Лекция 6.

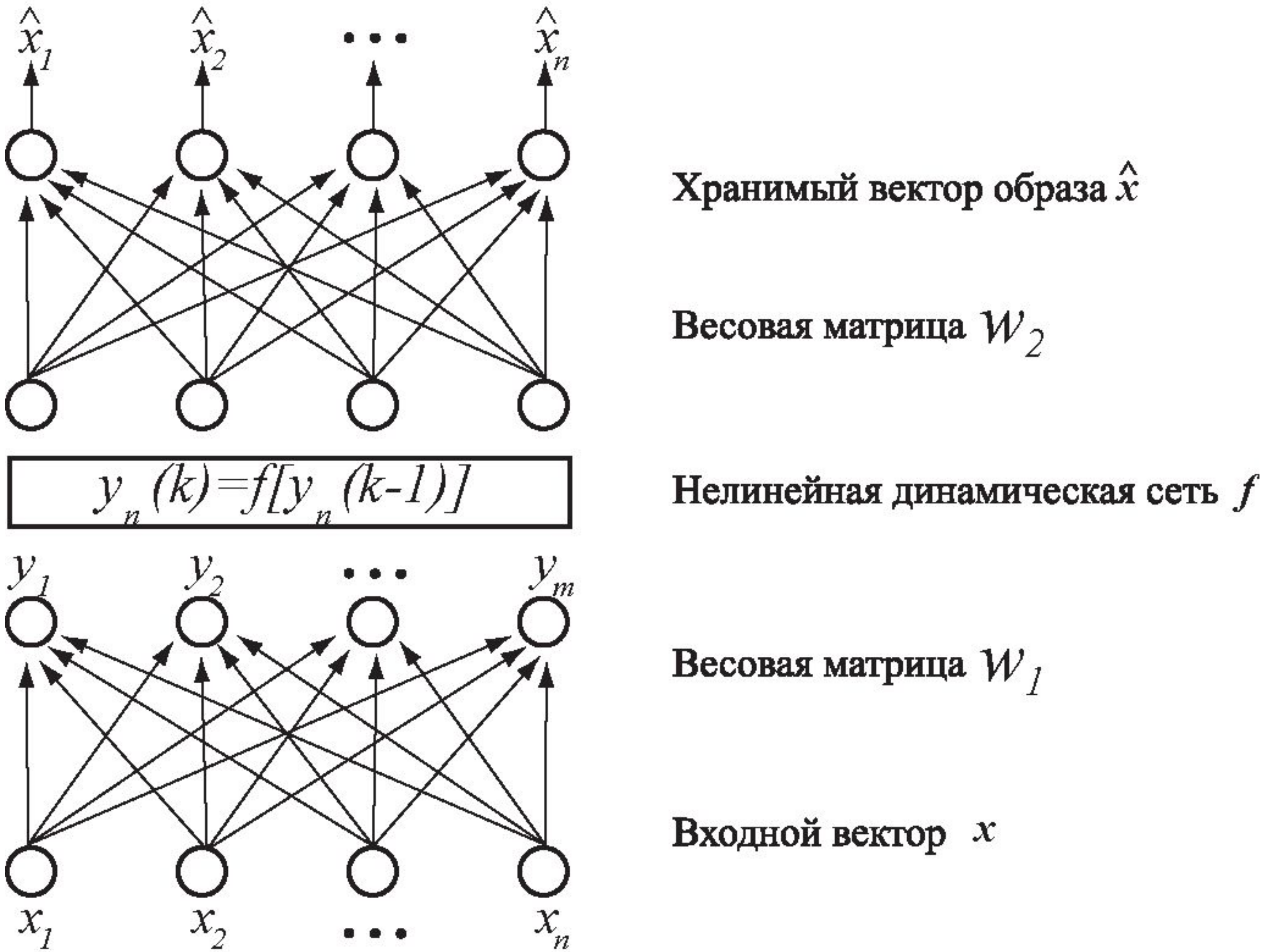

Рис.6.1 – Синергетический компьютер

Выбор значений элементов матриц W_1 и W_2 очень прост – они определяются непосредственно векторами хранимых образов по формуле

$$W_1^T = W_2 = \left| \hat{x}_1\ \hat{x}_2 \ldots \hat{x}_n \right|, \qquad n = \overline{1, M}. \tag{6.1}$$

Чтобы проще было понять работу сети, рассмотрим отдельные этапы вычисления выходного образа.

