ФГБОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА_2сем
Часть 4. Распределения дискретных и непрерывных случайных величин и их числовые характеристики.

Бодряков Владимир Юрьевич, д.ф.-м.н., проф.
E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru

Екатеринбург – 2013-2014

Литература и интернет - ресурсы

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие. М.: Академия, 2003. – 448 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 404 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Фазис, 1998. – 144 с.
5. http://e-lib.uspu.ru
6. www.exponenta.ru

Введение. Дискретные и непрерывные случайные величины

- **Определение:** Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает значение − единственное, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.
- Случайные величины (с.в.) принято обозначать большими буквами латинского алфавита (X, Y, Z, …), а значения, ими принимаемые – малыми (x, y, z, …). Например, если с.в. величина X принимает три значения, их обозначают x_1, x_2, x_3.
- **Определение:** Дискретной называют случайную величину (д.с.в.), которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений д.с.в. может быть конечным или счетным.
- **Определение:** Непрерывной называют случайную величину (н.с.в.), которая принимает непрерывный ряд значений из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений н.с.в. бесконечно и несчетно.

§1. Распределения дискретных случайных величин и их числовые характеристики

- **Определение:** Законом распределения дискретной случайной величины (д.с.в.) называют соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями. Такое соответствие может быть задано таблично, аналитически (в виде формулы), графически.

- **Определение:** Дискретным рядом распределения д.с.в. называется таблица, в которой перечислены (как правило, упорядоченно) все возможные значения д.с.в. и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_n	$\Sigma_i P(x_i)$
$P(X)$	p_1	p_2	…	p_n	1

- Прим. Значения д.с.в. не повторяются: $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

- Д.с.в. X принимает с необходимостью одно из множества значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. События $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ образуют полную группу. Поэтому с необходимостью: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

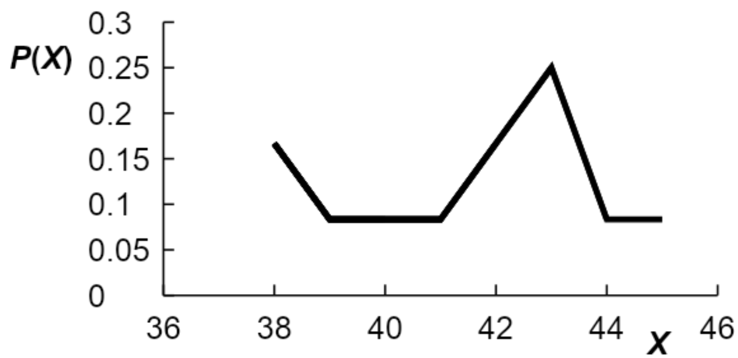
§1. … продолжение

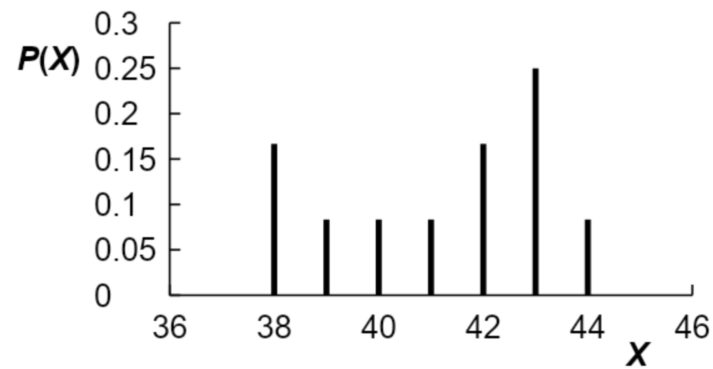
- **Определение:** Многоугольником (полигоном) распределения с.в. называют закон распределения, представленный в графическом виде.

- <u>Пример 3.</u> В магазине в течение часа продано 12 пар обуви размеров 38, 39, 40, 38, 41, 42, 43, 43, 42, 43, 45, 44. Выписать дискретный ряд распределения д.с.в. X – размер проданной пары обуви; построить полигон распределения.

- <u>Решение:</u> Упорядочим перечень проданных размеров по возрастанию: $X = \{38, 38, 39, 40, 41, 42, 42, 43, 43, 43, 44, 45\}$ и сведем в таблицу и рис.

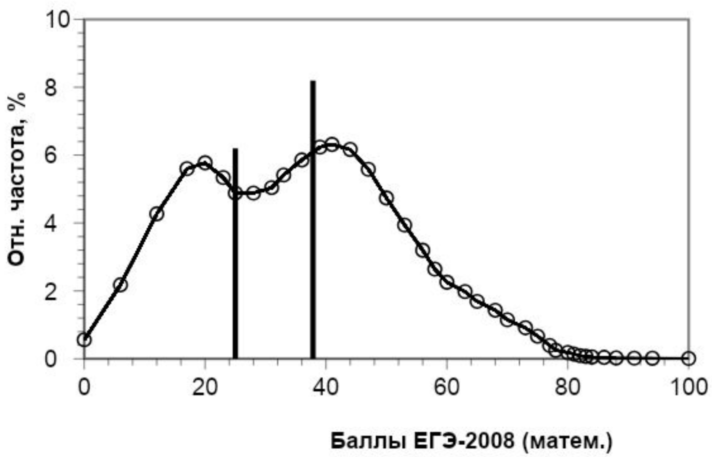
Д.с.в. X	38	39	40	41	42	43	44	45	Σ_i
Частота m	2	1	1	1	2	3	1	1	12
$P(X)$	2/12	1/12	1/12	1/12	2/12	3/12	1/12	1/12	1

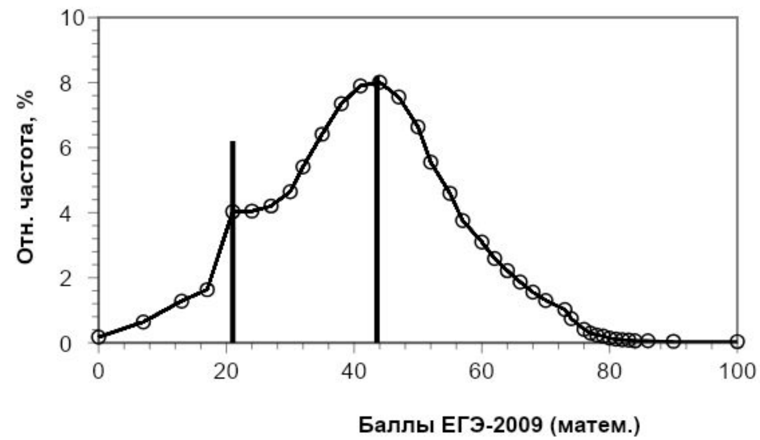
- 



§1. … продолжение

- **Определение:** Модой распределения называют значение x_i, соответствующее максимуму закона (ряда) распределения.
- **Определение:** Если (явно выделяющаяся) мода одна − распределение называют унимодальным; если моды две – бимодальным и т.д.





