# КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

**ЛЕКЦИЯ 3**

**3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ**

# 3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии.

3.2. Определение ускорения точки при векторном задании движения

3.3. Разложение вектора ускорения точки на нормальную и касательную составляющие.

3.4. Ускорение точки при естественном способе задания движения.

3.5. Определение ускорения при координатном способе задания движения.

Случай прямоугольных декартовых координат.

# 3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Мерой, характеризующей изменение скорости точки в данное мгновение, является ее ускорение. Размерность ускорения $\left[w\right]=\dfrac{\left[L\right]}{\left[T^2\right]}$. В системе СИ это $\dfrac{м}{сек^2}$.

**3.1. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии.**

Пусть $M, M_1, M_2$ три точки некоторой пространственной кривой (траектории). Через эти точки можно провести плоскость, причем единственным образом.

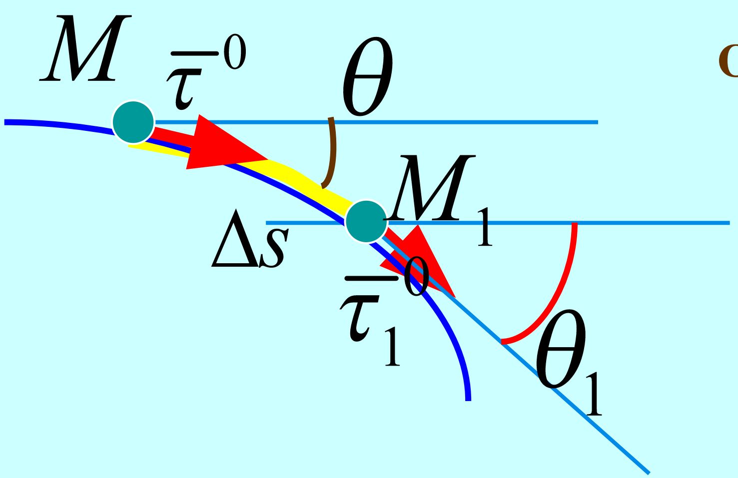
**Определение 1.** *Предельное положение плоскости* $\pi$ *при условии, что* $M_2 \to M_1 \to M$, *называется соприкасающейся плоскостью к кривой* (траектории) *в точке* $M$.

Заметим, что если кривая плоская, то соприкасающаяся плоскость к ней в любой ее точке совпадает с плоскостью кривой (траектории).

Для пространственной кривой в каждой ее точке можно построить целую плоскость нормалей (совокупность линий, ортогональных касательной)

**Определение 2.** *Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью, а нормаль перпендикулярная соприкасающейся плоскости – бинормалью. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью, а нормаль перпендикулярная соприкасающейся плоскости – бинормалью.*

Пусть $M, M_1$ две точки на кривой (траектории) $\Delta s$ - длина дуги между точками $M, M_1, \bar{\tau}^0, \bar{\tau}_1^0 -$ единичные векторы касательной в точках $M$ и $M_1$ соответственно, $\Delta\theta = \theta_1 - \theta$ - угол между векторами $\bar{\tau}^0, \bar{\tau}_1^0$ (в радианах).

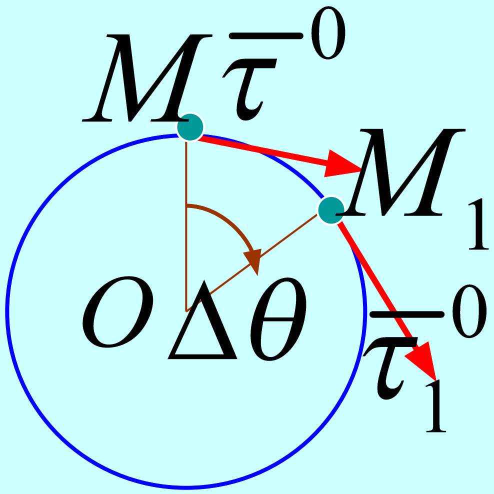



**Определение 3.** *Величина* $k_{cp} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ *Называется средней кривизной кривой на дуге* $MM_1$. *Величина*

$$k = \lim_{M_1 \to M} k_{cp} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

*называется кривизной кривой, а величина* $\rho = \dfrac{1}{k}$ *радиусом кривизны кривой в точке* $M$.

