

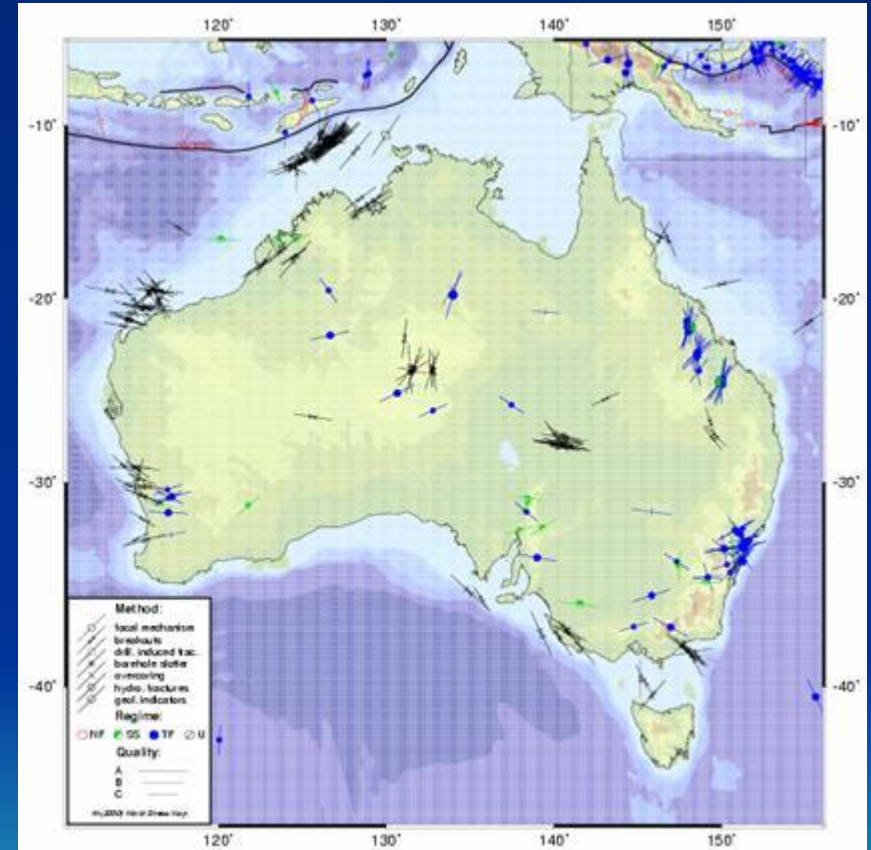
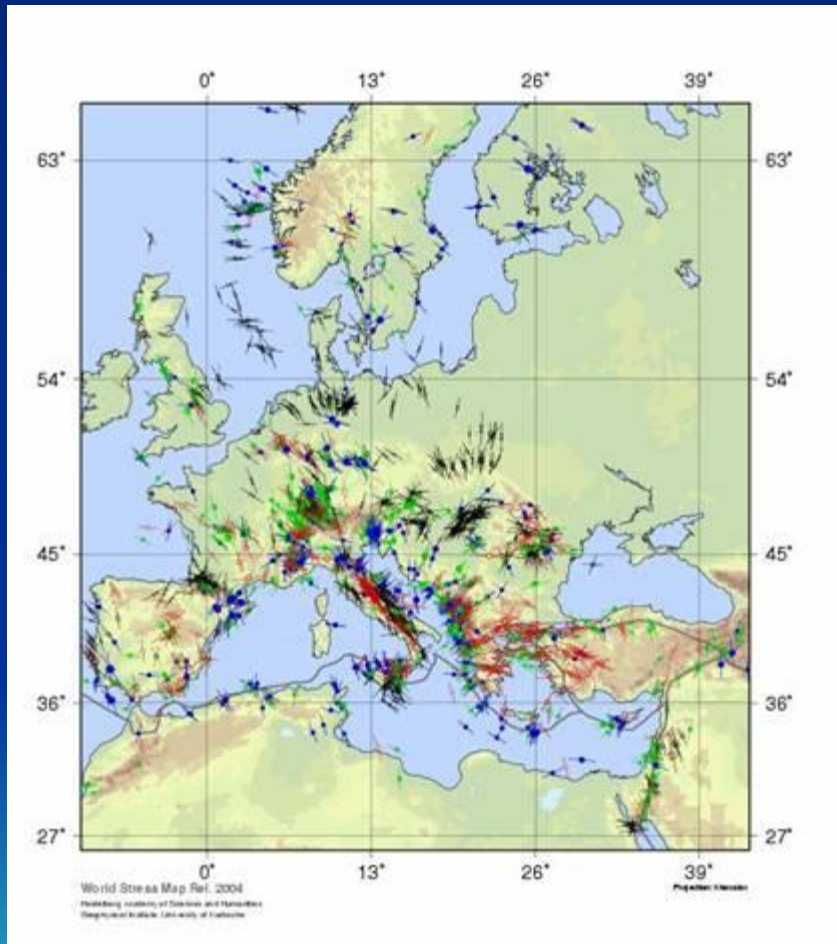
# Определение полей тектонических напряжений по данным об ориентации главных напряжений

Ш.А. Мухамедиев

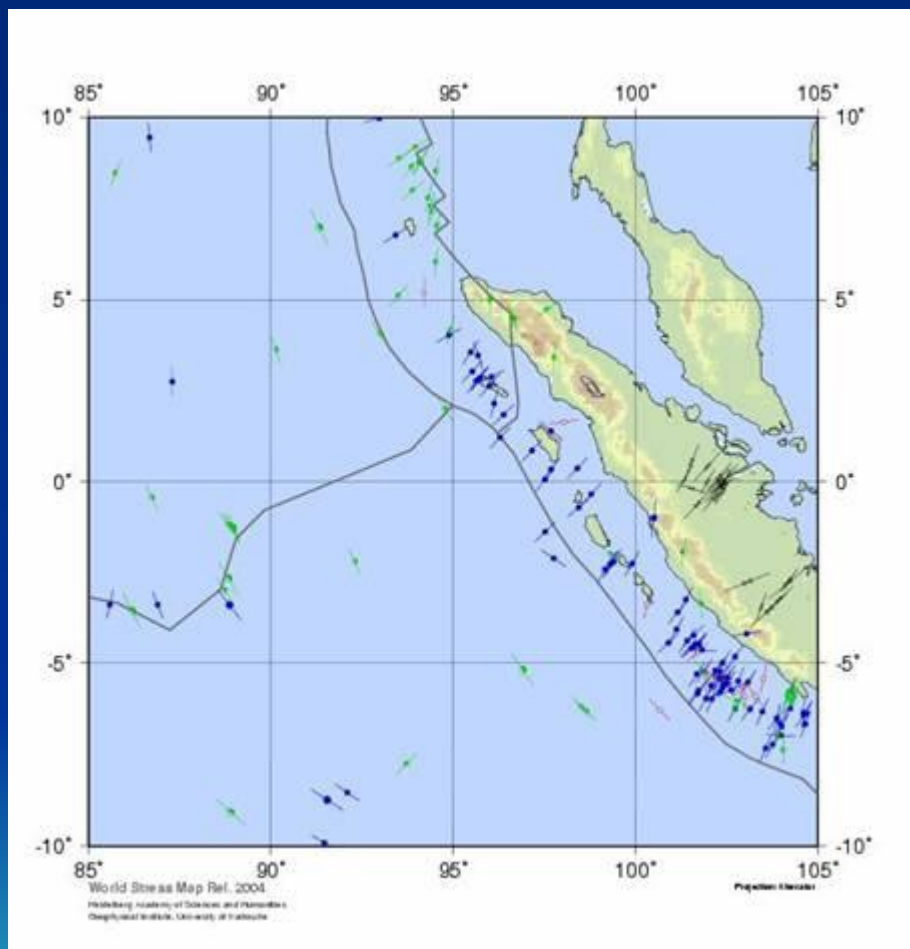
- Уравнения равновесия в форме Ламе-Максвелла; гиперболичность системы уравнений равновесия при заданных ТГН;
- Определение полей напряжений по заданным ТГН в литосфере произвольной реологии;
- Плоская задача теории упругости, формулы Колосова-Мусхелишвили;
- Определение голоморфной и биголоморфной функции по ее аргументу;
- Определение полей напряжений по заданным ТГН в упругой литосфере.