- Рис. Распределение выпускников школ РФ 2008, 2009 гг. по баллам ЕГЭ по математике. Сплошная вертикальная прямая – среднее значение; пунктир – порог прохождения.

- На рис. представлены распределения выпускников школ РФ по математике 2008, 2009 гг. Распределение 2008 г. бимодально; распределение 2009 гг. унимодально, хотя имеются признаки выделения второй моды. Моды в обоих случаях приходятся на ~ 42 б.

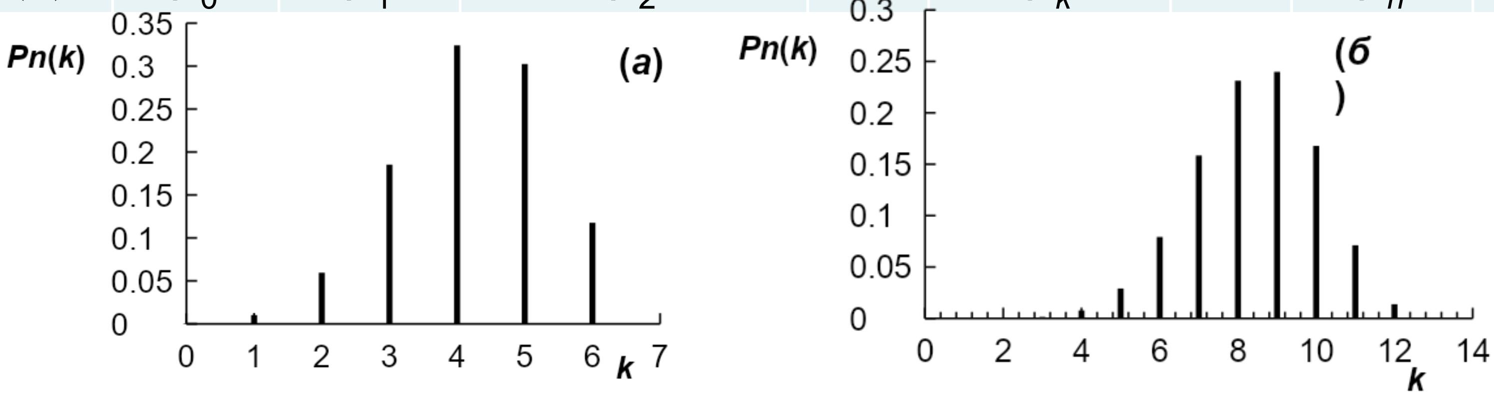
§1. … продолжение. Биномиальное распределение

- **Определение:** *Биномиальным* называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли ($0 \le k \le n$, $q = 1 - p$):

  - $$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

- В табличном виде ряд биномиального распределения есть:

X	x_0	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n	Σ_i
$X = k$	0	1	2	…	k	…	n	–
$P_n(k)$	q^n	npq^{n-1}	$½n(n-1)p^2q^{n-2}$	…	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	…	p^n	1
$P(X)$	p_0	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n	1



- Рис. Биномиальное распределение для $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$: (а) число испытаний $n = 6$; (б) $n = 12$.

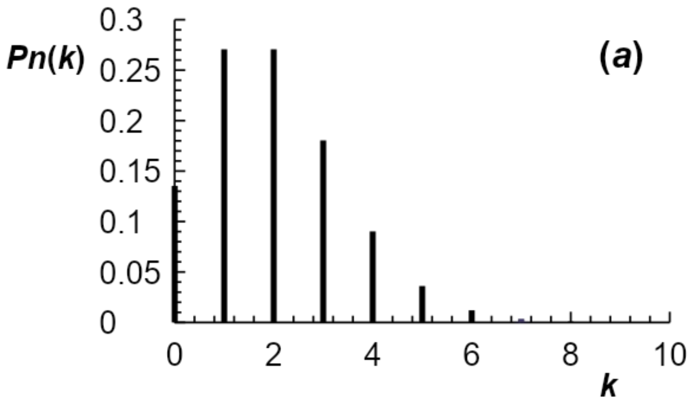
§1. … продолжение. Распределение Пуассона

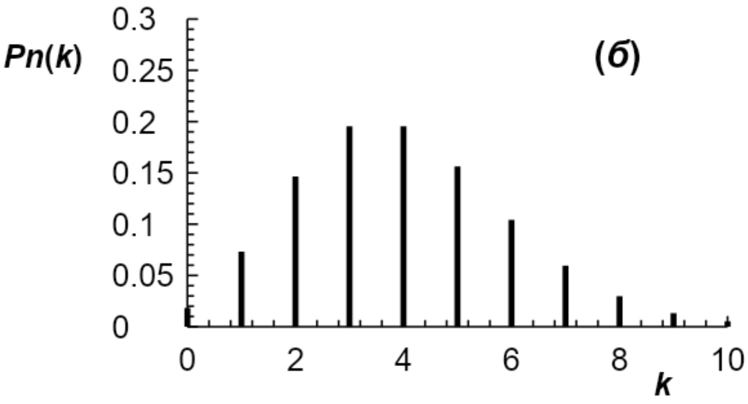
- **Определение:** *Распределением Пуассона* называют распределение вероятностей, определяемое формулой Пуассона ($n \cdot p = \lambda = \mathrm{Const}$):

  - $P_n(k) = (\lambda^k/k!) \cdot e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots$

- В табличном виде ряд распределения Пуассона есть:

$X = k$	0	1	2	…	k	…	Σ_i
$P_n(k)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$(\lambda^2/2) \cdot e^{-\lambda}$	…	$(\lambda^k/k!) \cdot e^{-\lambda}$	…	1





- Рис. Распределение Пуассона для $p = 0{,}02$; $q = 0{,}98$: (а) число испытаний $n = 100$; (б) $n = 200$.