**Пример 1.** *Пусть кривая – окружность. Тогда* $\Delta s = R\Delta\theta,$ *где* $R$ *- радиус окружности, и*




$$k_{cp} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{R\Delta\vartheta} = \frac{1}{R} = const \Rightarrow$$

$$\rho = R.$$

**Пример 2.** *Пусть кривая – прямая. Тогда*

$$\Delta\theta = 0 \Rightarrow k_{cp} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = 0 \Rightarrow \rho = \lim_{M_1 \to M} k_{cp} = \infty.$$

*Радиус кривизны прямой в любой ее точке равен бесконечности.*

Дадим геометрическую интерпретацию понятия радиуса кривизны кривой в точке. Пусть $M, M_1, M_2$ - три точки на кривой. Проведем через них окружность и устремим точки $M_1, M_2$ к $M$. В предельном положении окружность будет принадлежать соприкасающейся плоскости, а ее радиус - равен радиусу кривизны кривой в точке $M$.

Центр предельной окружности называют центром кривизны кривой в точке $M$.

Заметим, что если кривая окружность, то ее центр кривизны совпадает с центром окружности. В случае, когда кривая прямая линия, ее центр кривизны уходит на бесконечность, соответственно ее радиус кривизны равен бесконечности.

## 3.2. Определение ускорения точки при векторном задании движения

Пусть задан закон изменения радиус-вектора точки $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

Рассмотрим два близких момента времени $t$ и $t_1$. Обозначим

$$\Delta\overline{v} = \overline{v}(t_1) - \overline{v}(t), \ \ \Delta t = t_1 - t.$$

**Определение 4.** *Величина*

$$\overline{w}_{cp} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}$$

*называется средним ускорением точки на промежутке времени* $\Delta t$.

**Определение 5.** *Величина*

$$\overline{w}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{w}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}$$

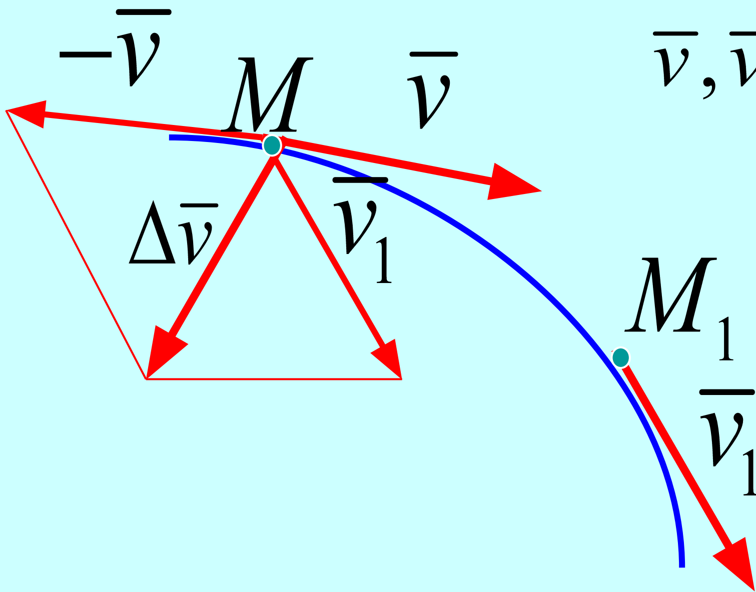
*называется ускорением точки в момент времени* $t$. Из определения ускорения следует, что

$$\overline{w}(t) = \frac{d\overline{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}(t).$$

корение точки является вектором. Естественно считать, что начало вектора ускорения

чки совпадает с самой точкой.

На рисунке изображена траектория точки и вектора ее скорости




$\bar{v}, \bar{v}_1$ в положениях $M$ и $M_1$, соответственно.

