КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 4

3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ
(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

**3.6. Определение ускорения при координатном способе задания
движения. Случай криволинейных координат.**

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

**4.1. Прямолинейное движение
точки.**

**4.2. Плоское движение
точки.**

3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

3.6. Определение ускорения при координатном способе задания движения. Случай криволинейных координат.

Пусть задан кинематический закон движения точки в криволинейных координатах

$$q_i = q_i\left(t\right), i = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$\overline{w}\left(t\right) = \sum_{i=1}^{3} w_i \overline{q}_i^0 .$$

Вычислим проекции вектора ускорения на оси криволинейных координат

$$w_i = \overline{w} \cdot \overline{q}_i^0 = \frac{d\overline{v}}{dt} \cdot \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Заметим, что

$$\frac{d\bar{v}}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)-\bar{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right). \tag{2}$$

Подставим (1) в (2)

$$w_i=\frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)-\bar{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}\right)\right]. \tag{3}$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{q}_i},\ i=1,2,3, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)=\frac{\partial\bar{v}}{\partial q_i},\ i=1,2,3. \tag{5}$$

Доказательство. *Равенство (4) получается путем дифференцирования по* $\dot{q}_i$

левой и правой части соотношения

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{r}\left(q_1, q_2, q_3\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i .$$

Для доказательства равенства (5) последовательно вычисляем его левую и правую

части

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right) = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_s}\dot{q}_s ,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_s}\dot{q}_s\right) = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_i \partial q_s}\dot{q}_s .$$

Очевидно, что они совпадают. Лемма доказана.

Подставим равенства (4) и (5) в (3). В результате получим

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\,\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right) - \bar{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i}\right)\right] = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}\right],\ \ i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Полагаем

$$\vartheta = \frac{1}{2}\bar{v}\cdot\bar{v} = \frac{1}{2}v^2.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{q}_i} = \bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial q_i} = \bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i},\ \ i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Из (6) и (7) окончательно получаем

$$w_i = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \vartheta}{\partial q_i}\right],\ \ i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Пример 2. *Вычислить проекции вектора ускорения на оси цилиндрических координат.*

Решение

Справедливы равенства

$$H_\rho = 1,\ H_\varphi = \rho,\ H_z = 1,$$

$$v_\rho = \dot\rho,\ v_\varphi = \rho\dot\varphi, \quad v_z = \dot z \Rightarrow \vartheta = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right).$$

По формуле (8) находим

$$w_\rho = \frac{1}{H_\rho}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\rho}\right] = \frac{1}{2}\left[2\frac{d}{dt}\dot\rho - 2\rho\dot\varphi^2\right] = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right] = \frac{1}{2\rho}\left[2\frac{d}{dt}\rho^2\dot\varphi\right] = 2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi$$

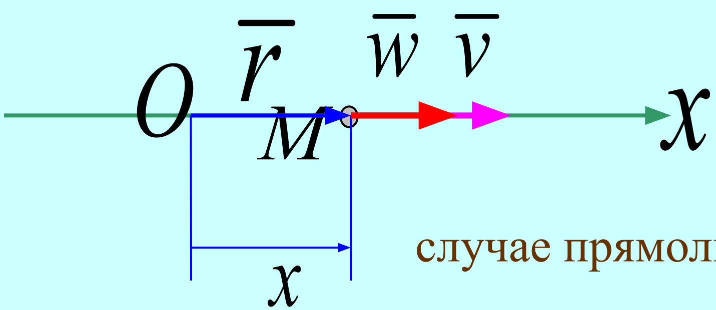
$$w_z = \frac{1}{H_z}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\vartheta}{\partial\dot z} - \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right] = \frac{1}{2}\left[2\frac{d}{dt}\dot z\right] = \ddot z.$$

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

4.1. Прямолинейное движение точки.

Дадим определение прямолинейного движения точки.

Определение 1. *Движение точки называется прямолинейным, если в выбранной системе отсчета траектория ее движения является прямой линией.*



Направим координатную ось Ox вдоль траектории движения. Закон движения в общем случае прямолинейного движения имеет вид

$$x = x(t),\, t \in [t_0, T].$$

При прямолинейном движении точки ее радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения в любой момент времени направлены вдоль траектории точки. Заметим, что вектор ускорения тогда имеет только касательную составляющую.