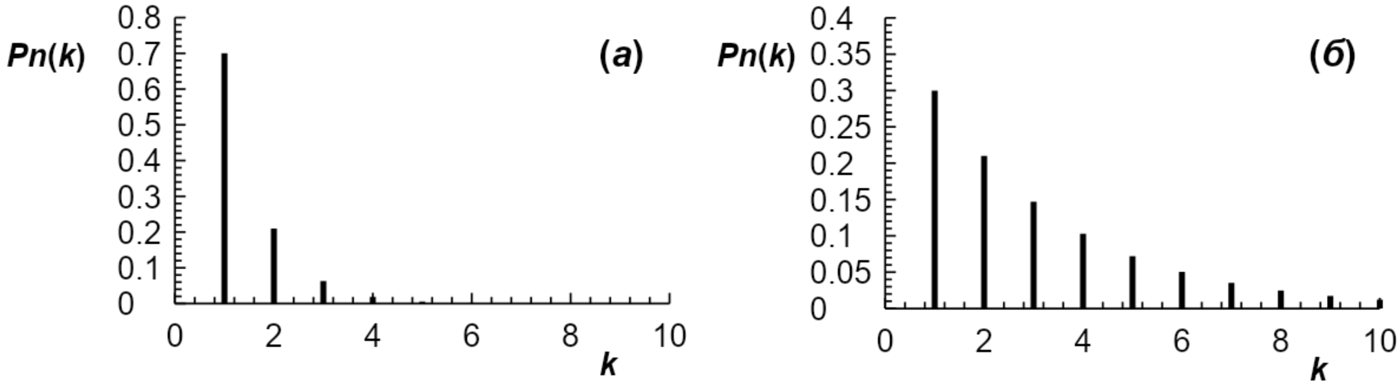
§1. … продолжение. Геометрическое распределение

- **Определение:** *Геометрическим распределением* называют распределение вероятностей, определяемое формулой:

  - $P(k) = p \cdot q^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots$

- В табличном виде ряд геометрического распределения есть:

$X = k$	1	2	…	k	…	Σ_i
$P_n(k)$	p	pq	…	$p \cdot q^{k-1}$	…	1



- Рис. Геометрическое распределение для: (а) $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$; (б) $p = 0{,}3$; $q = 0{,}7$.

§1. … продолжение. Числовые характеристики распределения дискретной случайной величины

- **Определение:** Числовыми характеристиками (распределения) случайной величины называется набор чисел, обобщенно характеризующих закон распределения этой с.в. (мода, математическое ожидание, дисперсия, СКО и др.)
- **Определение:** Математическим ожиданием дискретной случайной величины (д.с.в.) X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:
    - $M(X) = \Sigma_i x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots. + x_n \cdot p_n.$
- <u>Пример 4.</u> Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.
- <u>Решение:</u> Закон распределения д.с.в. X – число выпавших очков при бросании игральной кости является равномерным:

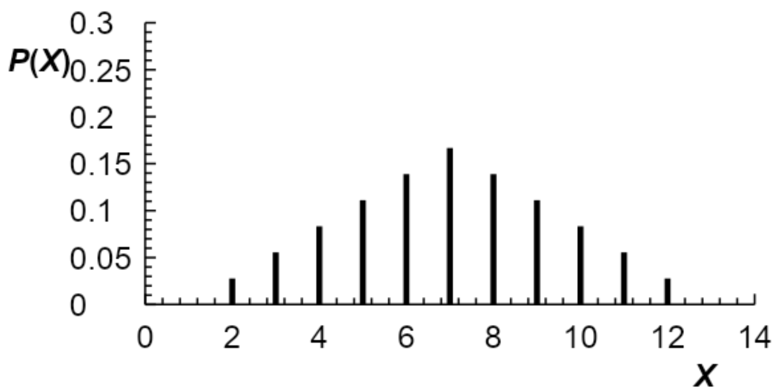
X	1	2	3	4	5	6	Σ_i
$P(X)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

- Математическое ожидание д.с.в. X равно:
    - $M(X) = \Sigma_i x_i \cdot p_i = 1 \cdot \square + 2 \cdot \square + 3 \cdot \square + 4 \cdot \square + 5 \cdot \square + 6 \cdot \square = 3{,}5.$
- <u>Ответ:</u> $M(X) = 3{,}5.$

§1. … продолжение. Числовые характеристики распределения дискретной случайной величины

- Пример 5. Найти математическое ожидание суммы очков, выпадающих при бросании пары игральных костей.
- Решение: Закон распределения д.с.в. X – сумма выпавших очков при бросании пары игральных костей является треугольным (см. табл. и рис.):

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ_i
$P(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	7/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1



- Математическое ожидание д.с.в. X равно:
- $M(X) = \Sigma_i\, x_i \cdot p_i = (1/36) \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 7.$
- Ответ: $M(X) = 7$.

§1. … продолжение. Свойства математического ожидания

- **Вероятностно-статистический смысл математического ожидания.**
- Пусть произведено n испытаний, в которых д.с.в. X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, …, m_k раз значение x_k; при этом:
  - $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$
- **Определение:** Средним арифметическим $X_{\text{ср}}$ д.с.в. X называют величину:
  - $X_{\text{ср}} = \square\{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots + x_k \cdot m_k\},$
- или
  - $X_{\text{ср}} = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots + x_k \cdot w_k,$
- где относительные частоты есть $w_1 = m_1/n$; $w_2 = m_2/n$; …; $w_k = m_k/n$.
- При большом числе испытаний ($n \to \infty$) относительные частоты стремятся к соответствующим вероятностям (закон больших чисел): $w_1 \to p_1$; $w_2 \to p_2$; …; $w_k \to p_k$. Поэтому при больших n:
  - $X_{\text{ср}} \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k = M(X).$
- **Утверждение.** Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше n) среднему арифметическому наблюдаемых значений д.с.в. В этом и состоит вероятностно – статистический смысл математического ожидания.

§1. … продолжение. Свойства математического ожидания

- **Свойство 1.** Математическое ожидание (М.О.) постоянной величины равно самой этой постоянной:
  - $M(C) = C.$
- Док-во: *СРС*.
- **Свойство 2.** Постоянный множитель можно выносить за знак М.О.:
  - $M(CX) = CM(X).$
- Док-во: *СРС*.
- **Свойство 3.** М.О. произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:
  - $M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$
- Док-во: *СРС*.
- **Свойство 4.** М.О. суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:
  - $M(X + Y) = M(X) + M(Y).$
- Док-во: *СРС*.