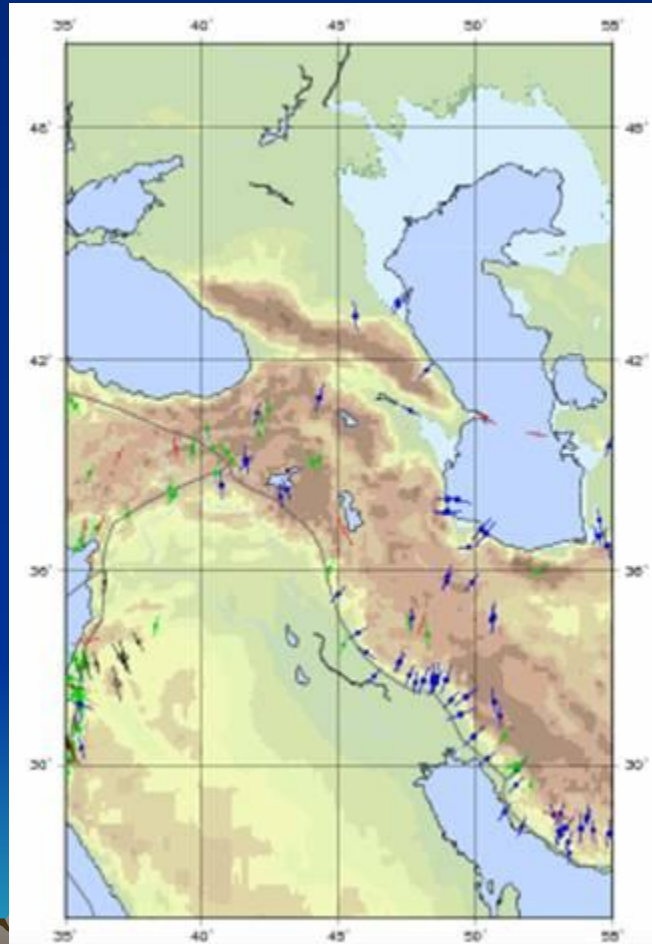
# Ориентация осей современного максимального горизонтального сжатия $S_{H,max}$ в Западной Европе и континентальной Австралии из мировой базы данных



# Ориентация осей современного максимального горизонтального сжатия $S_{H,max}$ в районе желоба Сунда у о. Суматра из мировой базы данных

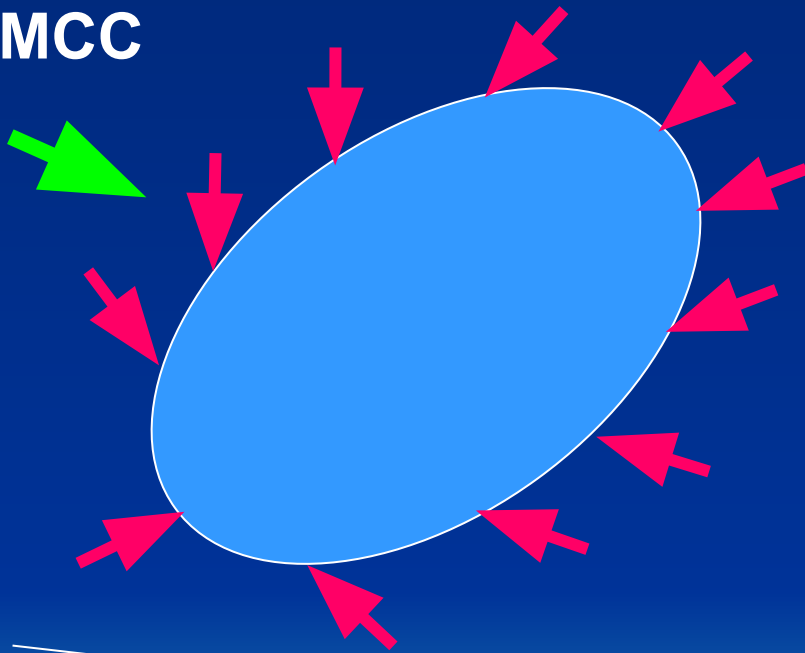


Ориентация осей современного максимального горизонтального сжатия  $S_{H,max}$  в районе конвергенции Аравийской и Евразийской плит из мировой базы данных



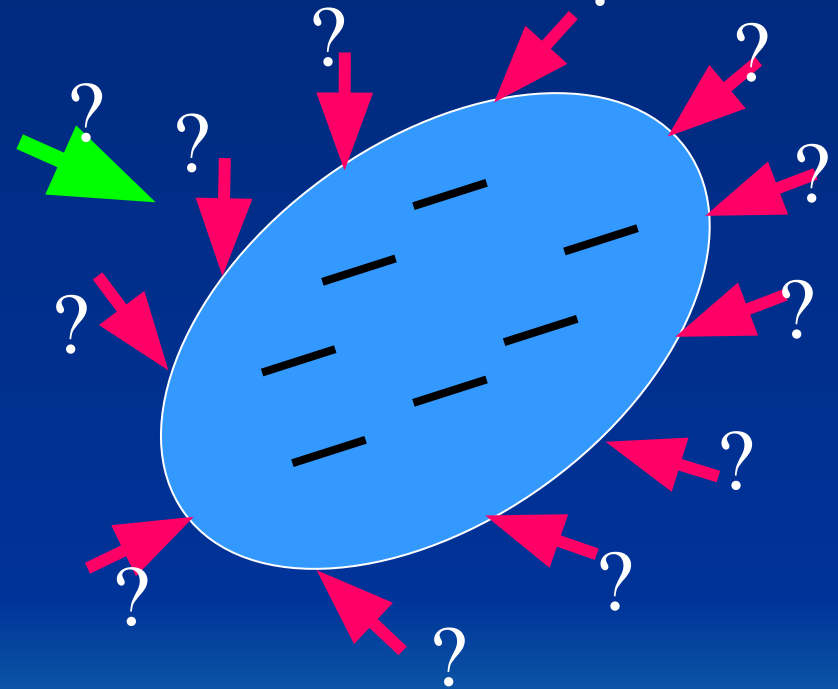
# Моделирование полей напряжений

ПОСТАНОВКА  
КЛАССИЧЕСКОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
МСС



Источник  
массовых  
сил

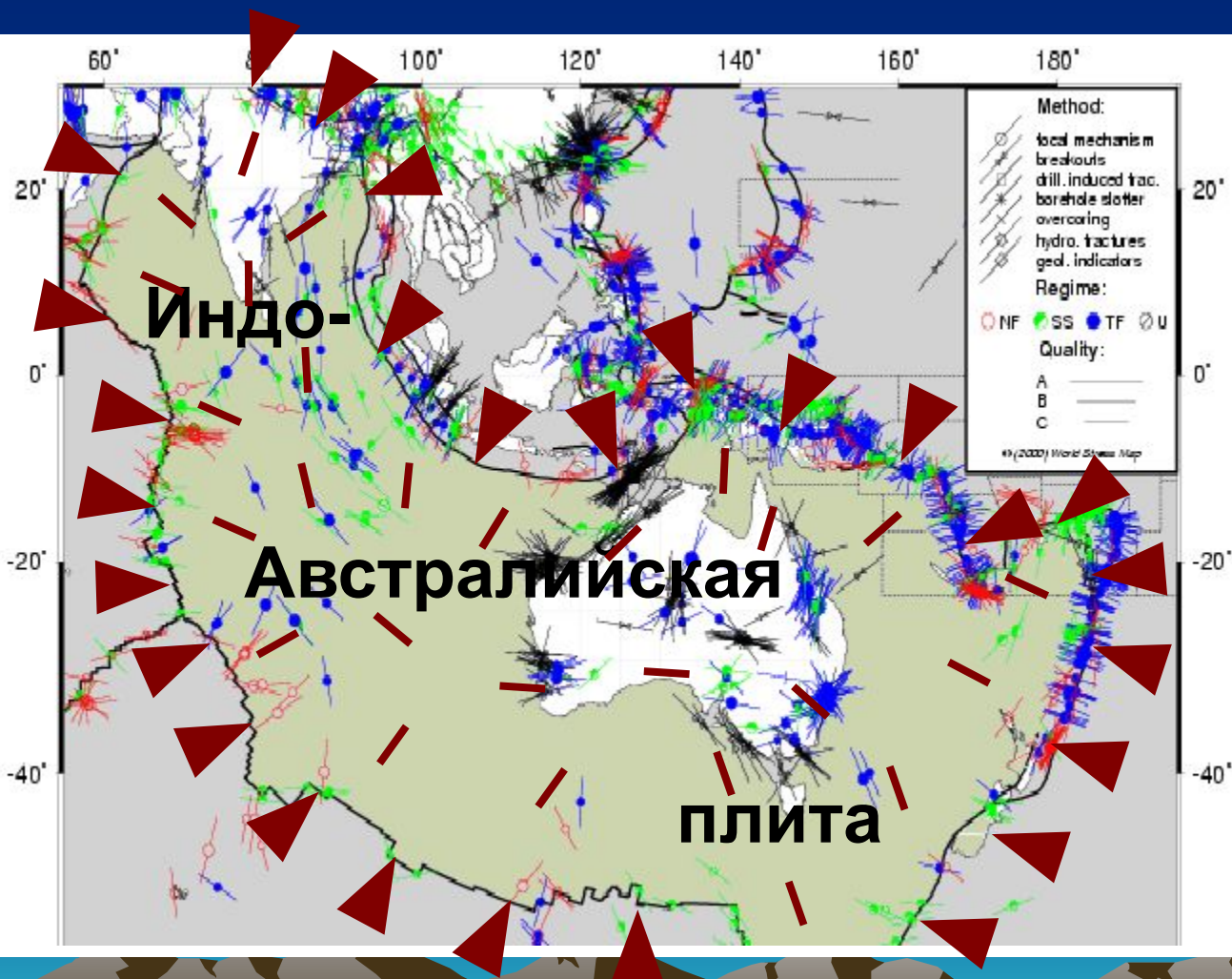
СИТУАЦИЯ В  
ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ  
ПРИЛОЖЕНИЯХ