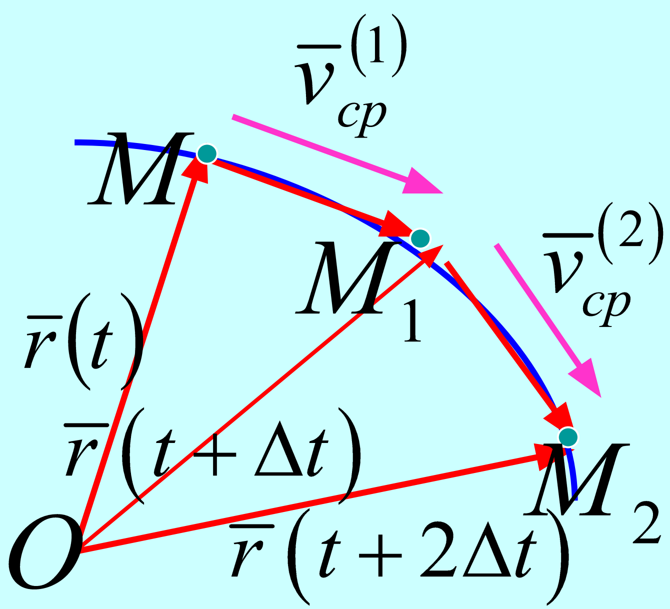
Вектор $\Delta\bar{v}$, параллельный вектору $\bar{w}_{cp}$, направлен в сторону вогнутости траектории.

Вектор ускорения $\bar{w}$ занимает предельное положение вектора $\bar{w}_{cp}$, когда $M \to M_1$ и, поэтому направлен в сторону вогнутости траектории.

Пусть $M, M_1, M_2$ - три положения точки на траектории в моменты времени $t, t_1, t_2$, соответственно, причем $t_2 - t_1 = t_1 - t = \Delta t.$ Полагаем

$$\Delta\bar{r}_1 = \bar{r}(t_1) - \bar{r}(t), \quad \Delta\bar{r}_2 = \bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_1), \quad \bar{v}_{cp}^{(1)} = \frac{\Delta\bar{r}_1}{\Delta t}, \quad \bar{v}_{cp}^{(2)} = \frac{\Delta\bar{r}_2}{\Delta t}$$

С точностью до малых высшего порядка малости, чем $\Delta t$ имеем




$$\overline{w}_{cp} = \frac{\overline{v}_{cp}^{(2)} - \overline{v}_{cp}^{(1)}}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta \overline{r}_2}{\Delta t} - \frac{\Delta \overline{r}_1}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\Delta \overline{r}_2 - \Delta \overline{r}_1}{(\Delta t)^2}.$$

Вектора $\Delta \overline{r}_2, \Delta \overline{r}_1,$ а следовательно и вектор $\overline{w}_{cp}$ лежат в плоскости проходящей через точки $M, M_1, M_2.$ Когда $\Delta t \to 0$ точки $M_1, M_2$ стремятся к точке $M$, вектор $\overline{w}_{cp}$ стремится к вектору $\overline{w}(t)$, а плоскость, проходящая через точки $M, M_1, M_2$, стремится к соприкасающейся в точке $M$ плоскости.

*Таким образом, вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.*

## 3.3. Разложение вектора ускорения точки на нормальную и касательную составляющие.

Пусть $\bar{\tau}^0$ единичный вектор касательной к траектории в точке $M$, направленный в сторону движения. Тогда

$$\bar{v} = v\bar{\tau}^0 \to \bar{w} = \frac{d\left(v\bar{\tau}^0\right)}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau}^0 + v\frac{d\left(\bar{\tau}^0\right)}{dt}$$

**Определение 6.** *Вектор* $\bar{w}^{\tau} = \dfrac{dv}{dt}\bar{\tau}^0$ *называется касательным ускорением точки.*

Из определения следует, что вектор касательного ускорения направлен параллельно касательной к траектории в сторону вектора скорости, если она растет по величине и в противоположную сторону, если скорость убывает.

При этом в первом случае $\dfrac{dv}{dt} > 0,$ и движение называют ускоренным,

а во втором - $\dfrac{dv}{dt} < 0$ и движение замедленное.

В случае, когда $\dfrac{dv}{dt} = 0,$ говорят что движение равномерное.

Заметим, что равномерное движение не обязано быть прямолинейным.

В случае равномерного движения

$$\overline{w}_\tau = 0 \Rightarrow v = v_0 = const \Rightarrow s(t) = v_0 t + s_0.$$

