

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Алгебра высказываний

Автор:

Сергеев

Евгений Викторович

МОУ СОШ №4 г. Миньяра

Челябинской области

sergeev73@mail.ru

<http://shk4-minyar.ucoz.ru>

Алгебра высказываний

Алгебра высказываний была разработана для того, чтобы определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание

Логические переменные

Логические переменные – простые высказывания, содержащие только одну мысль.

Обозначаются буквами латинского алфавита:
А, В, С...

Логические переменные могут принимать лишь два значения: «ИСТИНА» (1) или «ЛОЖЬ» (0)

Логические переменные

Например, два простых высказывания:

$A = \text{«}2 \times 2 = 4\text{»}$ истина (1)

$B = \text{«}2 \times 2 = 5\text{»}$ ложь (0)

являются логическими переменными A и B

В алгебре высказываний
высказывания обозначаются
именами **логических переменных**,
которые могут принимать лишь
два значения:
«**ИСТИНА**» (1) или «**ЛОЖЬ**» (0)

В алгебре высказываний над
логическими переменными (над
высказываниями) можно
производить определенные
логические операции, в
результате которых получаются
новые высказывания

Составные высказывания

Высказывания, состоящие из нескольких простых суждений и содержащие в себе более, чем одну простую мысль, называются ***логическими функциями***

Обозначаются $F(A, B, C, \dots)$

Также могут принимать значения «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ» в зависимости от того, какие значения имеют входящие в их состав логические переменные и от действий над ними

Логические операции

- Конъюнкция
(логическое умножение, «И»)
- Дизъюнкция
(логическое сложение, «ИЛИ»)
- Инверсия
(логическое отрицание, «НЕ»)
- Импликация
(логическое следование, «Если **A**, то **B**»)
- Эквивалентность
(логическое равенство, «**A** тогда и только тогда, когда **B**»)

Объединение двух или нескольких высказываний в одно с помощью союза «И» называется *операцией логического умножения*, или *конъюнкцией*

Логическая функция,
полученная в результате
конъюнкции, истинна тогда и
только тогда, когда истинны
все входящие в него
логические переменные

Конъюнкция. Определите истинность логической функции

- 1) « $2 \times 2 = 5$ » И « $3 \times 3 = 10$ »
- 2) « $2 \times 2 = 5$ » И « $3 \times 3 = 9$ »
- 3) « $2 \times 2 = 4$ » И « $3 \times 3 = 10$ »
- 4) « $2 \times 2 = 4$ » И « $3 \times 3 = 9$ »

Истинна только функция (4)

Запись конъюнкции на формальном языке алгебры высказываний

$$F(A,B) = A \& B$$

или

$$F(A,B) = A \wedge B$$

Также может встретиться запись, типа:

$$F(A,B) = A * B$$

или

$$F(A,B) = A \text{ and } B$$

**Значение логической
функции определяется
по ее таблице истинности**

**Таблица истинности
показывает какие значения
принимает логическая
функция при всех возможных
значениях логических
переменных**

Таблица истинности для конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
$2 \times 2 = 5$	$3 \times 3 = 10$	ЛОЖЬ
$2 \times 2 = 5$	$3 \times 3 = 9$	ЛОЖЬ
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 10$	ЛОЖЬ
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	ИСТИНА

Таблица истинности для конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Объединение двух или нескольких высказываний в одно с помощью союза «ИЛИ» называется *операцией логического сложения*, или *дизъюнкцией*

Логическая функция,
полученная в результате
дизъюнкции, истинна тогда,
когда истинна хотя бы одна
из входящих в него
логических переменных

Дизъюнкция. Определите истинность логической функции

- | | | | |
|----|----------------------------------|-----|-----------------------------------|
| 1) | $\langle 2 \times 2 = 5 \rangle$ | ИЛИ | $\langle 3 \times 3 = 10 \rangle$ |
| 2) | $\langle 2 \times 2 = 5 \rangle$ | ИЛИ | $\langle 3 \times 3 = 9 \rangle$ |
| 3) | $\langle 2 \times 2 = 4 \rangle$ | ИЛИ | $\langle 3 \times 3 = 10 \rangle$ |
| 4) | $\langle 2 \times 2 = 4 \rangle$ | ИЛИ | $\langle 3 \times 3 = 9 \rangle$ |