Векторы  
граничных  
напряжений

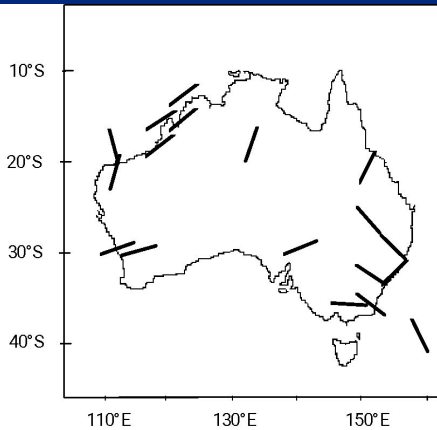


# Традиционный подход к определению напряжений в геодинамике

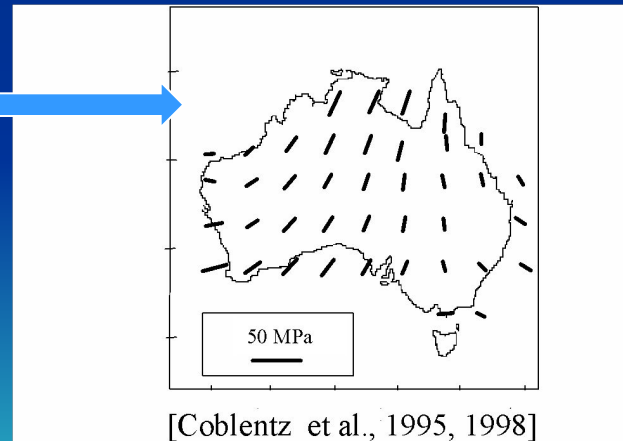
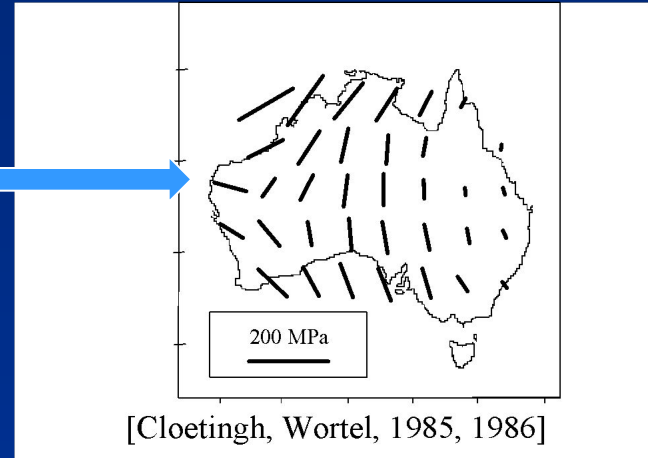


Поля напряжений моделируются на основе решения классических краевых задач, поставленных обычно в напряжениях. Граничные напряжения выбираются из модельных соображений, а ориентации напряжений внутри региона рассматриваются как ограничения на разыскиваемое решение.

# Разница в решениях при традиционном подходе к определению напряжений



**Величины полученных напряжений существенно различаются в разных решениях:**



**Экспериментально определенные генерализованные направления оси максимального сжатия [Coblentz et al., 1995]**

# Прямой подход к определению полей напряжений

ОСНОВНАЯ ЦЕЛЬ: объединить достоинства измерений напряжений *in-situ* (реальность характеристик получаемого напряженного состояния) и методов математического моделирования (получение сплошных полей полного тензора напряжений)

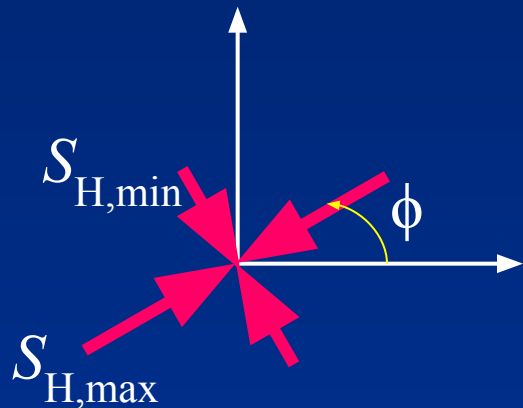
## ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПОДХОДА:

- использование экспериментальных данных об ориентации главных напряжений непосредственно в качестве входной информации и отказ от умозрительных гипотез традиционного математического моделирования



# Представление плоского тензора напряжений

$$(S_{H, \max} = -T_1, S_{H, \min} = -T_2, T_1 < T_2)$$



$S_{H, \max}$  и  $S_{H, \min}$  – взаимно ортогональные главные значения тензора напряжений (максимальное и минимальное горизонтальные сжимающие напряжения);

$\phi$  – угол наклона  $S_{H, \max}$  к некоторому выделенному направлению в плоскости)

$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(S_{H, \max} - S_{H, \min})$  – максимальное касательное напряжение;

$P = \frac{1}{2}(S_{H, \max} + S_{H, \min})$  – среднее напряжение

Определить поле тензора напряжений  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  – значит найти 3 скалярных поля  $S_{H, \max}$ ,  $S_{H, \min}$ ,  $\phi$  или, что эквивалентно, 3 скалярных поля  $\tau_{\max}$ ,  $P$ ,  $\phi$

# Траектории главных напряжений

Траектории главных напряжений (ТГН) – кривые, касательные к которым в каждой точке ориентированы по направлению  $S_{H,max}$  или  $S_{H,min}$



Модельный пример построения плоской сетки взаимно ортогональных ТГН по заданным дискретным ориентациям максимального сжимающего напряжения

$$\left( \frac{dx_2}{dx_1} \right)_1 = \tan \varphi \quad \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right)_2 = -\cot \varphi$$

Уравнения ТГН

# 2D уравнения равновесия

$$\mathbf{T} = T_1 \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + T_2 \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 \quad \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 \quad (*) \quad \nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

В декартовой с.к.  $x_1, x_2$  с ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\nabla = \mathbf{m}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathbf{m}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \quad \text{В ортогональной криволинейной с.к., совпадающей с ТГН}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \sum_i \mathbf{m}_i \frac{\partial}{\partial s_i} \cdot \sum_j T_j \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_j = \sum_i \sum_j \left[ \frac{\partial T_j}{\partial s_i} (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j) \mathbf{m}_j + T_j \left( \frac{\partial \mathbf{m}_j}{\partial s_i} \cdot \mathbf{m}_i \right) \mathbf{m}_j + T_j (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j) \frac{\partial \mathbf{m}_j}{\partial s_i} \right] \quad (**)$$

Умножая (\*\*), на  $\mathbf{m}_k$ , получаем с учетом  $\frac{\partial \mathbf{m}_j}{\partial s_i} \cdot \mathbf{m}_i = -\frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial s_i} \cdot \mathbf{m}_j$

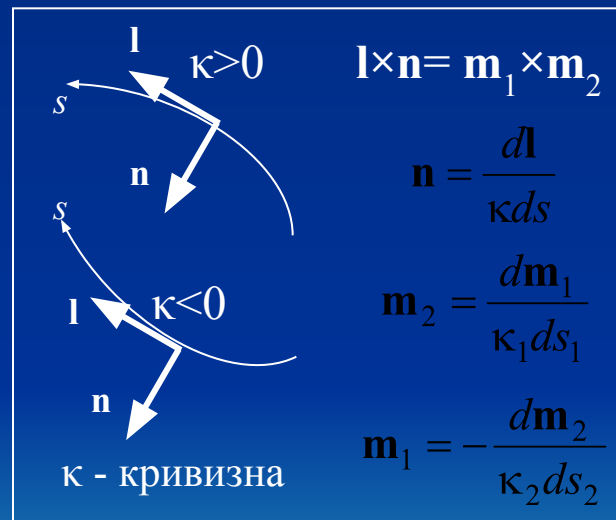
$$\mathbf{m}_k \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}) = \frac{\partial T_k}{\partial s_k} + \sum_i (T_i - T_k) \mathbf{m}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial s_i}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial s_1} + \kappa_2 (T_1 - T_2) + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial s_2} + \kappa_1 (T_1 - T_2) + b_2 = 0$$

Из (\*)  $\rightarrow$

**Уравнения равновесия в форме Ламе-Максвелла**



$\mathbf{b}_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_i$ ,  $\kappa_i$  - кривизна  $i$ -той ТГН

## 2D уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_1}{\partial s_1} + (T_1 - T_2) \frac{\partial \phi}{\partial s_2} = 0 \quad \phi - \text{угол наклона } T_1 \text{ к оси } x; s_j - \text{длина}$$

дуги вдоль траектории  $j$ -го семейства

$$\frac{\partial T_2}{\partial s_2} + (T_1 - T_2) \frac{\partial \phi}{\partial s_1} = 0$$

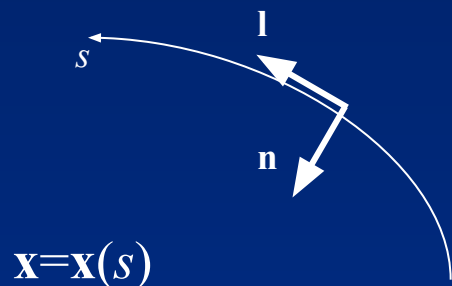
$$\kappa_j = \left| \frac{\partial \phi}{\partial s_j} \right| \quad - \text{кривизна траектории } j\text{-го семейства}$$

Для трех неизвестных функций напряжения  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\phi$  имеется два уравнения равновесия

Если траектории главных напряжений (ТГН) заданы внутри исследуемой области  $\Omega$ , то функция  $\phi$  известна и уравнения равновесия представляют замкнутую систему уравнений. Величины  $T_1$ ,  $T_2$  определяются без предположений об определяющих соотношениях среды.



# 2D уравнения равновесия



$\mathbf{T}(\mathbf{x}(s))$

Тензор  $\mathbf{T}(\mathbf{x}(s))$  задан на линии  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$  и в окрестности линии известно поле ТГН.  
**Задача:** определить  $\mathbf{T}(\mathbf{x}(s))$  в окрестности линии из уравнений равновесия.