§1. … продолжение. Свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения (СКО)

- **Определение:** Отклонением называют разность между с.в. X и ее математическим ожиданием $M(X)$:
  - $\Delta X = X - M(X).$
- Для отклонения ΔX закон распределения имеет вид:

ΔX	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$	Σ_i
$P(\Delta X)$	p_1	p_2	…	p_n	1

- <u>Прим.</u> Величину $\Delta X = X - M(X)$ также называют центрированной величиной.

- **Теорема.** Математическое ожидание отклонения равно нулю:
  - $M(\Delta X) = M(X - M(X)).$
- <u>Док-во:</u> *СРС*.
- **Определение:** Дисперсией (рассеянием) $D(X)$ случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:
  - $D(X) = M(\Delta X^2) = M((X - M(X))^2).$

§1. … продолжение. Свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения (СКО)

- Для квадрата отклонения ΔX^2 закон распределения имеет вид:

ΔX^2	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	…	$(x_n - M(X))^2$	Σ_i
$P(\Delta X^2)$	p_1	p_2	…	p_n	1

- Дисперсия $D(X)$ с.в. может быть найдена по формуле:
- $D(X) = M((X - M(X))^2) =$
  - $= p_1 \cdot (x_1 - M(X))^2 + p_2 \cdot (x_2 - M(X))^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - M(X))^2.$

- **Теорема (формула вычисления дисперсии).** Дисперсия равна разности между М.О. квадрата с.в. X и квадратом ее математического ожидания:
  - $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = M(X^2) - M^2(X).$
- Док-во: Для доказательства достаточно выписать цепочку равенств, следующую из свойств математического ожидания:
- $D(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - M^2(X)$, ч.т.д.

§1. … продолжение. Свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения (СКО)

- **Свойство 1.** Дисперсия постоянной величины равна нулю:
  - $D(C) = 0.$
- Док-во: *СРС*.
- **Свойство 2.** Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:
  - $D(CX) = C^2 \cdot D(X).$
- Док-во: Достаточно применить формулу вычисления дисперсии:
- $D(CX) = M((CX)^2) - (M(CX))^2 = M(C^2X^2) - (CM(X))^2 =$
  - $= C^2 \cdot M(X^2) - C^2 \cdot (M(X))^2 = C^2 \cdot [M(X^2) - M^2(X)] = C^2 \cdot D(X),$ **ч.т.д.**
- **Свойство 3.** Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:
  - $D(X + Y) = D(X) + D(Y).$
- Док-во: По определению дисперсии:
- $D(X+Y) = M((X+Y)^2) - (M(X+Y))^2 = M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 =$ $= M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2) - M^2(X) + 2M(X) \cdot M(Y) + M^2(Y) = D(X) + D(Y),$ ч.т.д.

§1. … продолжение. Свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения (СКО)

- **Свойство 4.** Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:
  - $D(X - Y) = D(X) + D(Y).$
- Док-во: По доказанным свойствам дисперсии:
- $D(X - Y) = D(X + (-1) \cdot Y) = D(X) + D((-1) \cdot Y)) = D(X) + D((-1) \cdot Y)) =$
  - $= D(X) + (-1)^2 \cdot D(Y)) = D(X) + D(Y),$ ч.т.д.
- Замечание: Дисперсия как мера разброса значений с.в. X не слишком удобна, т.к. имеет размерность квадрата с.в. С этой точки зрения более удобна величина, называемая средним квадратичным (квадратическим) отклонением (СКО); в западной терминологии СКО называют также стандартным отклонением.
- **Определение:** Средним квадратичным отклонением (СКО) случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии этой с.в.:
  - $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$
- Замечание: Свойства СКО $\sigma(X)$ непосредственно вытекают из соответствующих свойств дисперсии $D(X)$ случайной величины X.

§1. … продолжение. Свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения (СКО)

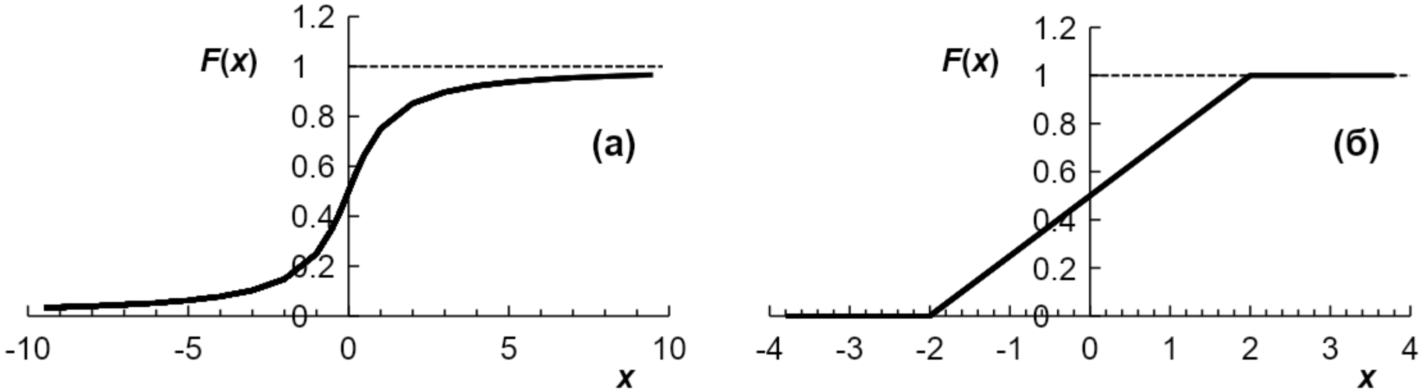
- **Теорема.** Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов СКО этих величин:
  - $\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{}\{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)\}$.
- <u>Док-во:</u> По доказанным свойствам дисперсии:
- $\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{}D(X_1 + X_2 + ... + X_n) =$
  - $= \sqrt{}\{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)\} = \sqrt{}\{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)\}$, <u>ч.т.д.</u>
- **Теорема.** Пусть имеется система из n независимых д.с.в. X_1, X_2, ..., X_n, которые имеют одинаковые распределения, т.е. равные М.О., дисперсии и СКО: $a(X_1) = a(X_2) = ... = a(X_n) = a$; $D(X_1) = D(X_2) = ... = D(X_n) = \sigma^2$; $\sigma(X_1) = \sigma(X_2) = ... = \sigma(X_n) = \sigma$. Тогда М.О., дисперсия и СКО среднего арифметического этих с.в., соответственно, равны:
  - $M(X_{\text{ср}}) = M[\square(X_1 + X_2 + ... + X_n)] = a$;
  - $D(X_{\text{ср}}) = D[\square(X_1 + X_2 + ... + X_n)] = \square\ \sigma^2$;
  - $\sigma(X_{\text{ср}}) = \sigma[\square(X_1 + X_2 + ... + X_n)] = \sigma/\sqrt{}n$.
- <u>Док-во:</u> *СРС*.