Ложна только функция (1),
остальные истинны

Запись дизъюнкции на формальном языке алгебры высказываний

$$F(A,B) = A \vee B$$

Также может встретиться запись, типа:

$$F(A,B) = A + B$$

или

$$F(A,B) = A \text{ or } B$$

Таблица истинности для дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
$2 \times 2 = 5$	$3 \times 3 = 10$	ЛОЖЬ
$2 \times 2 = 5$	$3 \times 3 = 9$	ИСТИНА
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 10$	ИСТИНА
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 3 = 9$	ИСТИНА

Таблица истинности для дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Присоединение частицы «НЕ»
к высказыванию называется
операцией логического
отрицания, или *инверсией*

**Логическое отрицание
(*инверсия*) делает истинное
высказывание ложным, а
ложное – истинным**

[логическая отрицательная
единица, перевертыш]

Инверсия

Пусть

$$A = \text{«}2 \times 2 = 4\text{»}$$

– истинное высказывание, тогда

$$F(A) = \text{«}2 \times 2 \neq 4\text{»}$$

– ложное высказывание

Запись инверсии на формальном языке алгебры высказываний

$$F(A) = \neg A$$

или

$$F(A) = \bar{A}$$

Также может встретиться запись, типа:

$$F(A) = \text{not } A$$

Таблица истинности для инверсии

A	$\neg A$
0	1
1	0

Таблицы истинности основных логических функций

Логическое сложение

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1

Логическое умножение

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1

Логическое отрицание

A	$\neg A$
0	1
1	0

Дополнительные логические функции

Импликацию и эквивалентность можно выразить через **конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание**, поэтому их называют дополнительными логическими функциями:

Импликация:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B \text{ или}$$

$$A \supset B = \neg A \vee B \text{ или}$$

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$$

Эквивалентность:

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \text{ или}$$

$$A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \text{ или}$$

$$A \equiv B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

Импликация

Объединение двух высказываний, из которых первое является условием, а второе – следствием из него, называется *импликацией* (логическим следованием)

Импликация

**Импликация ложна
тогда и только тогда, когда
условие истинно,
а следствие ложно**

Пример:

Если выучишь материал, то сдашь зачет

Это высказывание ложно только тогда, когда **материал выучен**, а **зачет не сдан**, т.к. сдать зачет можно и случайно, например если попался единственный знакомый вопрос или удалось воспользоваться шпаргалкой

Таблица истинности для импликации

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность

Эквивалентность – это логическая операция, объединяющая два простых высказывания в одно составное и которое является истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.

Таблица истинности для эквивалентности

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Основные
законы алгебры
высказываний

Переместительный

Дизъюнкция:

$$X \vee Y \equiv Y \vee X$$

Конъюнкция:

$$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$$

Сочетательный

Дизъюнкция:

$$X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z$$

Конъюнкция:

$$X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$$

Распределительный

Дизъюнкция:

$$X \wedge (Y \vee Z) \equiv X \wedge Y \vee X \wedge Z$$

Конъюнкция:

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

Правила де Моргана

Дизъюнкция:

$$\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$$

Конъюнкция:

$$\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$$

**Основные
законы алгебры
высказываний**

Идемпотенции

Дизъюнкция:

$$X \vee X \equiv X$$

Конъюнкция:

$$X \wedge X \equiv X$$

Основные законы алгебры высказываний

Поглощения

Дизъюнкция:

$$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$$

Конъюнкция:

$$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$$

Склеивания

Дизъюнкция:

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \equiv Y$$

Конъюнкция:

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y) \equiv Y$$

Переменная со своей инверсией

Дизъюнкция:

$$X \vee \neg X \equiv 1$$

Конъюнкция:

$$X \wedge \neg X \equiv 0$$

Операция с константами

Дизъюнкция:

$$X \vee 0 \equiv X, \quad X \vee 1 \equiv 1$$

Конъюнкция:

$$X \wedge 0 \equiv 0, \quad X \wedge 1 \equiv X$$

**Основные
законы алгебры
высказываний**

Двойного отрицания

$$\neg(\neg X) \equiv X$$

Порядок действий

1. Действия в скобках
2. Отрицание
3. Конъюнкция
4. Дизъюнкция
5. Импликация
6. Эквивалентность