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{l} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \mathbf{n} \cdot \sum_i \left[ \frac{\partial T_i}{\partial n} (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i) + T_i \frac{\partial (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i)}{\partial n} \right] + \mathbf{b} = 0$$

$$\nabla = \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}$$

$$\mathbf{l} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \sum_i \left[ \frac{\partial T_i}{\partial n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_i) \mathbf{m}_i + T_i \mathbf{n} \cdot \frac{\partial (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i)}{\partial n} \right] + \mathbf{b} = 0$$

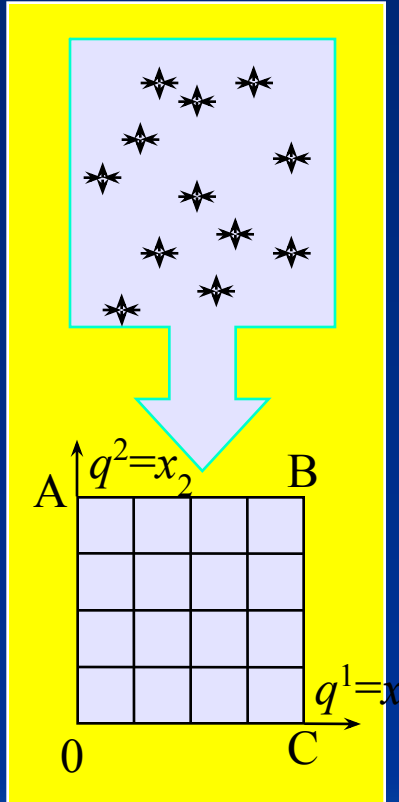
$$\mathbf{l} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \cdot \mathbf{m}_k + \frac{\partial T_k}{\partial n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_k) + \sum_i \left[ T_i \mathbf{n} \cdot \frac{\partial (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i)}{\partial n} \cdot \mathbf{m}_k \right] + \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_k = 0$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_k) = -\mathbf{l} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \cdot \mathbf{m}_k - \sum_i \left[ T_i \mathbf{n} \cdot \frac{\partial (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i)}{\partial n} \cdot \mathbf{m}_k \right] - \mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_k = 0$$

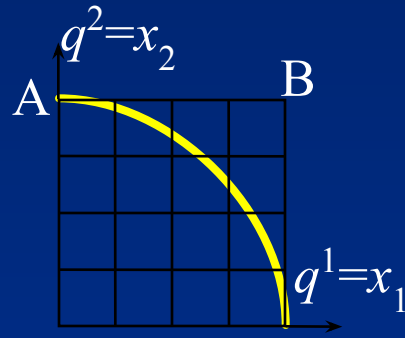
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_k = 0 \longrightarrow \frac{\partial T_k}{\partial n}$  из уравнений равновесия определить нельзя.

**При заданном 2D поле ТГН уравнения равновесия являются системой уравнений гиперболического типа с характеристиками, совпадающими с ТГН**

# Постановки краевых задач

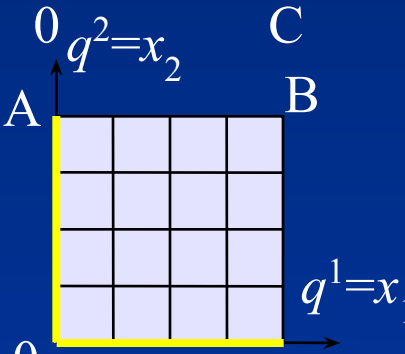


Модельный пример реконструкции ТГН



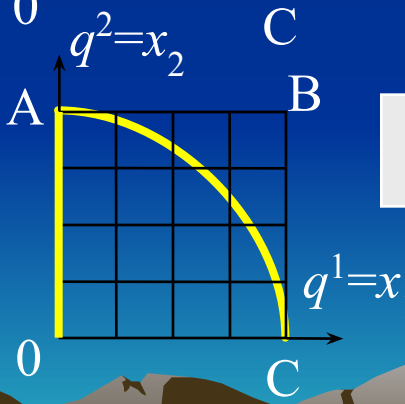
## Задача Коши

Начальные условия на величины  $T_1$  и  $T_2$  (или вектор напряжения  $t$ ) задаются на нехарактеристической линии AC



## Задача Гурса

Граничные условия ставятся на характеристиках:  $0A$  (условие на  $T_1$ ) и  $0C$  (условие на  $T_2$ )



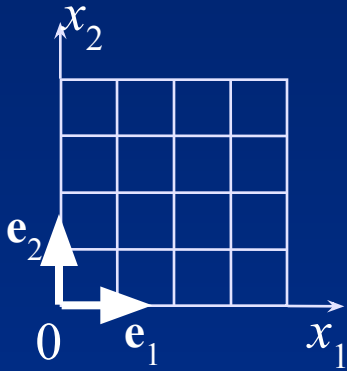
## Смешанная задача

Граничные условия ставятся на характеристике (напр.,  $0A$ ) и на нехарактеристической линии ( $0B$ )



# Аналитические решения для простейших ТГН

ТГН, совпадающие с линиями декартовой с.к.



Уравнения Ламе-Максвелла

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

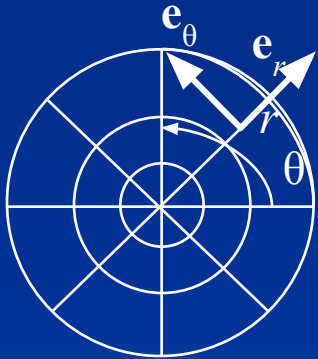
$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$$

Решение задачи Гурса

$$T_1(x_1, x_2) = T_1(x_1^*, x_2) + \int_0^{x_1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1 dx_1$$

$$T_2(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2^*) + \int_0^{x_2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2 dx_2$$

ТГН, совпадающие с линиями полярной с.к.



Уравнения Ламе-Максвелла  
(без массовых сил)

$$\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{T_r - T_\theta}{r} + b_r = 0$$

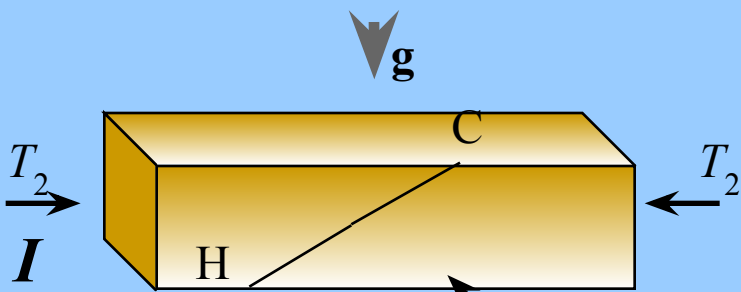
$$\frac{\partial T_\theta}{r \partial \theta} + b_\theta = 0$$

Решение задачи Гурса

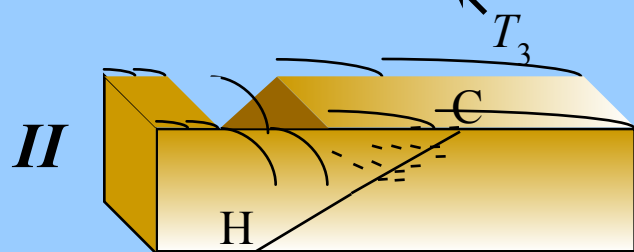
$$T_\theta(r, \theta) = T_\theta(r, \theta^*)$$

$$T_r(r, \theta) = \frac{r^*}{r} T_r(r^*, \theta) + \frac{1}{r} \int_{r^*}^r T_\theta(r, \theta^*) dr$$

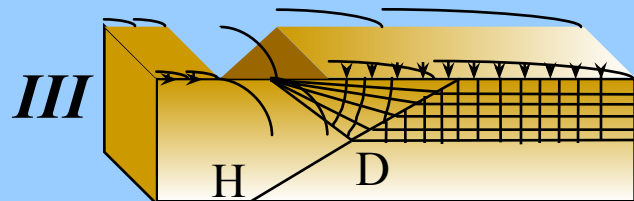
# Пример пошаговой процедуры определения поля напряжений по данным сейсмического мониторинга



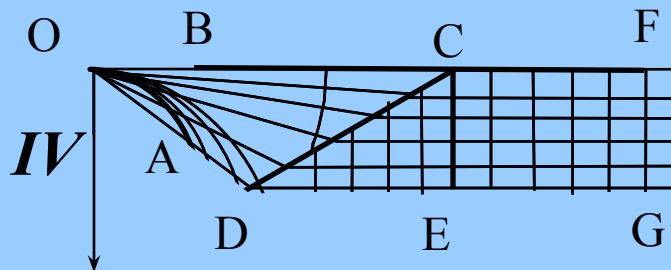
*I* – напряжения в блоке перед выемкой грунта



*II* – определение локальных ориентаций оси  $S_{H,max}$  на основе сейсмического мониторинга