Выходной сигнал первого слоя определяется как

$$\mathbf{y} = W_1 \mathbf{x}, \tag{6.2}$$

т.е. он представляет собой скалярное произведение векторов $\hat{\mathbf{x}}_n$ и $\mathbf{x}$, которое тем больше, чем ближе расположены эти векторы. Таким образом, компоненты выходного сигнала $\mathbf{y}$ характеризуют меру подобия запомненного образа $\hat{\mathbf{x}}_n$ предъявляемому $\mathbf{x}$, и если предъявляемый образ $\mathbf{x}$ будет наиболее близок хранимому $\hat{\mathbf{x}}_{n^*}$, компонент n^* выходного сигнала $\mathbf{y}_{n^*}$ будет иметь наибольшее значение. Компоненты y_n $(n = \overline{1, M})$ являются начальными значениями компонентов вектора $\mathbf{y}$, вычисляемых по следующей рекурсивной формуле:

$$y_n(k) = y_n(k-1)\left[\alpha_k - \beta \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{M} y_i^2(k-1) + (\beta - 1) y_n^2(k-1)\right]. \tag{6.3}$$

Выбирая соответствующую потенциальную функцию в виде

$$V(Y_n) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\alpha_i Y_i^2 + \frac{\beta}{4}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{M} Y_n^2 Y_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{M} Y_i^4 \tag{6.4}$$

и вычисляя уравнение движения как

$$y_n(k) = -\frac{\partial V}{\partial y_n}, \tag{6.5}$$

можно получить (6.3).Уравнение (6.5) соответствует градиентному методу поиска локального минимума. Можно показать, что наибольший компонент y_n. сходится к 1, а остальные - к нулю. Таким образом, задача (6.3) состоит в том, чтобы увеличить значение наибольшего компонента и уменьшить значения всех остальных. После рекурсивных вычислений в соответствии с (6.3) только один компонент выходного вектора будет равен 1, а остальные – нулю. Этот вектор передается с весовой матрицей W_2 на второй слой (выходной)