§2. Распределения непрерывных случайных величин и их числовые характеристики

- **Определение:** (Интегральной) функцией распределения называют функцию $F(X)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значения, меньшее x, т.е.
  - $F(X) = P(X < x)$.
- **Определение:** Непрерывной называют случайную величину (н.с.в.) функция распределения которой является непрерывной, кусочно-гладкой функцией с кусочно-непрерывной производной.
- **Свойство 1.** Значения функции распределения принадлежат промежутку [0; 1], т.е. $F(x)$ изменяется в диапазоне $0 \le F(x) \le 1$.
- Док-во: *СРС*.
- **Свойство 2.** Функции распределения является $F(x)$ неубывающей:
  - $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 \le x_2$.
- Док-во: *СРС*.
- **Следствие 1.** Вероятность того, что с.в. X примет значения $X \in [a; b]$:
  - $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.
- **Следствие 2.** Вероятность того, что с.в. X примет конкретное фиксированное значение $X = a$ равна нулю.

§2. Продолжение …

- **Свойство 3.** Если возможные значения случайной величины принадлежат промежутку $(a; b)$, то
    - $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$.
- Док-во: *СРС*.
- **Определение:** Графиком функции распределения называется представленная на координатной плоскости x-0-$F(x)$ зависимость $F(x)$ (в качестве примера см. рис.):



- Рис. Функция распределения: (а) $F(x) = ½ + (1/\pi) \cdot \mathrm{arctg}(x)$; (б) $F(x) = ½ + ¼ \cdot x$, $x \in [-2; 2]$.

- Прим. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид; в этом случае так же, как и для н.с.в., $0 \le F(x) \le 1$.

§2. Продолжение …

- **Определение.** Плотностью функции распределения (ПФР) вероятностей (дифференциальной функцией распределения) функцию $f(x)$ − первую производную интегральной функции $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

- **Следствие.** По плотности распределения $f(x)$ путем интегрирования можно восстановить функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

- <u>Прим.</u> Для дискретной случайной величины понятие плотности функции распределения $f(x)$ не определено.
- **Теорема.** Вероятность того, что н.с.в. X примет значения $X \in [a; b)$ может быть найдена интегрированием от a до b:

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

- <u>Прим.</u> Геометрически это соответствует нахождению площади под графиком ПФР $f(x)$ на промежутке $[a; b)$.

§2. Продолжение …

- **Определение:** График ПФР $f(x)$ называют кривой распределения (вероятностей).
- Сформулируем свойства плотности функции распределения $f(x)$.
- **Свойство 1.** Плотность функции распределения $f(x)$ неотрицательная функция.
- Док-во: Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция. Поэтому ее производная $F'(x)$ неотрицательна, ч.т.д.
- **Свойство 2.** Несобственный интеграл от плотности распределения $f(x)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

- **Свойство 3 (вероятностный смысл плотности распределения).** Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(x;\, x+dx)$, равна произведению плотности вероятности $f(x)$ в точке x на ширину этого интервала dx:

$$dP(X) = F(x+dx) - F(x) = f(x)dx.$$

§2. Продолжение …

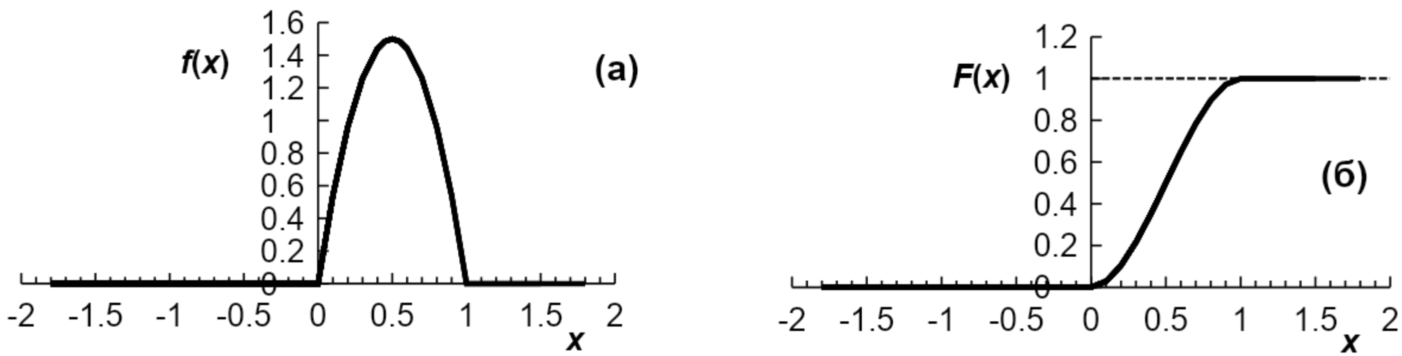
- <u>Пример 6.</u> Плотность распределения н.с.в. задана функцией
    - $f(x) = C \cdot x \cdot (x - 1)$ при $x \in [0;\, 1)$, $f(x) = 0$ при $x \notin [0;\, 1)$.
- Требуется: нормировать плотность функции распределения $f(x)$; найти функцию распределения $F(x)$; найти вероятность того, что с.в. примет значения из интервала (¼; ½). Построить графики $f(x)$, $F(x)$.
- <u>Решение:</u> Неизвестную постоянную (нормировочную константу) C определим из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

- В данном случае, $\int_0^1 Cx(1 - x)dx = C \cdot [\int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2 dx] =$
- $= C \cdot [\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3]_0^1 = \frac{1}{6}C = 1$, откуда $C = 6$, так что, окончательно, ПФР
    - $f(x) = 6 \cdot x \cdot (x - 1)$ при $x \in [0;\, 1)$, $f(x) = 0$ при $x \notin [0;\, 1)$.
- Функцию распределения $F(x)$ найдем интегрированием:
- $F(x) = 6\int_0^x x(1 - x)dx = 6 \cdot [\int_0^x xdx - \int_0^x x^2 dx] = 6 \cdot [\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3]_0^x =$
- $= 6x^2 \cdot [\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot x] = x^2 \cdot [3 - 2x]$, при $x \in [0;\, 1)$; $F(x) = 0$ при $x < 0$; $F(x) = 1$ при $x \geq 1$.