*III* – реконструкция поля ТГН по дискретным ориентациям  $S_{H,max}$

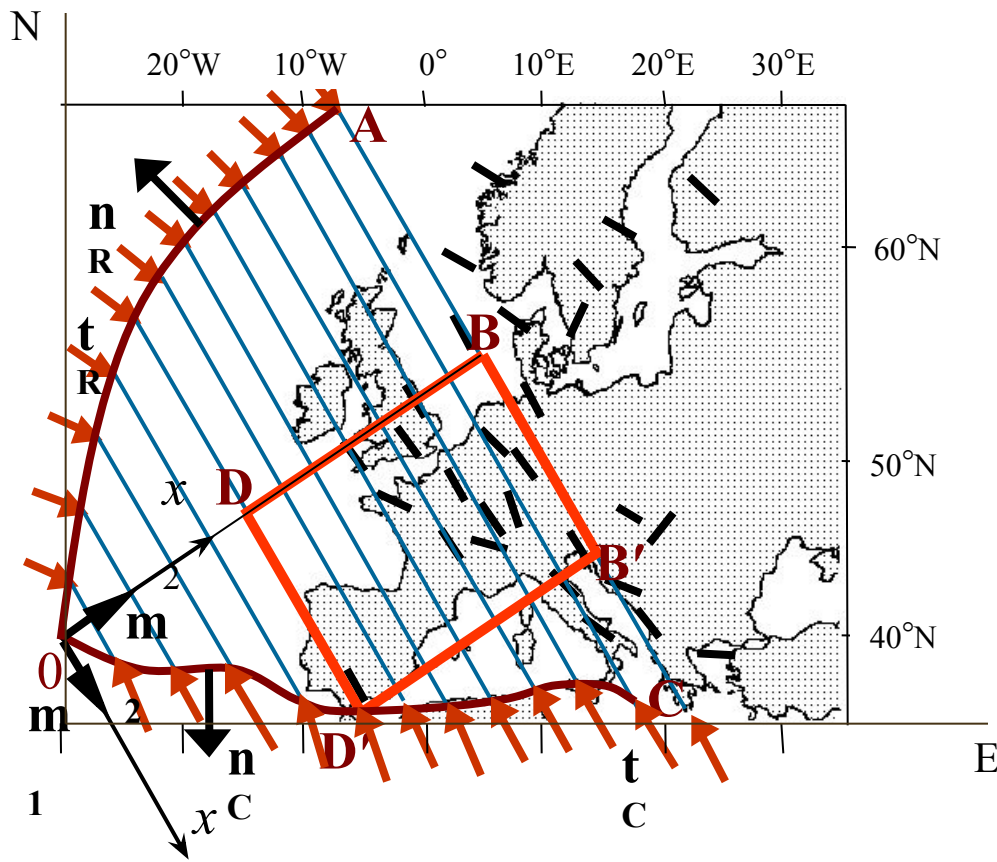


*IV* – решение уравнений равновесия для определения величин главных напряжений

ABCD – задача Гурса; CDE – задача Коши; CFGE – задача Гурса

CH – разлом, неизвестный до начала работ; CD – выявленная часть разлома

# Поле напряжений в литосфере Западно-Европейской платформы



**0A** – Срединно-Атлантический хребет (САХ)

**0C** – зона коллизии Африканской и Евразийской плит

/ – ориентации оси  $S_{H, \max}$

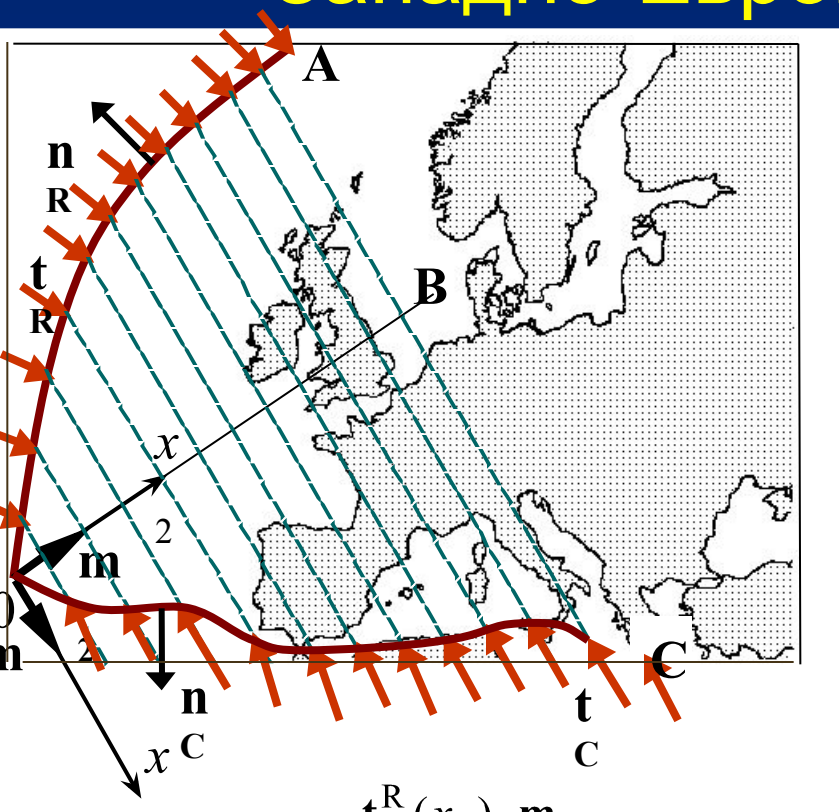
$t^R$  – сила отталкивания от САХ

$t^C$  – сила коллизии

**D'DBV'** – Западно-Европейская провинция напряжений (ЗЕПН)

— траектории  $S_{H, \max}$

# Поле напряжений в литосфере Западно-Европейской платформы



$$S_{H,\max} = S_{H,\max}(x_2) \quad S_{H,\min} = S_{H,\min}(x_1)$$

$$t^R = -S_{H,\max}(\mathbf{n}^R \cdot \mathbf{m}_1)\mathbf{m}_1 - S_{H,\min}(\mathbf{n}^R \cdot \mathbf{m}_2)\mathbf{m}_2$$

$$S_{H,\min}(x_1) = -\frac{t^R(x_1) \cdot \mathbf{m}_2}{\mathbf{n}^R(x_1) \cdot \mathbf{m}_2}$$

0AB:

$$S_{H,\max}(x_2) = -\frac{t^R(x_2) \cdot \mathbf{m}_1}{\mathbf{n}^R(x_2) \cdot \mathbf{m}_1} \quad (*)$$

(\*) выполняется в 0ABC

0C:  $t^C = \frac{t^R \cdot \mathbf{m}_1}{\mathbf{n}^R \cdot \mathbf{m}_1} (\mathbf{n}^C \cdot \mathbf{m}_1)\mathbf{m}_1 - S_{H,\min}(\mathbf{n}^C \cdot \mathbf{m}_2)\mathbf{m}_2$

$$S_{H,\min}(x_1) = -\frac{t^C(x_1) \cdot \mathbf{m}_2}{\mathbf{n}^C(x_1) \cdot \mathbf{m}_2}$$

0BC:

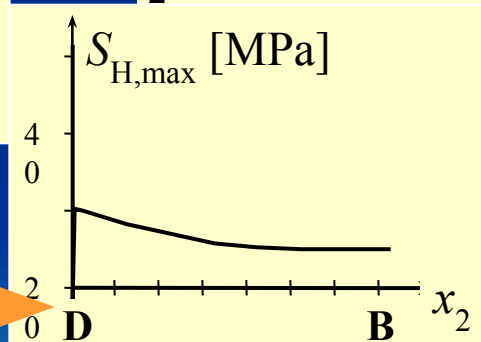
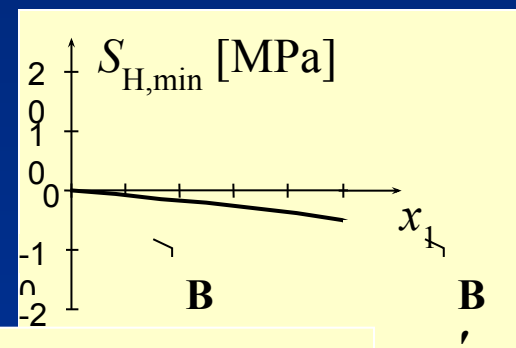
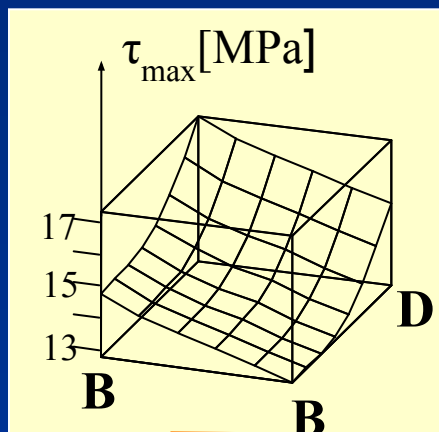
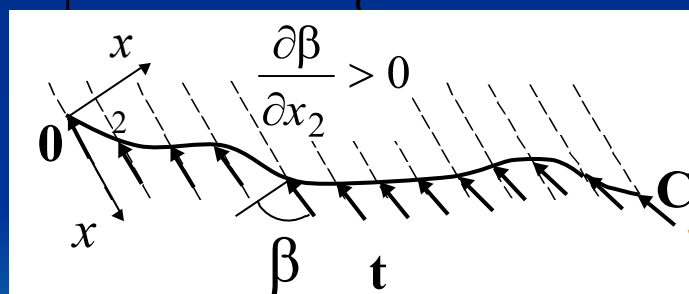
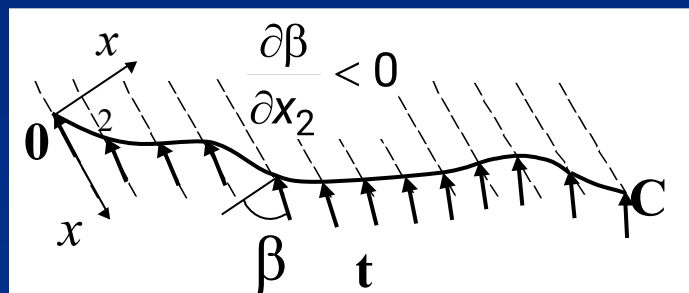
При заданном  $t^R$  на 0C  
известна проекция  $t^C$  на  $x_1$

$$S_{H,\min}|_{x_1=+0} = S_{H,\min}|_{x_1=-0}$$

Непрерывность  
решения

# Поле напряжений в литосфере Западно-Европейской платформы

Решение накладывает ограничение на напряжение коллизии  $t^C$ . Если известна величина этого напряжения, то определяется его ориентация, и наоборот. Выбор действительной ориентации  $t^C$  основывается на сравнении теоретически и экспериментально определяемых режимах напряжений в литосфере ЗЕПН.



Для согласования с наблюдаемыми напряжениями растяжения и сдвиговым режимом напряжений на большей части ЗЕПН вектор  $t^C$  должен быть близок по направлению к направлению  $S_{H,max}$  и вращаться против часовой стрелки при движении на восток.