К этому выводу можно прийти и из анализа нормальной составляющей ускорения

$w_n = \frac{v^2}{\rho}$, поскольку для прямой линии справедливо равенство $\rho = \infty.$

Заметим, что

$$r_x = x, v_x = \dot{x}, w_x = \ddot{x}.$$

Проекции r_x, v_x, w_x - суть величины алгебраические, т.е. могут принимать любой знак. На рисунке изображен случай, когда они все положительны. Следует отличать эти величины от величин $r, v, w,$ являющимися длинами соответствующих векторов. В случае прямолинейного движения выполняются равенства

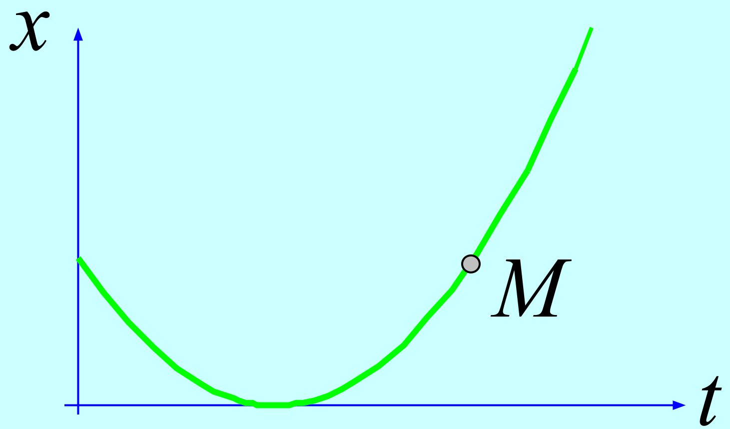
$$r = |x|, v = |\dot{x}|, w = |\ddot{x}|.$$

Закон движения $x = x(t)$ часто бывает удобно показывать в графически, т.е. в виде графика функции $x:[t_0, T] \to R^1.$

Пример 3. ***Равнопеременное движение.*** *Закон равнопеременного движения имеет вид*

$$x(t) = \tfrac{1}{2} w_x t^2 + v_{x0} t + x_0,$$

где $v_{x0} = v_x(0), \quad x_0 = x(0).$ *В зависимости от соотношения знаков величин* w_x, v_{x0} *движение будет ускоренное (знаки одинаковые) или замедленное (знаки противоположны). Графическое представление закона движения имеет вид*

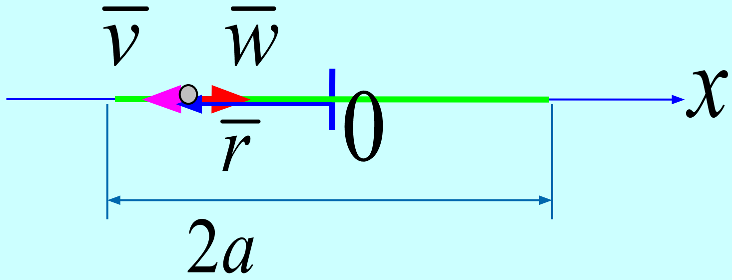


Пример 4. ***Гармонические колебания.*** *Закон гармонического колебания имеет вид*

$$x(t) = a \sin \omega t, \qquad (1)$$

где $a > 0$ *- амплитуда колебаний,* $\omega > 0$ *-круговая частота колебаний.*

Точка $x = 0$ на траектории точки называется центром колебаний.



Физический смысл амплитуды – наибольшее отклонение точки от центра колебаний.

Закон гармонического колебания является периодической функцией с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Величина $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ называется частотой колебаний. Пусть $a = \omega = 1.$

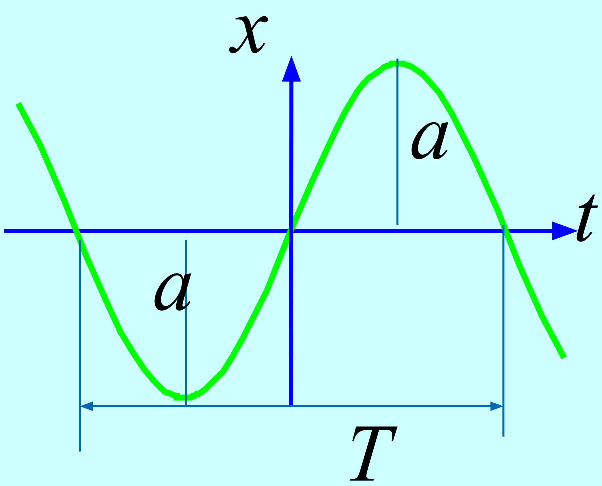
На рисунке изображены направления радиус-вектора точки, векторов скорости и ускорения точки в момент времени $t = \frac{5}{4}\pi.$ Действительно,

$$x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$v_x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_x\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Графическое представление закона движения точки имеет вид



Для гармонического колебания можно определить закон изменения проекции скорости v_x *и ускорения* w_x *в функции* x. *Действительно,*

$$v_x = \dot{x} = \omega \cos(\omega t) = \pm\omega\sqrt{1-\sin^2(\omega t)} = \pm\omega\sqrt{1-x^2},$$

$$w_x = \ddot{x} = -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x.$$

Таким образом, ускорение всегда направлено к центру колебаний.