§2. Продолжение …

- Пример 6. Продолжение решения …
- Вероятность того, что с.в. примет значения из интервала (¼; ½) найдем с помощью (интегральной) функции распределения $F(x)$:
- $P(¼ < x < ½) = F(½) - F(¼) = (½)^2 \cdot [3 - 2 \cdot ½] - (¼)^2 \cdot [3 - 2 \cdot ¼] = 11/32$.
- Графики функций $f(x)$, $F(x)$ представлены на рис.



- Рис. Плотность функции распределения: (а) $f(x) = 6x \cdot (x - 1)$ при $x \in [0; 1)$. Функция распределения (б) $F(x) = x^2 \cdot [3 - 2x]$ при $x \in [0; 1)$.

- Ответ: Плотность распределения $f(x) = 6x \cdot (x - 1)$ при $x \in [0; 1)$, $f(x) = 0$ при $x \notin [0; 1)$. Функция распределения $F(x) = x^2 \cdot [3 - 2x]$ при $x \in [0; 1)$; $F(x) = 0$ при $x < 0$; $F(x) = 1$ при $x \geq 1$. Вероятность $P(¼ < x < ½) = 11/32$.

§2. Продолжение …

- Обобщим данные выше определения числовых характеристик распределения случайной величины на случай н.с.в.
- **Определение:** Математическим ожиданием $M(X)$ непрерывной случайной величины X, называют величину интеграла:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

- **Определение:** Дисперсией $D(X)$ н.с.в. X, называют величину:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx.$$

- **Определение:** Средним квадратичным (стандартным) отклонением (СКО) $\sigma(X)$ н.с.в. X, называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

- **Замечание:** Если фактическим диапазоном изменения ПФР $f(X)$ является промежуток $(a; b)$, т.е. $f(x)$ отлично от тождественного нуля при $x \in (a; b)$, то несобственные интегралы в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ в определениях $M(X)$ и $D(X)$ могут быть заменены определенными интегралами в пределах от a до b.

§2. Продолжение …

- **Теорема (формула вычисления дисперсии н.с.в.).** Дисперсия $D(X)$ н. с.в. X может быть найдена по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

- где математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

- <u>Док-во:</u> Доказательство утверждения осуществляется путем цепочки преобразований, следующих непосредственно из определения дисперсии н.с.в.:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2 - 2xM(X) + M^2(X)] \cdot f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - 2 \cdot M(X) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx + M^2(X) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X) =$$

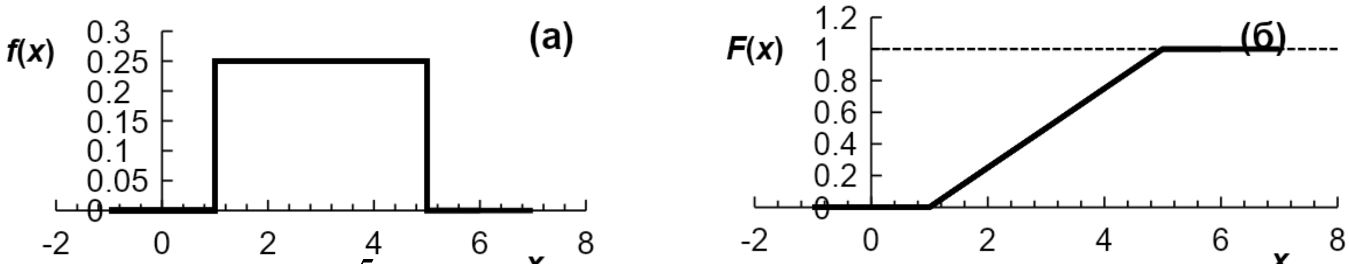
$$= M(X^2) - M^2(X),$$ <u>**ч.т.д.**</u>

§2. Продолжение …

- **Определение:** Равномерным на промежутке (a; b) называется распределение вероятностей, заданное ПФР $f(X)$ вида:
  - $f(x) = C = Const$ при $x \in (a; b)$, $f(x) \equiv 0$ при $x \notin (a; b)$.
- Найдем числовые характеристики равномерно распределенной с.в. X.
- − Нормировка:
- $+\infty$ b
- $\int f(x)dx = \int Cdx = C \cdot (b - a) = 1,$ откуда $C = 1/(b - a)$.
- $-\infty$ a
- − Математическое ожидание:
- $+\infty$ b
- $M(X) = \int x \cdot f(x)dx = [1/(b-a)] \int xdx = ½\,(b^2 - a^2)/(b - a) = ½\,(b + a)$.
- $-\infty$ a
- − Дисперсия:
- $+\infty$ b
- $D(X) = \int x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X) = [1/(b-a)] \int x^2dx - [½\,(b + a)]^2 =$
- $-\infty$ a
  - $= ⅓\,(b^3 - a^3)/(b - a) - ¼\,(b + a)^2 =$ □ $(b - a)^2$.
- − СКО: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = (b - a)/2\sqrt{3}$.

§2. Продолжение …

- <u>Пример 7.</u> Найти числовые характеристики н.с.в. X, равномерно распределенной в промежутке от $a = 1$ до $b = 5$.
- <u>Решение:</u> Нормируем ПФР для равномерного на (1; 5) распределения:
- $$\int_1^5 C\,dx = C\cdot(5-1) = 4C = 1,$$ откуда $C = ¼$.
- Так что ПФР $f(x) = ¼$ при $x \in (1;5)$ и $f(x) \equiv 0$ при $x \notin (1;5)$ (см. рис.).
- Функция распределения $F(X)$ равна $F(x) = ¼\cdot(x-1)$ при $x \in (1;5)$.



- Математическое ожидание: $$M(X) = ¼\int_1^5 x\,dx = ¼\cdot½\cdot(5^2-1^2) = 3.$$
- Дисперсия: $$D(X) = ¼\int_1^5 x^2dx - M^2(X) = ¼\cdot⅓\cdot(5^3-1^3) - 3 = 7\square.$$
- СКО: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{22/3} \approx 2{,}708.$

§2. … продолжение

- Историческая справка:
- **Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс**
- (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*; 30 апреля 1777,
- Брауншвейг − 23 февраля 1855 г., Геттинген −
- Немецкий математик, астроном и физик,
- считается одним из величайших математиков
- всех времён, «королём математиков».