# Некоторые сведения из ТФКП

$$f = f_1(x_1, x_2) + if_2(x_1, x_2) \quad (f_1 = \operatorname{Re} f, f_2 = \operatorname{Im} f) \longrightarrow f(z, \bar{z})$$

$z = x_1 + ix_2, \bar{z} = x_1 - ix_2$  Комплексно-сопряженные координаты

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) + i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \longrightarrow f = f(z)$$

Голоморфная функция

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Условия Коши-Римана

$$\Delta f_1 = 0, \Delta f_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{биголоморфная функция}$$

Определить голоморфную функцию  $f$  в круге по заданной на границе действительной части  $f_1$ .



$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\theta + iC, \quad \zeta = e^{i\theta}$$

Оператор Шварца



# Основные соотношения плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = 0$$

Уравнения  
равновесия

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = T_{11} - \nu(T_{11} + T_{22}) \quad \text{Закон Гука}$$

$$2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = T_{22} - \nu(T_{11} + T_{22}) \quad \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = T_{12}$$

$T_{11}, T_{12}, T_{22}$  – компоненты  $\mathbf{T}$  в декартовых координатах  $x_1, x_2$

$P = \frac{1}{2}(T_{11} + T_{22})$   $P$  – вещественная функция среднего напряжения,  $D$  – комплекснозначная функция девиатора напряжений

$$D = \frac{1}{2}(T_{22} - T_{11}) + iT_{12}$$

$u = u_1 + iu_2$  Комплекснозначный вектор  
перемещений

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \text{Вращение}$$



# Основные соотношения плоской задачи теории упругости

## Закон Гука

$$2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -D \quad 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = (1-2\nu)P + i2\mu\omega$$

$$2\mu \Delta \bar{u} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad 2\mu \Delta \bar{u} = (1-2\nu) \frac{\partial P}{\partial z} + i2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \quad \text{Уравнения равновесия}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( P + i \frac{\mu}{1-\nu} \omega \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P + i \frac{\mu}{1-\nu} \omega = 2\overline{\varphi'(z)} \quad \Rightarrow \quad P - i \frac{\mu}{1-\nu} \omega = 2\varphi'(z) \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \Delta P = 0 \\ \Delta \omega = 0 \end{matrix}$$

$$P = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \quad \xrightarrow{\text{Уравнения равновесия}} \quad \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \varphi''(z) \quad \Rightarrow \quad D = \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)$$

$$2\mu \bar{u} = -\bar{z}\varphi'(z) - \psi(z) + \overline{\zeta_1(z)}$$

$$2\mu \bar{u} = -\bar{z}\varphi'(z) - \overline{\varphi(z)} + 4(1-\nu)\overline{\varphi(z)} + \overline{\zeta_2(z)}$$

$$\overline{\zeta_1(z)} = (3-4\nu)\overline{\varphi(z)}$$

$$\zeta_2(z) = -\psi(z)$$

$$2\mu u = (3-4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

# Основные соотношения плоской задачи теории упругости

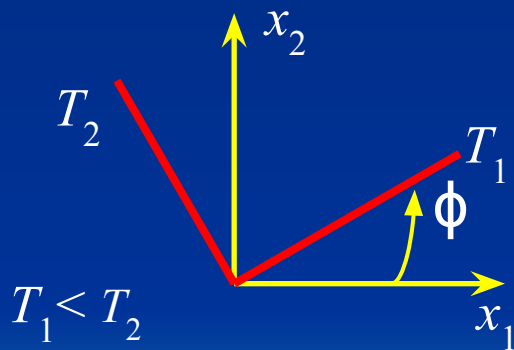
$$\begin{aligned} \varphi'(z) = \Phi(z) \\ \psi'(z) = \Psi(z) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) \\ P(z, \bar{z}) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \end{aligned}$$

Формулы Колосова-Мусхелишвили

$\Phi, \Psi$  - голоморфные функции,  $D$  – биголоморфная функция

$$D(z, \bar{z}) = |D|e^{i\alpha} \quad |D| = \frac{1}{2}|T_2 - T_1| = \tau_{\max} \quad \alpha = \arg(D)$$

$|D|$  - модуль  $D$   
 $\alpha$  - аргумент  $D$



$$\alpha = -2\phi$$

Связь  $\arg(D)$  с ориентацией главных напряжений

Искомые функции  $P(z, \bar{z}), \tau_{\max}(z, \bar{z}), \alpha(z, \bar{z})$

или, что то же  $T_1(z, \bar{z}), T_2(z, \bar{z}), \phi(z, \bar{z})$

# Основные соотношения плоской задачи теории упругости

Общий вид вещественной биголоморфной функции

$$D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z), \quad \text{Im } D = 0$$

$$\text{Im}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) = 0 \implies i(\bar{z}\Phi'(z) - z\overline{\Phi'(z)}) = 2 \text{Im} \Psi(z) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\implies \Phi''(z) - \overline{\Phi''(z)} = 0 \implies \text{Im} \Phi''(z) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \Phi'(z) = c_2 z + \bar{c}_1 & (\text{Im } c_2 = 0, c_2 = \text{const}, c_1 = c_{11} + ic_{12} = \text{const}) \\ \Psi(z) = c_1 z + c_0 & (c_0 = \text{const}, \text{Im } c_0 = 0) \end{cases}$$

$$D_{\text{real}}(z, \bar{z}) = c_2 \bar{z}z + \overline{c_1}z + c_1 z + c_0$$

$$(\text{Im } c_0 = \text{Im } c_2 = 0)$$

$A(z)$  - голоморфная функция



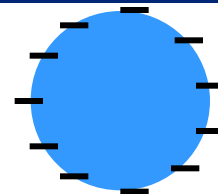
$$D_{\text{real}}(z, \bar{z})A(z)$$

- биголоморфная функция с тем же аргументом (если  $D_{\text{real}} > 0$ )

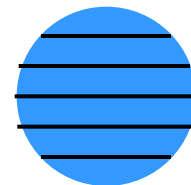
# Типы задач для упругой литосферы

Определение поля напряжений по:

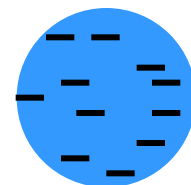
1) ориентации  $S_{H,\max}$  и кривизне ТГН, заданным на границе исследуемого региона



2) траекториям  $S_{H,\max}$ , известным всюду в исследуемом регионе



3) ориентациям  $S_{H,\max}$ , известным в отдельных точках исследуемого региона



## Общие свойства решений:

1) решение для поля напряжений зависит от  $m \geq 2$  произвольных констант

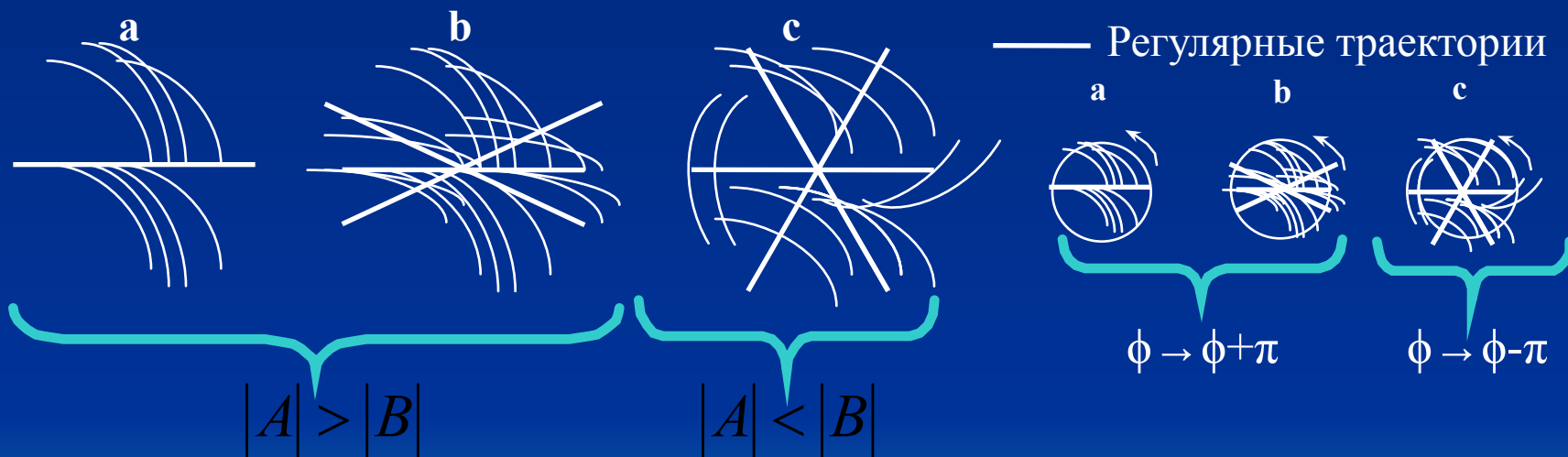
2) решение для ТГН и  $\tau_{\max}$  не зависит от объемных сил  $b$ , если они имеют гармонический потенциал

# Особые точки первого рода поля траекторий главных напряжений

$$T_1 = T_2 \text{ при } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \rightarrow D(\mathbf{x}^*) = 0$$

$$D = A\bar{z} + Bz \text{ при } |z| \rightarrow 0 \quad z=0 \text{ – особая точка первого порядка}$$

Существует 3 типа асимптотического поведения ТГН, которые топологически неэквивалентны и устойчивы к возмущениям коэффициентов  $A, B$ :