$$\hat{\mathbf{x}} = W_2 y\,.$$

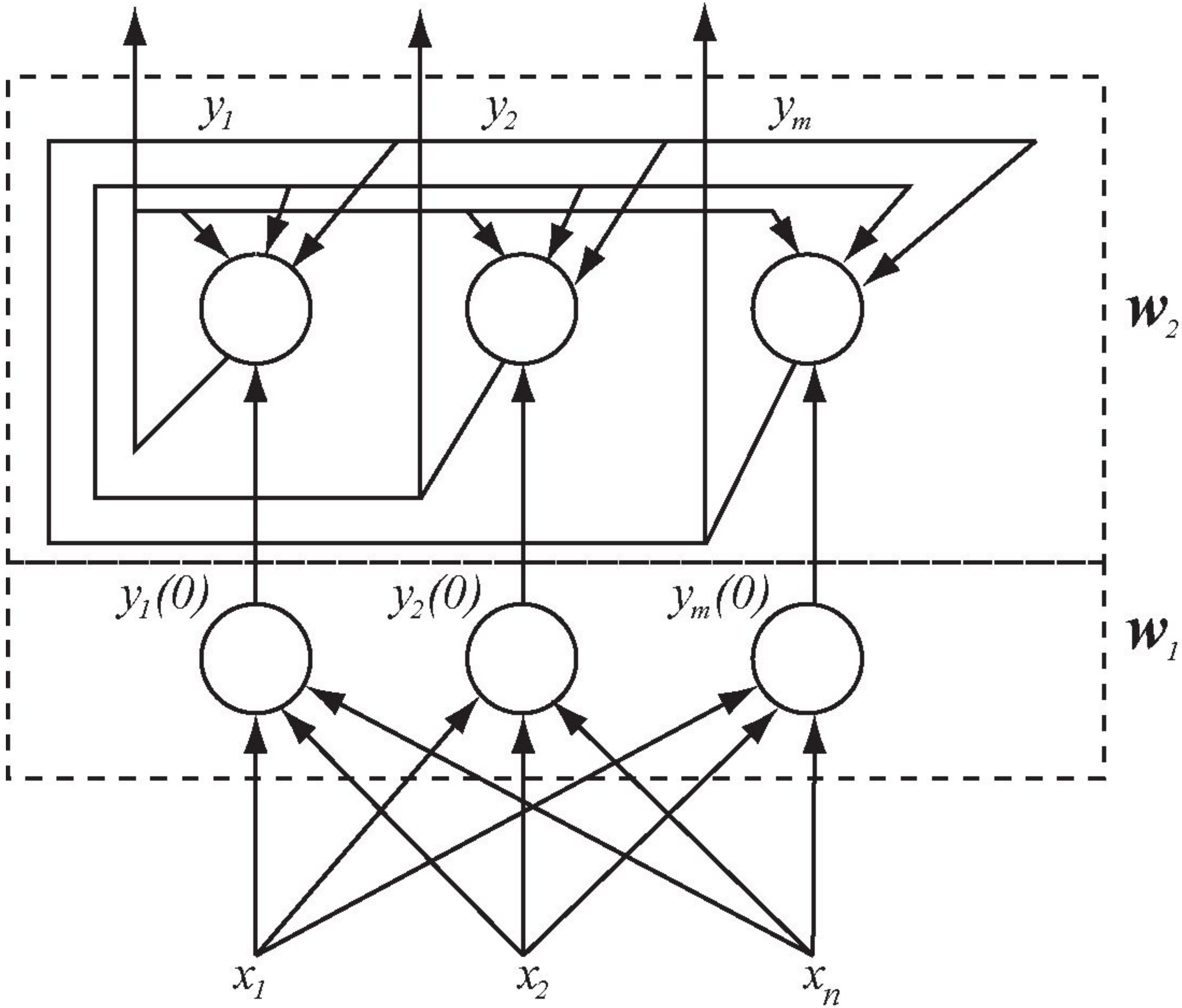

Рис.7.1 – Сеть Хэмминга

На вход сети поступают двоичные биполярные сигналы, т.е. сигналы, принимающие значения “+1” или “-1”. Обычные двоичные сигналы, принимающие значение “+1” и “0”, преобразуются таким образом, чтобы значение “0” превратилось в “-1”. С этой целью компоненты нового вектора $\hat{x}_i$ пересчитываются по формуле

$$\hat{x}_i = 2\,x_i - 1.$$

Сеть Хэмминга состоит из двух слоев, первый из которых является сетью прямого распространения и характеризуется весовой матрицей W_1

$$W_1^T = | x_1^* x_2^* \dots x_M^* |. \qquad (7.1)$$

Выходной сигнал этого слоя реализуется в соответствии с формулой

$$y = 0{,}5(W_1\,\mathbf{x} + (M\,M \dots M)^T)\,, \qquad (7.2)$$

где M – количество хранимых в памяти образов,

т.е. каждый компонент выходного сигнала вычисляется по формуле

$$y_i = 0{,}5\left[(\mathbf{x}_i^*)^T \mathbf{x} + M \right]. \qquad (7.3)$$

Как уже было сказано, компоненты векторов $\mathbf{x}_i^*$ и $\mathbf{x}$ могут принимать значения “+1” и “-1”, причем знаки компонентов могут совпадать, или не совпадать. Если число несовпадающих компонентов (бит) равно H, то H является *хэмминговым расстоянием* этих векторов. Таким образом, при H несовпадающих компонентах количество совпадающих компонентов равно M-H, а скалярное произведение $(\mathbf{x}_i^*)^T\mathbf{x}$ будет равно

$$(\mathbf{x}_i^*)^T\mathbf{x} = (M\text{-}H)\text{-}H = M\text{-}2H\ . \tag{7.4}$$

Подстановка (7.4) в (7.3) дает

$$y_i = 0{,}5(M - 2H + M) = M - H\ , \tag{7.5}$$

т.е. выходной сигнал первого слоя характеризует количество совпадающих разрядов у векторов (хэммингово расстояние) $\mathbf{x}_i^*$ и $\mathbf{x}$. Если H=0, то y_i =M, т.е. векторы $\mathbf{x}_i^*$ и $\mathbf{x}$ полностью совпадают. При H=M векторы $\mathbf{x}_i^*$ и $\mathbf{x}$ полностью не совпадают.

Выходной сигнал первого слоя поступает на входы M нейронов второго слоя, рекурсивного, весовая матрица W_2 которого имеет вид

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon & .... & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & .... & -\varepsilon \\ .... & .... & .... & .... \\ -\varepsilon & -\varepsilon & .... & 1 \end{vmatrix}, \qquad (7.6)$$

где $\varepsilon < \dfrac{1}{M}$.

