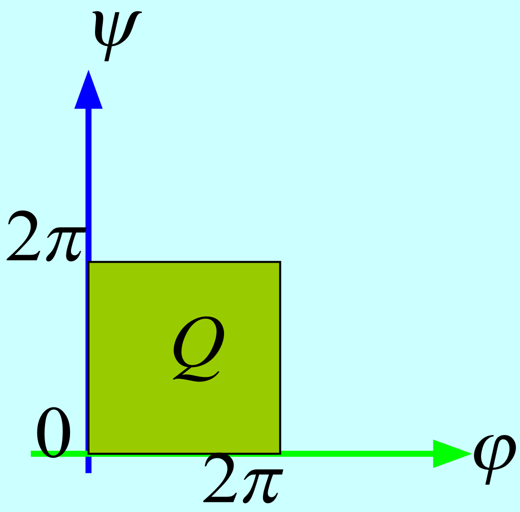




Координатное пространство $\varphi \in Q = \left[0, 2\pi\right] \subset R^1 .$

Пример 2. ***Двойной математический маятник.***





Координатное пространство

$$(\varphi,\psi)\in Q=[0,\,2\pi]\times[0,\,2\pi]\subset R^2.$$

3.3. Обобщенные скорости и ускорения.

В процессе движения системы ее обобщенные координаты меняются во времени.

Определение 3. *Величины* $\dot{q}_i, \ddot{q}_i, \ i = 1,2,\dots,m$ *называются обобщенными скоростями и обобщенными ускорениями соответственно.*

Выразим скорости и ускорения точек системы через обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные ускорения. Последовательно вычисляем.

$$\overline{r}_\nu = \overline{r}_\nu\left(t, q_1, \dots, q_n\right), \nu = 1, \dots, N, \qquad (3)$$

$$\overline{v}_\nu = \dot{\overline{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overline{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \overline{r}_\nu}{\partial t}, \nu = 1, \dots, N, \qquad (4)$$

$$\bar{w}_\nu = \ddot{\bar{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial q_j \partial t}\right)\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial t \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j}\ddot{q}_j + \sum_{k,j=1}^{m}\frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j + 2\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial t \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial t^2}, \nu = 1, \ldots, N. \qquad (5)$$

Связи, наложенные на систему, также могут быть записаны в терминах обобщенных координат и их скоростей.

Голономные связи. Из (3) находим

$$f_\alpha\left(t,\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_N\right)=0 \Rightarrow$$

$$f_\alpha\left(t,\overline{r}_1\left(t,q_1,\ldots,q_n\right),\ldots,\overline{r}_N\left(t,q_1,\ldots,q_n\right)\right)=0 \Rightarrow$$

$$g_\alpha\left(t,q_1,\ldots,q_n\right),\ \alpha=1,\ldots,r.$$

Неголономные связи. Из (3) и (4) находим

$$\sum_{\nu=1}^{N}\overline{a}_{\beta\nu}\left(t,\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_N\right)\cdot\overline{v}_\nu+a_\beta\left(t,\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_N\right)=0\ldots \Rightarrow$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\overline{a}^*_{\beta\nu}\left(t,q_1,\ldots,q_n\right)\cdot\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\overline{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\overline{r}_\nu}{\partial t}\right]+a^*_\beta\left(t,q_1,\ldots,q_n\right)=0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{N}\overline{a}^{*}_{\beta\nu}\frac{\partial\overline{r}_{\nu}}{\partial q_{j}}\right)\cdot\dot{q}_{j}+\sum_{\nu=1}^{N}\overline{a}^{*}_{\beta\nu}\frac{\partial\overline{r}_{\nu}}{\partial t}+a^{*}_{\beta}=0\Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m}b_{j\beta}\left(t,q_{1},\ldots,q_{n}\right)\dot{q}_{j}+b_{\beta}\left(t,q_{1},\ldots,q_{n}\right)=0,$$

$$\beta=1,\ldots,s. \qquad (4)$$

Здесь обозначено

$$b_{j\beta}\left(t,q_{1},\ldots,q_{n}\right)=\sum_{\nu=1}^{N}\overline{a}^{*}_{\beta\nu}\frac{\partial\overline{r}_{\nu}}{\partial q_{j}},$$

$$b_{\beta}\left(t,q_{1},\ldots,q_{n}\right)=\sum_{\nu=1}^{N}\overline{a}^{*}_{\beta\nu}\frac{\partial\overline{r}_{\nu}}{\partial t}+a^{*}_{\beta},$$

$$j=1,\ldots,m,\ \beta=1,\ldots,s.$$

Для голономных систем обобщенные координаты и их скорости независимы, поэтому вариациями обобщенных координат $\delta q_i,\ i = 1, \ldots, m$ могут служить любые наборы чисел. В неголономной системе обобщенные координаты, как и в голономной, могут принимать любые значения, в то время как обобщенные скорости связаны соотношениями (4). Тогда вариации обобщенных координат должны быть связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{m} b_{j\beta}(t, q_1, \ldots, q_n) \cdot \delta q_j = 0, \quad \beta = 1, \ldots, s$$