Дед Гаусса был бедным крестьянином, отец — садовником, каменщиком, смотрителем каналов в герцогстве Брауншвейг. Уже в двухлетнем возрасте мальчик показал себя вундеркиндом. В три года он умел читать и писать, даже исправлял счётные ошибки отца. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы: 1+100=101, 2+99=101 и т. д., и мгновенно получил результат 101 × 50 = 5050. До самой старости он привык большую часть вычислений производить в уме.

С учителем ему повезло: М. Бартельс (впоследствии учитель Лобачевского) оценил исключительный талант юного Гаусса и сумел выхлопотать ему стипендию от герцога Брауншвейгского. Это помогло Гауссу закончить колледж Collegium Carolinum в Брауншвейге (1792—1795).

§2. … продолжение

- Историческая справка: Карл Гаусс (продолжение)

Свободно владея множеством языков, Гаусс некоторое время колебался в выборе между филологией и математикой, но предпочёл последнюю. Он очень любил латинский язык и значительную часть своих трудов написал на латыни; любил английскую, французскую и русскую литературу. В возрасте 62 лет Гаусс начал изучать русский язык, чтобы ознакомиться с трудами Лобачевского, и вполне преуспел в этом деле.

В колледже Гаусс изучил труды Ньютона, Эйлера, Лагранжа. Уже там он сделал несколько открытий в теории чисел, в том числе доказал закон взаимности квадратичных вычетов. Лежандр, правда, открыл этот важнейший закон раньше, но строго доказать не сумел; Эйлеру это также не удалось. Кроме этого, Гаусс создал «метод наименьших квадратов» (тоже независимо открытый Лежандром) и начал исследования в области «нормального распределения ошибок».

С 1795 по 1798 год Гаусс учился в Гёттингенском университете. Это наиболее плодотворный период в жизни Гаусса.

1796 год: Гаусс доказал возможность построения с помощью циркуля и линейки правильного семнадцатиугольника. Более того, он разрешил проблему построения правильных многоугольников до конца и нашёл критерий возможности построения правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки: если n — простое число, то оно должно быть вида $2^{2^k} + 1$ (числом Ферма). Этим открытием Гаусс очень дорожил и завещал изобразить на его могиле правильный 17-угольник, вписанный в круг.

С 1796 года Гаусс ведёт краткий дневник своих открытий. Многое он, подобно Ньютону, не публиковал, хотя это были результаты исключительной важности (эллиптические функции, неевклидова геометрия и др.). Своим друзьям он пояснял, что публикует только те результаты, которыми доволен и считает завершёнными. Многие отложенные или заброшенные им идеи позже воскресли в трудах Абеля, Якоби, Коши, Лобачевского и др. Кватернионы он тоже открыл за 30 лет до Гамильтона (назвав их «мутациями»).

Все многочисленные опубликованные труды Гаусса содержат значительные результаты, сырых и проходных работ не было ни одной.

§2. … продолжение

- Историческая справка: Карл Гаусс (продолжение)

1798 год: закончен шедевр «Арифметические исследования» (лат. Disquisitiones Arithmeticae), напечатана только в 1801 году.

В этом труде подробно излагается теория сравнений в современных (введенных им) обозначениях, решаются сравнения произвольного порядка, глубоко исследуются квадратичные формы, комплексные корни из единицы используются для построения правильных n-угольников, изложены свойства квадратичных вычетов, приведено его доказательство квадратичного закона взаимности и т. д. Гаусс любил говорить, что математика — царица наук, а теория чисел — царица математики.

1798—1816 годы

В 1798 году Гаусс вернулся в Брауншвейг и жил там до 1807 года. Герцог продолжал опекать молодого гения. Он оплатил печать его докторской диссертации (1799) и пожаловал неплохую стипендию. В своей докторской Гаусс впервые доказал основную теорему алгебры. До Гаусса было много попыток это доказать, наиболее близко к цели подошёл Д'Аламбер. Гаусс неоднократно возвращался к этой теореме и дал 4 различных доказательства её.

С 1799 года Гаусс — приват-доцент Брауншвейгского университета.

1801 год: избирается членом-корреспондентом Петербургской Академии наук.

После 1801 года Гаусс, не порывая с теорией чисел, расширил круг своих интересов, включив в него и естественные науки. Катализатором послужило открытие малой планеты Церера (1801), вскоре после наблюдений потерянной. 24-летний Гаусс проделал (за несколько часов) сложнейшие вычисления по новому, открытому им же методу, и указал место, где искать беглянку; там она, к общему восторгу, и была вскоре обнаружена.

Слава Гаусса становится общеевропейской. Многие научные общества Европы избирают Гаусса своим членом, герцог увеличивает пособие, а интерес Гаусса к астрономии ещё более возрастает.

.

§2. … продолжение

- Историческая справка: Карл Гаусс (продолжение)

1805 год: Гаусс женился на Иоганне Остгоф. У них было трое детей.

1806 год: от раны, полученной на войне с Наполеоном, умирает его великодушный покровитель-герцог. Несколько стран наперебой приглашают Гаусса на службу (в том числе в Петербург). По рекомендации Александра фон Гумбольдта Гаусса назначают профессором в Гёттингене и директором Гёттингенской обсерватории. Эту должность он занимал до самой смерти.

1807 год: наполеоновские войска занимают Гёттинген. Все граждане облагаются контрибуцией, в том числе огромную сумму — 2000 франков — требуется заплатить Гауссу. Ольберс и Лаплас тут же приходят ему на помощь, но Гаусс отклонил их деньги; тогда неизвестный из Франкфурта прислал ему 1000 гульденов, и этот дар пришлось принять. Только много позднее узнали, что неизвестным был курфюрст Майнцский, друг Гёте.

1809 год: новый шедевр, «Теория движения небесных тел». Изложена каноническая теория учёта возмущений орбит. Как раз в четвёртую годовщину свадьбы умирает Иоганна, вскоре после рождения третьего ребёнка. В Германии разруха и анархия. Это самые тяжёлые годы для Гаусса.

1810 год: новая женитьба, на Минне Вальдек, подруге Иоганны. Число детей Гаусса вскоре увеличивается до шести.

1810 год: новые почести. Гаусс получает премию Парижской академии наук и золотую медаль Лондонского королевского общества.

1811 год: появляется новая комета. Гаусс быстро и очень точно рассчитывает её орбиту. Начинает работу над комплексным анализом, открывает (но не публикует) теорему, позже переоткрытую Коши и Вейерштрассом: интеграл от аналитической функции по замкнутому контуру равен нулю.

1812 год: исследование гипергеометрического ряда, обобщающего разложение практически всех известных тогда функций. Знаменитую комету «пожара Москвы» (1812) всюду наблюдают, пользуясь вычислениями Гаусса.