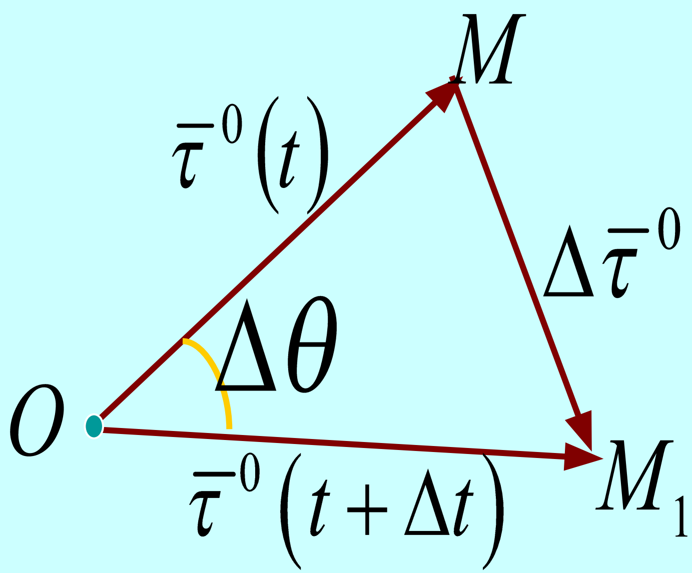
**Определение 7.** *Вектор* $\overline{w}^n = v\dfrac{d\overline{\tau}^0}{dt}$ *называется нормальным ускорением точки.*

В силу $\left|\overline{\tau}^0\right| = 1 = const$ справедливо условие $\overline{\tau}^0 \perp \dfrac{d\overline{\tau}^0}{dt}$. Отсюда следует, что вектор $\overline{W}_n$ лежит в нормальной к кривой плоскости. Из равенства

$$\overline{w} = \overline{w}^n + \overline{w}^\tau$$

и установленного факта принадлежности векторов $\overline{w}, \overline{w}^\tau$ соприкасающейся плоскости следует, что этой плоскости принадлежит и вектор $\overline{w}^n$.

Таким образом, вектор нормального ускорения направлен по главной нормали к траектории и, как это вытекает из предыдущих рассуждений, в сторону вогнутости траектории




Определим модуль нормального ускорения. Пусть

$\bar{\tau}^0(t+\Delta t), \bar{\tau}^0(t)$ - единичные вектора

касательной в моменты времени $t+\Delta t, t,$

соответственно, а $\Delta\theta$ - угол между ними.

Вычисляем

$$\left|\frac{d\bar{\tau}^0}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left|\Delta\bar{\tau}^0\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta t} == \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s\cdot\frac{\Delta\theta}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta t\cdot\Delta s\cdot\frac{\Delta\theta}{2}\cdot} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right)}{\frac{\Delta \theta}{2}} = vk = \frac{v}{\rho}.$$

Таким образом,

$$\left|\overline{w}^{n}\right| = v\left|\frac{d\overline{\tau}^{0}}{dt}\right| = \frac{v^{2}}{\rho}.$$

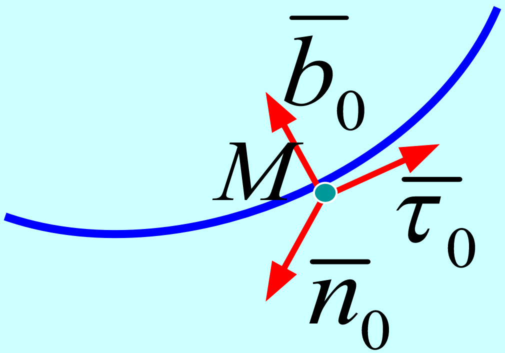
## 3.4. Ускорение точки при естественном способе задания движения.

С каждой точкой траектории можно связать систему координат, оси которой определяются следующими единичными векторами: $\overline{\tau}^{0}$ -единичный вектор касательной, направленный в сторону движения точки; $\overline{n}_{0}$ - единичный вектор главной нормали, направленный в сторону вогнутости траектории,

$\overline{b}_0$ - единичный вектор, замыкающий два предыдущих направления до правой тройки.

Последнее направление будем называть направлением бинормали. Очевидно, что

бинормаль ортогональна соприкасающейся плоскости.




**Определение 8.** *Репер, образованный векторами* $\overline{\tau}^0, \overline{n}^0, \overline{b}^0$ *называется естественным (или сопровождающим) трехгранником.*

Для любой точки траектории справедливо разложение

$$\overline{w} = \overline{w}^\tau + \overline{w}^n + \overline{w}^b = w_\tau \overline{\tau}^0 + w_n \overline{n}^0 + w_b \overline{b}^0, \qquad (1)$$

где

$$w_\tau = \frac{dv}{dt},\ w_n = \frac{v^2}{\rho},\ w_b = 0$$

суть проекции вектора ускорения на соответствующие направления.