В общем случае закон гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = a\sin(\omega t + \alpha)$$

где α *называется начальной фазой колебаний.*

В частности, при $\alpha = 0$ *получаем закон (1), а при* $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ *получим*

$$x(t) = a\cos\omega t.$$

4.2. Плоское движение точки.

Дадим определение плоского движения точки.

Определение 2. *Движение точки называется плоским, если в выбранной системе отсчета траектория ее движения является плоской.*

В случае плоской траектории систему координат можно выбрать так, что будет выполняться $z = 0 = const$ за все время движения. Тогда можно ограничиться только осями координат, лежащими в плоскости траектории точки. Закон плоского движения точки имеет вид

$$x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Главная нормаль плоской кривой всегда лежит в плоскости этой кривой, а бинормаль ей перпендикулярна. Центр кривизны для любой точки плоской кривой лежит в ее плоскости. В случае, когда траектория точки отлична от прямой, ее кривизна конечна и

величина нормального ускорения точки $w_n = \dfrac{v^2}{\rho} \neq 0,$ если $v \neq 0.$

Таким образом, любое непрямолинейное движение (не обязательно плоское) точки имеет ускорение. При плоском движении точки ее радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения в любой момент времени лежат в плоскости траектории. Приведем основные формулы кинематики точки для плоского движения

$$\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j},\ \overline{v}(t) = \dot{x}(t)\overline{i} + \dot{y}(t)\overline{j},\ \overline{w}(t) = \ddot{x}(t)\overline{i} + \ddot{y}(t)\overline{j}$$

Модуль скорости, ускорения, определяются по формулам

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)},\ w(t) = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)},\ t \in [t_0, T].$$

При этом косинусы их направляющих углов определяются так

$$\cos\angle\left(Ox,\bar{v}(t)\right)=\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},\quad \cos\angle\left(Oy,\bar{v}(t)\right)=\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},$$

$$\cos\angle\left(Ox,\bar{w}(t)\right)=\frac{\ddot{x}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)}},\quad \cos\angle\left(Oy,\bar{v}(t)\right)=\frac{\ddot{y}(t)}{\sqrt{\ddot{x}^2(t)+\ddot{y}^2(t)}}\ .$$

Вычислим величину касательного, нормального ускорения и радиус кривизны

$$w_\tau(t)=\frac{\ddot{x}(t)\dot{x}(t)+\ddot{y}(t)\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},\qquad w_n(t)=\frac{\left|\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)\right|}{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}},$$

$$\rho(t)=\frac{\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)\right|},\quad t\in\left[t_0,T\right].$$

Радиус кривизны, по его определению, есть величина положительная. Аналогично величина w_n совпадает с модулем вектора нормального ускорения $\overline{w}^n$ и тоже положительна, в то время как величина w_τ представляет собой проекцию вектора касательного ускорения на положительное направление касательной и, поэтому есть величина алгебраическая, т. е. ее знак может быть любым.

Для описания плоского движения в криволинейных координатах достаточно двух параметров. В частности параметры $\rho, \varphi,$ взятые из цилиндрических координат, называют полярными координатами точки.

Определение 3. *Проекции вектора скорости на оси полярных координат*

$$v_\rho = \dot{\rho}, v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$$

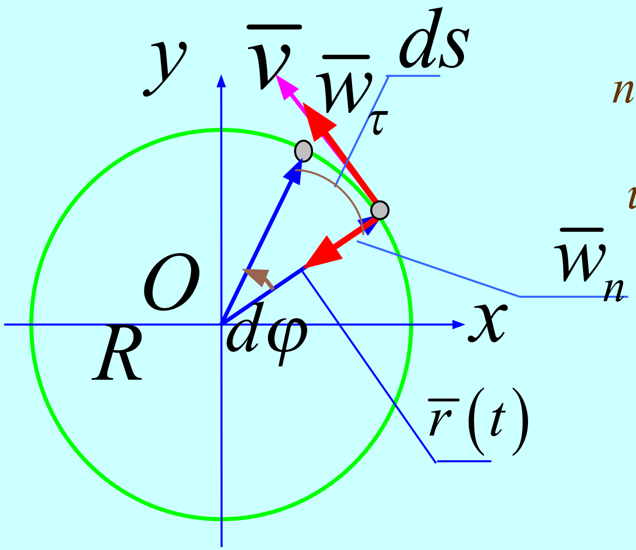
называются соответственно радиальной и трансверсальной проекциями вектора скорости.