Нейроны данного слоя, называемого сетью MAXNET , имеют обратные связи, т.е. слой является рекурсивным. Поэтому выходной сигнал всей сети описывается соотношением

$$y(k)= W_2\, y(k\text{-}1). \qquad (7.7)$$

Таким образом, выходной сигнал первого слоя показывает число битов совпадения предъявляемого образа и хранимого, а выходной сигнал всей сети, появляющийся после нескольких итераций на выходе одного нейрона второго слоя, определяет номер хранимого образа, наименее отличающийся от предъявляемого.

Пример 7.1. Пусть сеть предназначена для хранения двух образов (M=2), т.е. $\mathbf{y} = (y_1 y_2)^T$. Компоненты y_1 и y_2 определяются в соответствии с (7.7)

$$\begin{aligned} y_1(k) &= y_1(k-1) - \varepsilon y_2(k-1); \\ y_2(k) &= y_2(k-1) - \varepsilon y_1(k-1). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Начальные условия определяются из начальных условий вектора выхода первого слоя $\mathbf{y}^T(0) = [y_1(0)\, y_2(0)]$, так как он содержит число битов подобия предъявляемых образцов.

Решение (7.8) имеет вид

$$y_1(k) = \frac{y_1(0) - y_2(0)}{2}(1+\varepsilon)^k + \frac{y_1(0) + y_2(0)}{2}(1-\varepsilon)^k,$$

$$y_2(k) = \frac{y_2(0) - y_1(0)}{2}(1+\varepsilon)^k + \frac{y_2(0) + y_1(0)}{2}(1-\varepsilon)^k.$$

Так как $\varepsilon > 0$, вторые слагаемые обоих уравнений с ростом k стремятся к нулю. Если $y_1(0) > y_2(0)$, т.е. $y_1(0)$ более похож на предъявляемый образ, то $y_1(k) \to \infty$, а $y_1(k) \to -\infty$. Если же $y_1(0) < y_2(0)$, то наоборот. Это справедливо для любого числа образов M.

Таким образом, выход нейрона, входной сигнал которого в наибольшей степени соответствует предъявляемому образу, с ростом времени стремится к бесконечности. Выходы же остальных нейронов стремятся к $-\infty$.

Пример 7.2. Рассмотрим сеть Хэмминга, имеющую три входных нейрона (N=3) и два выходных (M=2), которая обучается на векторах $x_1^* = (1 \;\; 1 \;\; -1)^T$, $x_2^* = (1 \;\; 1 \;\; -1)^T$. Пусть $\varepsilon = 0{,}3$.

Тогда в соответствии с (7.1) матрица весов будет иметь вид

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а компоненты выходного сигнала первого слоя при подаче сигнала x_1^* определяется из (7.3) (с учетом того, что M=2)

$$y(0) = 0{,}5\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

После первой итерации в соответствии с (7.7) на выходе получаем

$$y(1) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}35 \\ -0{,}25 \end{pmatrix},$$

после второй –

$$y(2) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}35 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}425 \\ -0{,}955 \end{pmatrix}$$

и т.д., т.е. первый компонент вектора выходного сигнала y(i) на каждой последующей итерации увеличивается, а второй – уменьшается (см. предыдущий пример).

Аналогично при подаче на вход сети x_2^* будет возрастать второй компонент и уменьшаться первый.

Пусть на вход сети поступает образ $x_3 = (\underline{-1}\ \ -1\ \ -1)^T$, являющийся искаженным x_1^* (бит, в котором произошло искажение, подчеркнут).

Тогда в соответствии с (7.5) на выходе первого слоя появится сигнал

$$\tilde{y}(0) = 0{,}5\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}.$$

После первой итерации в рекурсивном слое получаем

$$\tilde{y}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}95 \\ -1{,}95 \end{pmatrix},$$

после второй –

$$y(2) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}95 \\ -1{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}435 \\ -2{,}435 \end{pmatrix} \text{ и т.д.,}$$

т.е. первый компонент выходного сигнала сети увеличивается, а второй – уменьшается. Следовательно, предьявляемый образ x_3 сеть распознает как x_1^*, т.е. правильно. Отметим также, что расстояния Хэмминга между образом x_3 и образами x_1^* и x_2^* будут равны соответственно $H_1 = 1$ и $H_2 = 2$, т.е. сеть восприняла образ x_3 как запомненный ею образ x_1^*, находящийся от x_3 на минимальном хэмминговом расстоянии.