В отличии от составляющей ускорения как вектора, в проекции вектора

на направление обозначающий индекс опущен вниз. При этом

$$w_n = w^n, \quad w_\tau = \begin{cases} w^\tau, & \text{движение ускоренное}, \\ -w^\tau, & \text{движение замедленное}. \end{cases}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

## 3.5. Определение ускорения при координатном способе задания движения. Случай прямоугольных декартовых координат.

Пусть в декартовых координатах задан кинематический закон движения точки на отрезке времени $\left[t_0, T\right]$ Тогда в любой момент времени $t \in \left[t_0, T\right]$ справедливо равенство

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \qquad (1)$$

Определим проекции вектора ускорения в этой же системе координат. С одной стороны имеем

$$\bar{w}(t) = w_x(t)\bar{i} + w_y(t)\bar{j} + w_z(t)\bar{k}, \qquad (2)$$

а с другой, дифференцируя равенство (1) по времени два раза получим

$$\bar{w}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\bar{k} = \ddot{x}(t)\bar{i} + \ddot{y}(t)\bar{j} + \ddot{z}(t)\bar{k}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) находим

$$w_x(t)=\ddot{x}(t),\ w_y(t)=\ddot{y}(t),\ w_z(t)=\ddot{z}(t),\quad t\in[t_0,T].$$

Модуль ускорения, и косинусы его направляющих углов определяются, соответственно, по формулам

$$w(t)=\sqrt{w_x^2(t)+w_y^2(t)+w_z^2(t)}=\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)+\ddot{z}^2(t)},\quad t\in[t_0,T],$$

$$\cos\alpha(t)=\frac{\ddot{x}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)+\ddot{z}^2(t)}},\quad \cos\beta(t)=\frac{\ddot{y}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)+\ddot{z}^2(t)}},$$

$$\cos\gamma(t)=\frac{\ddot{z}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)+\ddot{z}^2(t)}},\quad t\in[t_0,T].$$

Вычислим величину касательного ускорения. Имеем

$$w_\tau(t) = \overline{w} \cdot \overline{\tau}^0 = \overline{w} \cdot \frac{\overline{v}}{v} = \frac{\ddot{x}(t)\dot{x}(t) + \ddot{y}(t)\dot{y}(t) + \ddot{z}(t)\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}}.$$

Вычислим величину нормального ускорения

$$w_n(t) = w\cos\left(\overline{w}, \overline{n}^0\right) = w\sin\left(\overline{w}, \overline{\tau}^0\right) = \left|\overline{w} \times \overline{\tau}^0\right| = \frac{\left|\overline{w} \times \overline{v}\right|}{v} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\dot{z}(t)\dot{y}(t) - \ddot{y}(t)\dot{z}(t)\right)^2 + \left(\dot{x}(t)\dot{z}(t) - \dot{x}(t)\ddot{z}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)\right)^2}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}}.$$

Иногда требуется определить радиус кривизны траектории. Из формулы $w_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

находим

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} =$$

$$= \frac{\left(\dot x^2(t) + \dot y^2(t) + \dot z^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\dot z(t)\ddot y(t) - \ddot z(t)\dot y(t)\right)^2 + \left(\dot x(t)\ddot z(t) - \ddot x(t)\dot z(t)\right)^2 + \left(\dot y(t)\ddot x(t) - \ddot y(t)\dot x(t)\right)^2}}$$

В случае плоской траектории точки систему координат можно выбрать так,

что будет выполняться $z = 0 = const$ за все время движения.

Тогда выведенные формулы упрощаются и принимают вид

$$w_\tau = \frac{\ddot x(t)\dot x(t) + \ddot y(t)\dot y(t)}{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}}, \quad w_n = \frac{\left|\ddot y(t)\dot x(t) - \dot y(t)\ddot x(t)\right|}{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}},$$

$$\rho = \frac{\left(\dot x^2(t) + \dot y^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\ddot y(t)\dot x(t) - \dot y(t)\ddot x(t)\right|}.$$

Радиус кривизны, по его определению, есть величина положительная. Аналогично величина $w_n$ является модулем вектора нормального ускорения и тоже положительна, в то время как величина $w_\tau$ представляет собой проекцию вектора касательного ускорения на положительное направление касательной и, поэтому есть величина алгебраическая, т. е. ее знак может быть любым.