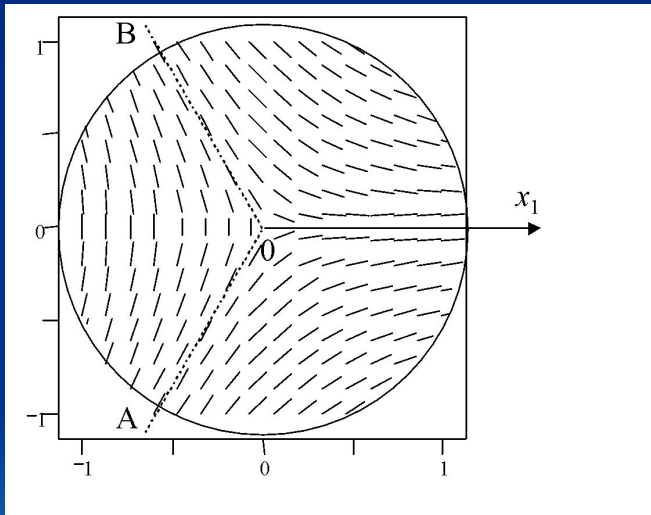
При обходе особой точки угол  $\phi$  касательной к траекториям одного семейства получает приращение  $+\pi$  при  $|A| > |B|$  (траектории выпуклы по отношению к особой точке) и приращение  $-\pi$  при  $|A| < |B|$  (траектории вогнуты)



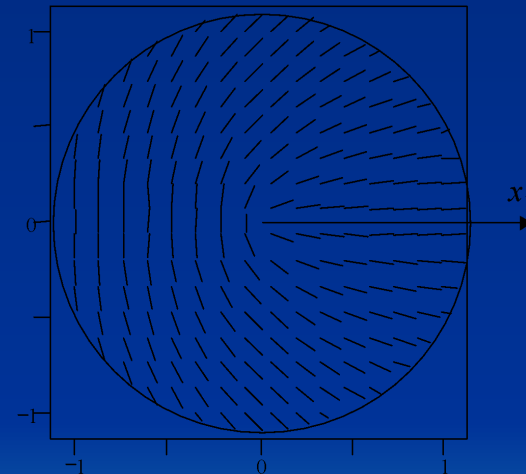
# Особые точки поля ТГН

Поля ТГН в окрестности особых точек в частных случаях

$$r = \frac{C}{\sqrt[3]{(1 \pm \cos \theta)(1 \mp 2 \cos \theta)^2}}$$



$$r = \frac{C}{\sqrt{1 \pm \cos \theta}}$$



# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

Не каждое поле траекторий допустимо в упругой среде, т.к. при произвольно заданной функции  $\alpha$  необходимо двумя функциями  $P$  и  $\tau_{\max}$  удовлетворить трем уравнениям упругости: двум уравнениям равновесия и условию гармоничности  $P$ .

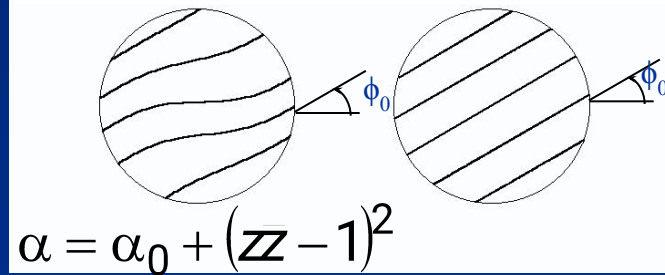
## Пример полей траекторий в круге

Граничные условия:

$$\Gamma: \begin{aligned} \alpha_0 &= const \\ \frac{\partial \alpha}{\partial n} &= 0 \end{aligned}$$

Недопустимые траектории

Допустимые траектории



$$\alpha(z, \bar{z}) = \frac{1}{2i} \ln \frac{\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)}{z\Phi'(z) + \Psi(z)}$$

Условие допустимости поля ТГН в упругости

В частности, гармоническая функция  $\alpha$  ( $\Delta\alpha=0$ ) допустима в 2D упругости, т.к. в этом случае  $\alpha$  является аргументом некоторой голоморфной функции  $A(z)$  и, следовательно, аргументом би-голоморфной функции  $D_{\text{real}}A(z)$

# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

В области  $\Omega$ :

ТГН - заданы



Известна функция  $\alpha$   
(аргумент функции  $D$ )

→ Определить би-голоморфную функцию  $D$  по заданному полю ее аргумента  $\alpha$ . Затем функция  $P$  вычисляется простым интегрированием уравнений равновесия

# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

## Частное решение



$$D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) \xrightarrow{D(z, \bar{z})|_{z=0} \neq 0} |\Psi(0)| \neq 0$$

$$|\Phi'(0)| = 0 \xrightarrow{\hspace{1cm}} D(z, \bar{z}) = \bar{z}zX(z) + \Psi(z)$$

$$V(r_*; z) = r_*^2 X(z) + \Psi(z) \quad \arg V(r_*; \xi) = \arg D(z, \bar{z})|_{z=\xi} = \alpha(\xi) = \alpha(r_*, \theta) \quad \xi \in \gamma_*$$

Голоморфная функция

$$V(r_*; z) = C_{r_*} \exp(iS(r_*; \alpha)) \quad S(r_*; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(r_*, \theta) \frac{r_* \exp(i\theta) + z}{r_* \exp(i\theta) - z} d\theta$$

Оператор Шварца

$$\boxed{\text{Ind}_{\gamma_*} V(r_*; z) = 0} \quad \text{Ind}_{\Gamma} D = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d \ln D \xrightarrow{\hspace{1cm}} V(r_*; z) \text{ не имеет нулей в круге}$$

# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

## Частное решение (продолжение)

$$\int \frac{\ln(r_*^2 X(\xi) + \Psi(\xi))}{\xi - z} d\xi = \ln(r_*^2 X(z) + \Psi(z)),$$

$$\int \frac{\ln(r_*^2 \overline{X}(\xi) + \overline{\Psi}(\xi))}{\xi - z} d\xi = \ln(r_*^2 \overline{X}(0) + \overline{\Psi}(0)),$$

$$\int \frac{\ln(r_*^2 X(\xi) + \Psi(\xi))}{\ln(r_*^2 \overline{X}(\xi) + \overline{\Psi}(\xi))} d\xi = \frac{\ln(r_*^2 X(0) + \Psi(0))}{\ln(r_*^2 \overline{X}(0) + \overline{\Psi}(0))},$$

$$\longrightarrow C_{r_*} = |r_*^2 X(0) + \Psi(0)|$$

Решая задачу для двух кругов  $r_*$  и  $r_{**}$

$$V(r_*; z) = r_*^2 X(z) + \Psi(z)$$

$$X(z) = \frac{V(r_*; z) - V(r_{**}; z)}{r_*^2 - r_{**}^2} \quad \Psi(z) = \frac{r_*^2 V(r_{**}; z) - r_{**}^2 V(r_*; z)}{r_*^2 - r_{**}^2}$$

$$X(z) = \frac{1}{2r_*} \frac{dV(r_*; z)}{dr_*} \quad \Psi(z) = V(r_*; z) - \frac{r_*}{2} \frac{dV(r_*; z)}{dr_*}$$

$$D_1(z, \bar{z}) = V(r_*; z) - (z\bar{z} - r_*^2) \frac{1}{2r_*} \frac{dV(r_*; z)}{dr_*}$$

Частное решение

$$V(r_*; z) = |\Psi(0)| \sqrt{1 + r_*^2 2w \cos \omega + r_*^4 w^2} \exp(iS(r_*; \alpha)) \quad w = \frac{|X(0)|}{|\Psi(0)|} \quad \omega = \arg \frac{X(0)}{\Psi(0)}$$

Если в рассчитанной функции  $D_1$  зависимость от  $r_*$  остается, то заданная функция  $\alpha$  не допустима в упругости

# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

Общее решение

$$D_1(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) \quad D(z, \bar{z}) = M(z, \bar{z})D_1(z, \bar{z}) \quad \text{Im} M(z, \bar{z}) = 0 \quad M(z, \bar{z}) > 0$$

**1**  $\Delta\alpha(z, \bar{z}) = 0$  в  $\Omega$   $D_1(z, \bar{z}) = A(z)$   $\arg A(z) = \alpha(z, \bar{z})$   $\frac{\partial^2 M}{\partial \bar{z}^2} = 0 \implies M = D_{\text{real}}(z, \bar{z})$

$$D(z, \bar{z}) = D_{\text{real}}(z, \bar{z})A(z) = (c_2\bar{z}z + \overline{c_1z} + c_1z + c_0)A(z) \quad (\text{Im } c_0 = \text{Im } c_2 = 0)$$

$$P(z, \bar{z}) = 2 \text{Re} \int (c_2z + \bar{c}_1)A(z)dz + c \quad (\text{Im } c = 0)$$





# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

## Общее решение

2  $\Delta\alpha(z, \bar{z}) \neq 0$  в  $\Omega \implies \Phi_1'(z)$  не равно тождественно 0 в  $\Omega$

$\gamma: (z-e)(\bar{z}-\bar{e})=R^2$   $\Phi_1'(z) \neq 0$  внутри  $\gamma$       Окружность  $\gamma$  целиком лежит в  $\Omega$

$M(z, \bar{z})$  на  $\gamma$  является граничным значением голоморфной функции

$$B(z) = \frac{(R^2 + \bar{e}(z-e))\Phi'(z) + (z-e)\Psi(z)}{(R^2 + \bar{e}(z-e))\Phi_1'(z) + (z-e)\Psi_1(z)}$$

$\Phi'(e) \neq 0$ , радиус  $R$  выбирается так, чтобы знаменатель внутри круга не обращался в 0.

Т.к.  $\text{Im}B(z) = 0$  на  $\gamma$ , то  $B(z) = \text{const} = c_3 > 0$ .