Определение 4. *Проекции вектора ускорения на оси полярных координат*

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \; w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

называются соответственно радиальной и трансверсальной проекциями вектора ускорения .

Пример 4. *Пусть траекторией точки является окружность. Положительный отсчет угла* φ *принят так, как это показано на рисунке. Вычислим величину скорости, и нормального ускорений имеем*



$$v = \frac{ds}{dt} = R\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = R\left|\dot{\varphi}\right| = \left|v_\varphi\right|,$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R^2} = R\dot{\varphi}^2.$$

Величина касательного ускорения вычисляется по формуле

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\left|\varphi\right|\right) = \begin{cases} \left|\ddot{\varphi}\right|, & \text{движение ускоренное} \quad , \\ -\left|\ddot{\varphi}\right| & \text{движение замедленное} \quad . \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left|w_\tau\right| = \left|w_\varphi\right|.$$

Величины $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ *называются угловой скоростью и угловым ускорением вращения радиус- вектора точки в круговом движении. Единицами измерения этих величин в системе СИ, как отмечалось выше, будут* $\left[\frac{рад}{сек}\right]$, $\left[\frac{рад}{сек^2}\right]$, *соответственно.*

Опишем круговое движение точки в полярных координатах. В качестве полярной оси выберем ось Ox. *Тогда*

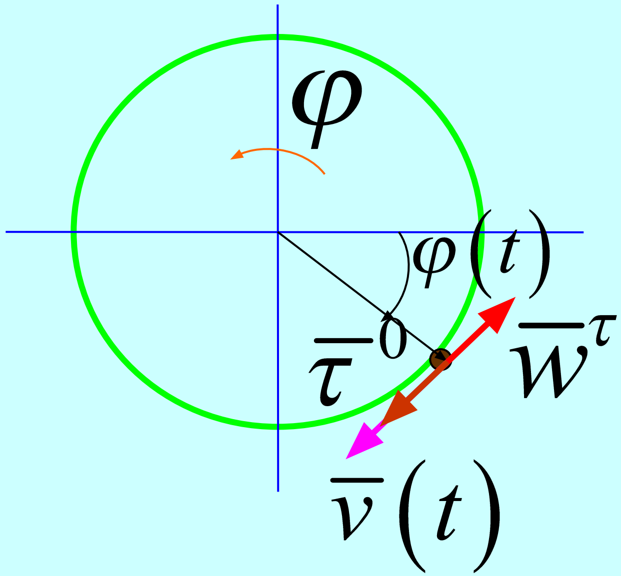
$$\rho = R = const,\ \varphi = \varphi,$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = 0,\ v_\varphi = r\dot{\varphi} = \begin{cases} v, & \text{движение в сторону увеличения полярного угла,} \\ -v, & \text{движение в сторону уменьшения полярного угла,} \end{cases}$$

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -R\dot{\varphi}^2 = -w_n,$$

$$w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} = R\ddot{\varphi} \Rightarrow w^\tau = \left|w_\varphi\right|.$$

Пример 5. *Траекторией точки является окружность радиуса* $R = 1.$ *Отсчет угла* φ *производится в направлении против хода часовой стрелки. Угол* φ *меняется по закону*



$$\varphi(t) = -\frac{t}{1+t},\ t \geq 0.$$

Определить $w_\tau(1),\ w_\varphi(1).$

Решение

.

Движение точки происходит в направлении хода часовой стрелки, поэтому вектор касательной направлен так, как это показано на чертеже. Вычисляем

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{t}{1+t}\right) = -\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow \dot{\varphi}(1) = -\frac{1}{4} < 0, \quad v(t) = 1 \cdot \left|\dot{\varphi}(t)\right| = \frac{1}{(1+t)^2},$$

$$w_\tau(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{(1+t)^2} = -\frac{2}{(1+t)^3} \Rightarrow w_\tau(1) = -\frac{1}{4} < 0.$$

Движение замедленное, вектор $\overline{w}^{\tau}$ *направлен против единичного вектора касательной. Тогда должно выполняться* $w_\varphi(1) < 0.$ *Действительно,*

$$w_\varphi(t) = 1\cdot\ddot{\varphi}(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \Rightarrow w_\varphi(1) = \frac{1}{4} > 0.$$

При этом конечно

$$\left|w_\tau(1)\right| = \left|w_\varphi(1)\right|.$$