1815 год: публикует первое строгое доказательство основной теоремы алгебры.

.

§2. … продолжение

- Историческая справка: Карл Гаусс (продолжение)

1816—1855 годы1821 год: в связи с работами по геодезии Гаусс начинает исторический цикл работ по теории поверхностей. В науку входит «гауссова кривизна». Положено начало дифференциальной геометрии. Именно результаты Гаусса вдохновили Римана на его классическую диссертацию о «римановой геометрии».

Итогом изысканий Гаусса была работа «Исследования относительно кривых поверхностей» (1822). В ней свободно используются общие криволинейные координаты на поверхности. Гаусс далеко развил метод конформного отображения, которое в картографии сохраняет углы (но искажает расстояния); оно применяется также в аэро/гидродинамике и электростатике.

1824 год: избирается иностранным членом Петербургской Академии наук.

Гаусс в 1828 г.1825 год: открывает гауссовы комплексные целые числа, строит для них теорию делимости и сравнений. Успешно применяет их для решения сравнений высоких степеней.

Гаусс и Вебер. Скульптура в Гёттингене.1831 год: умирает вторая жена, у Гаусса начинается тяжелейшая бессонница. В Геттинген приезжает приглашённый по инициативе Гаусса 27-летний талантливый физик Вильгельм Вебер, с которым Гаусс познакомился в 1828 году, в гостях у Гумбольдта. Оба энтузиаста науки сдружились, несмотря на разницу в возрасте, и начинают цикл исследований электромагнетизма.

1832 год: «Теория биквадратичных вычетов». С помощью тех же целых комплексных гауссовых чисел доказываются важные арифметические теоремы не только для комплексных, но и для вещественных чисел. Здесь же он приводит геометрическую интерпретацию комплексных чисел, которая с этого момента становится общепринятой.

1833 год: Гаусс изобретает электрический телеграф и (вместе с Вебером) строит его действующую модель.

1837 год: Вебера увольняют за отказ принести присягу новому королю Ганновера. Гаусс вновь остался в одиночестве.

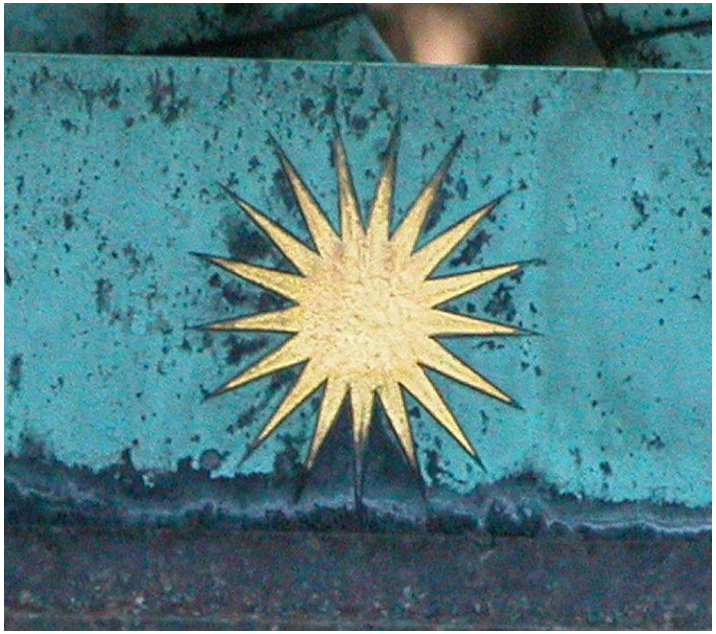
§2. … продолжение

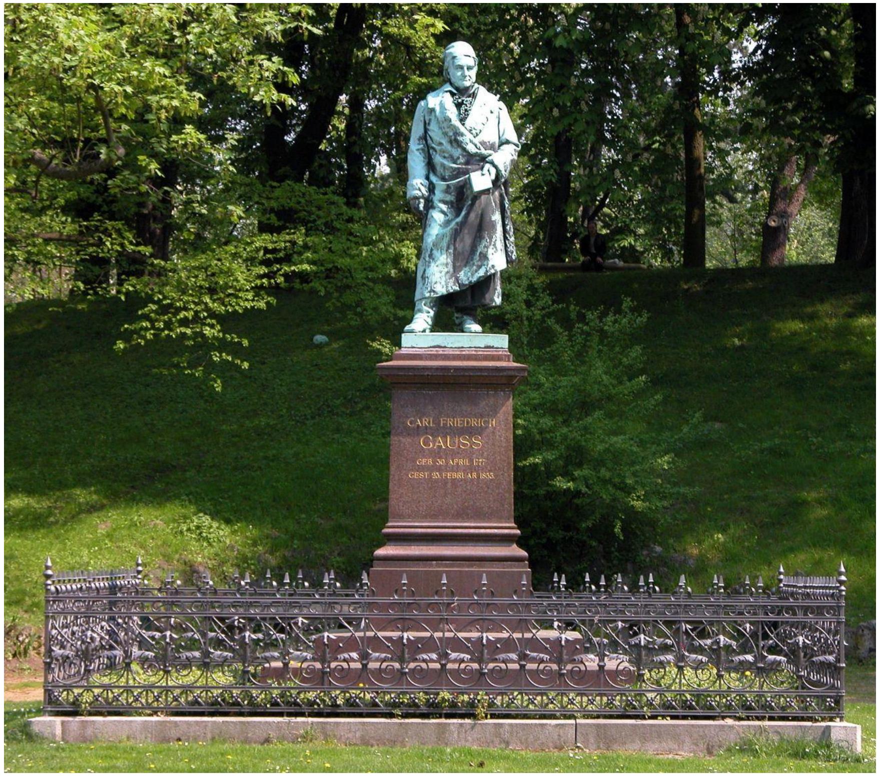
- Историческая справка: Карл Гаусс (продолжение)

1839 год: 62-летний Гаусс овладевает русским языком и в письмах в Петербургскую Академию просил прислать ему русские журналы и книги, в частности «Капитанскую дочку» Пушкина. Предполагают, что это связано с работами Лобачевского. В 1842 году по рекомендации Гаусса Лобачевский избирается иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского общества.

Умер Гаусс 23 февраля 1855 года в Гёттингене.

Современники вспоминают Гаусса как жизнерадостного, дружелюбного человека, с отличным чувством юмора.





Спасибо за внимание! Данный раздел закончен.

Ваши вопросы, замечания, предложения …