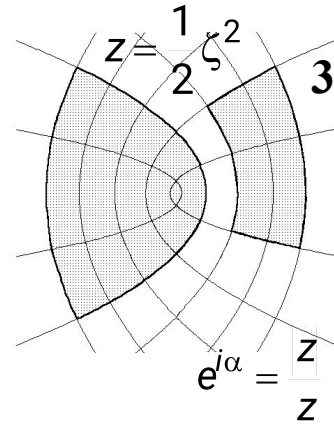
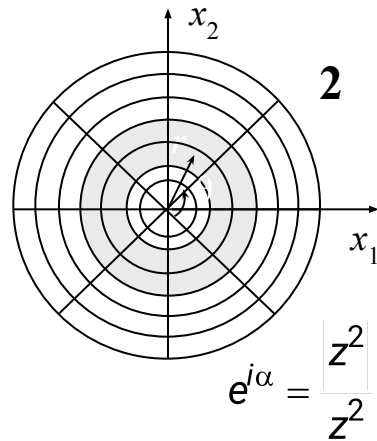
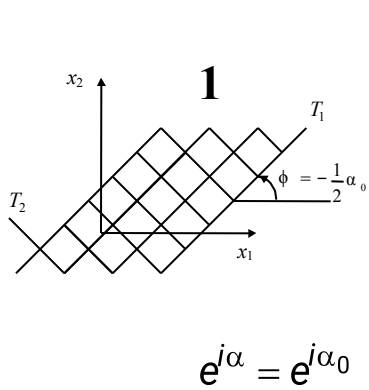
$$\Psi(z) = \left( \frac{R^2}{z-e} + \bar{e} \right) (c_3 \Phi_1'(z) - \Phi'(z)) + c_3 \Psi_1(z) \implies \frac{M(z, \bar{z}) - c_3}{R^2 - (z-e)(\bar{z}-\bar{e})} = \frac{E(z)}{D_1(z, \bar{z})} \quad \left( E(z) = \frac{c_3 \Phi_1'(z) - \Phi'(z)}{z-e} \right)$$

$$\implies E(z) = 0 \implies M(z, \bar{z}) = c_3 \implies D(z, \bar{z}) = c_3 (\bar{z} \Phi_1'(z) + \Psi_1(z)), \quad P(z, \bar{z}) = c_3 (\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}) + c$$

( $\text{Im}c_3 = 0, \text{Re}c_3 > 0, \text{Im}c = 0$ ).



# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости



**1.** 
$$P(z, \bar{z}) = 2 \operatorname{Re} \left( e^{j\alpha_0} \left( \frac{1}{2} c_2 z^2 + \bar{c}_1 z \right) \right) + c,$$

$D = e^{j\alpha_0} D_{\text{real}}, \quad D_{\text{real}}(z, \bar{z}) = c_2 \bar{z}z + \bar{c}_1 z + c_1 \bar{z} + c_0, \quad \alpha_0 = -2\varphi_0,$   
 $\operatorname{Im} c_0 = \operatorname{Im} c_2 = \operatorname{Im} c = 0.$

Декартовы ТГН

$e^{j\alpha} = \frac{|z^2|}{z^2} \Rightarrow$

**2.** 
$$P = c_2 \ln(\bar{z}z) - \frac{\bar{c}_1}{z} - \frac{c_1}{\bar{z}} + c,$$

$$T_r = c + c_2(2 \ln r - 1) - \frac{4}{r}(a \cos \theta - b \sin \theta) - \frac{c_0}{r^2},$$

$\Psi_1(z) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow D = \frac{D_{\text{real}}(z, \bar{z})}{z^2}, \quad D_{\text{real}}(z, \bar{z}) = c_2 \bar{z}z + \bar{c}_1 z + c_1 \bar{z} + c_0,$   
 $\operatorname{Im} c_0 = \operatorname{Im} c_2 = \operatorname{Im} c = 0.$

$$T_\theta = c + c_2(2 \ln r + 1) + \frac{c_0}{r^2}.$$

Полярные ТГН

# Определение напряжений при заданных ТГН в упругости

Параболические ТГН

$$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \quad y = \xi \eta$$

$$\zeta = \xi + i\eta$$



$$z = \frac{1}{2}\zeta^2$$

$$\eta = \text{const} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \tan \varphi = -\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\eta}{\xi} = \tan(\arg \zeta) = \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$\alpha = -\theta \quad \rightarrow \quad e^{i\alpha} = \frac{|z|}{z} \quad \rightarrow \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{z}$$

$$P = c_2 2 \operatorname{Re} z + \bar{c}_1 \ln z + c_1 \overline{\ln z} + c,$$

$$P = c_2 \operatorname{Re} \zeta^2 + \bar{c}_1 2 \ln \zeta + c_1 2 \overline{\ln \zeta} + c + (\bar{c}_1 + c_1) \ln \frac{1}{2},$$

$$D = D_{\text{real}}(z, \bar{z}) \frac{1}{z}, \quad D_{\text{real}} = c_2 \bar{z}z + \bar{c}_1 z + c_1 \bar{z} + c_0,$$

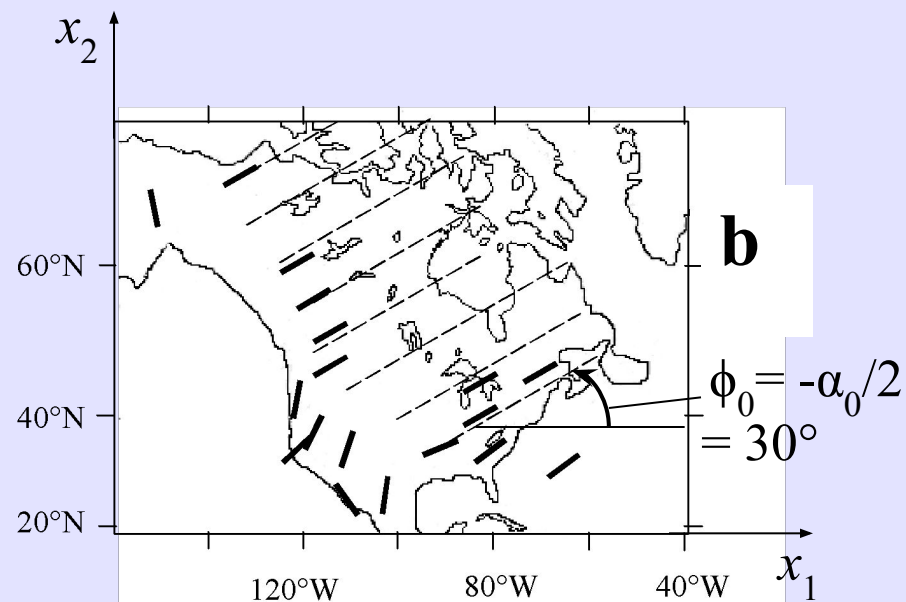
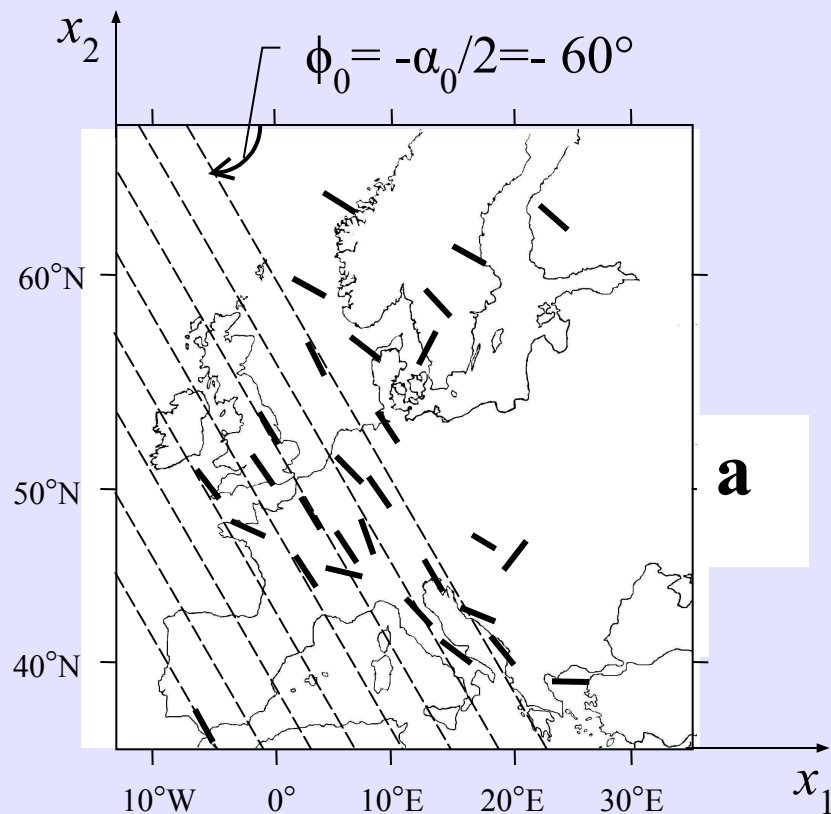
$$D = \tau(\zeta, \bar{\zeta}) \frac{2}{\zeta^2}, \quad \tau(\zeta, \bar{\zeta}) = c_2 \frac{1}{4} (\bar{\zeta}\zeta)^2 + \bar{c}_1 \frac{1}{2} \bar{\zeta}^2 + c_1 \frac{1}{2} \zeta^2 + c_0,$$

$$\operatorname{Im} c_0 = \operatorname{Im} c_2 = \operatorname{Im} c = 0.$$

$$\operatorname{Im} c_0 = \operatorname{Im} c_2 = \operatorname{Im} c = 0.$$



# Определение региональных полей напряжений при однородном поле траекторий



**a** - Западная Европа;  
**b** - Северная Америка

$$P = \frac{1}{2} (S_{H,\max} + S_{H,\min}) = \operatorname{Re} \left( e^{i\alpha_0} (c_2 z^2 + 2\bar{c}_1 z) \right) + c$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (S_{H,\max} - S_{H,\min}) = c_2 \bar{z}z + \overline{c_1 z} + c_1 z + c_0$$

$c_2, c_0, c$  – действительные постоянные,  $c_1$  – комплексная. Всего решение содержит 5 произвольных постоянных