Выразим виртуальные перемещения системы $\delta \overline{r}_\nu,\ \nu = 1, \ldots, N$ через вариации обобщенных координат. Из равенства (2) находим

$$\delta \overline{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \overline{r}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j,\ \nu = 1, \ldots, N.$$

3.4. Псевдокоординаты.

При исследовании неголономных систем бывает удобно перейти к псевдокоординатам. Пусть n - число степеней свободы, а - m число обобщенных координат. Полагаем

$$\dot{\pi}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \dot{q}_j, \; i = 1, \ldots, n. \qquad (5)$$

Здесь $c_{ij} = c_{ij}\left(t, q_1, \ldots, q_m\right), \; i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m$ - некоторые заданные функции обобщенных координат. Величины $\dot{\pi}_i, \; i = 1, \ldots, n$ представляют собой линейные комбинации обобщенных скоростей, но эти комбинации не обязаны быть полными дифференциалами, поэтому сами $\pi_i, \; i = 1, \ldots, n$ могут не иметь ни физического ни геометрического смысла и являться лишь символами.

Определение 4. *Величины* $\pi_i, i = 1, \ldots, n,$ *рассматриваемые как функции времени и обобщенных координат и удовлетворяющие условию (1), будем называть псевдокоординатами, а их производные* $\dot{\pi}_i, \ddot{\pi}_i, i = 1, \ldots, n$ *- псевдоскоростями и псевдоускорениями системы.*

Выразим виртуальное перемещение системы через вариации псевдокоординат. Для этого рассмотрим линейную относительно обобщенных скоростей алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\dot{q}_j + b_\beta = 0, \beta = 1, \ldots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\dot{q}_j = \dot{\pi}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Матрица этой системы имеет размер $(s+n)\times m = m\times m.$ Выбором коэффициентов $c_{ij},\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$ добьемся, чтобы ее определитель был отличен от нуля. Тогда система может быть разрешена относительно обобщенных скоростей

$$\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\dot{\pi}_i + g_i,\ j=1,\ldots,m.$$

По построению величины $\delta\pi_i,\ i=1,\ldots,n$ независимы. Тогда

$$\delta q_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\,\delta\pi_i,\ j=1,\ldots,m,$$

$$\delta \bar{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \, \delta \pi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j} d_{ij} \right) \delta \pi_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{e}_{\nu i} \, \delta \pi_i , \nu = 1, \ldots, N, \qquad (6)$$

где обозначено

$$\bar{e}_{\nu i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_j} d_{ij}, \nu = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, n$$

Равенству (6) можно придать другую форму. Имеем

$$\dot q_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\dot\pi_i + g_i \Rightarrow \ddot q_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}\ddot\pi_i + \varphi_j,\; j = 1,\dots,m,$$

здесь функции $\varphi_j,\; j = 1,\dots,m$ не зависят от $\ddot\pi_i,\, i = 1,2,\dots,N.$

Из равенства (5) находим

$$\bar w_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_j}\ddot q_j + \sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_k \dot q_j + 2\cdot\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t \partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{ij}\ddot\pi_i + \varphi_j\right) + \sum_{k,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_k \dot q_j + 2\cdot\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t \partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial^2 \bar r_\nu}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar r_\nu}{\partial q_j} d_{ij}\right)\ddot\pi_i + \psi_\nu, \quad \nu = 1,2,\dots,N,$$

где функции $\psi_\nu, \nu = 1, 2, \dots, N$ не зависят от $\dot{\pi}_i, i = 1, 2, \dots, n.$

Из последнего равенства находим, что

$$\frac{\partial \overline{w}_\nu}{\partial \dot{\pi}_i} = \overline{e}_{\nu i}, \nu = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, равенство (6) принимает вид

$$\delta \overline{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{w}_\nu}{\partial \dot{\pi}_i} \delta \pi_i, \nu = 1, \dots, N$$