Тема 2. «Определители. Способы их вычисления.»

Основные понятия:

- **Понятие** определителя
- Вычисление определителей **1-го**Вычисление определителей 1-го, **2-го**Вычисление определителей 1-го, 2-го и **3-го** порядков
- **Миноры**Миноры и **алгебраические дополнения**
- Теорема Лапласа (вычисление определителя **n-го** порядка)
- Разложение определителя по **строке** (**столбцу**)
- **Свойства** определителей

<u>Определение</u>: Любой **квадратной** матрице n-го порядка ставится в соответствие по определенному закону некоторое действительное число, называемое **определителем** или **детерминантом** n-го порядка.

Обозначение:

$$|\grave{A}|, \quad \Delta, \quad \det A, \quad \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \dots & \grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \dots & \grave{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \grave{a}_{n1} & \grave{a}_{n2} & \dots & \grave{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

назад

Вычисление определителя 1-го порядка:

$$\grave{A} = (a_{11})$$

$$\det A = \Delta = |A| = a_{11}$$

<u>Пример 1</u>.

1) $\grave{A} = (0) \Rightarrow \det A = \Delta = |A| = 0$

2) $\grave{A} = (7) \Rightarrow \det A = \Delta = |A| = 7$

3) $\grave{A} = (-2009) \Rightarrow \det A = \Delta = |A| = -2009$

4) $\grave{A} = (x) \Rightarrow \det A = \Delta = |A| = x$

назад

Вычисление определителя 2-го порядка:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

<u>Пример 2</u>.

Вычислить определители следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2i^{13} & -i^{5} \\ -i^{73} & -i \end{pmatrix}$

<u>Ответ</u>

<u>назад</u>

Ответы (Пример 2):

1) $$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 0 \cdot (-4) = 10$$

2) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

3) $$\begin{vmatrix} 2i^{13} & -i^5 \\ -i^{73} & -i \end{vmatrix} = -2i^{14} - i^{78} =$$

$$= -2\left(i^4\right)^3 \cdot i^2 - \left(i^4\right)^{19} \cdot i^2 = 3$$

назад

Вычисление определителя 3-го порядка (правило треугольника или правило Саррюса):

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Пример 3.

назад

Пример 3.

Вычислить определители следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

Ответ

назад

Ответ (Пример 3):

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1)+3\cdot 4\cdot(-2)+(-3)\cdot 2\cdot(-4)-$$

$$-3\cdot 0\cdot(-3)-1\cdot(-4)\cdot(-2)-(-1)\cdot 2\cdot 4=0$$

2)

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3-4a$$

назад

Рассмотрим определитель *n*-го порядка.

Выделим в нем какой-либо элемент a_{ij} и вычеркнем *i*-ю строку и *j*-ый столбец.

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \dots & \grave{a}_{1j} & \dots & \grave{a}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \grave{a}_{i1} & \dots & \grave{a}_{ij} & \dots & \grave{a}_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \grave{a}_{n1} & \dots & \grave{a}_{nj} & \dots & \grave{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

Полученный определитель (*n*-1)-го порядка называется **минором** M_{ij}

Пример 4.

назад

Пример 4.

Вычислить миноры для всех элементов матриц:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ

назад

Ответ (Пример 4):

1) $M_{11} = |7| = 7, \quad M_{12} = |0| = 0,$

$M_{21} = |2| = 2, \quad M_{22} = |-1| = -1.$

2) $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -16,$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4,$

$M_{22} = 8, \quad M_{23} = 4, \quad M_{31} = -8,$

$M_{32} = -16, \quad M_{33} = -8.$

назад

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

<u>Пример 5</u>. Найти алгебраические дополнения для всех элементов матриц

1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Ответ</u>

<u>назад</u>

Ответ (Пример 5):

1)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 7, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -2, \quad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -1.$$

2)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -8,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 16,$$

$$A_{13} = -8, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 8, \quad A_{23} = -4,$$

$$A_{31} = -8, \quad A_{32} = 16, \quad A_{33} = -8.$$

назад

Вычисление определителя *n*-го порядка

<u>Теорема Лапласа</u>. Выберем в определителе *n*-го порядка произвольно *k* строк (или *k* столбцов), $1 \le k \le n-1$

Тогда значение определителя n-го порядка есть сумма произведений всех миноров *k*-го порядка, расположенных в выбранных строках (столбцах) , на их алгебраические дополнения.

<u>Пример 6.</u>

<u>назад</u>

Пример 6. Вычислить определитель матрицы с помощью теоремы Лапласа

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) Выберем произвольное количество строк или столбцов, например, 1-ю и 2-ю строки.

2) Воспользуемся теоремой Лапласа:

далее

$$\det \grave{A} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -136.$$

назад

Теорема 1. Каков бы ни был номер строки i (i=1,2,…,n), для определителя n-го порядка справедлива формула

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot M_{ik} \quad \text{или} \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

называемая **разложением этого определителя по i-й строке**.

Пример 7. Вычислить определитель матрицы

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ответ

назад

Решение (Пример 7):

1) Выберем произвольную строку, например, 2-ю строку.

2) Воспользуемся теоремой разложения по строке ($i = 2$):

$$\det \grave{A} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k} \cdot A_{2k} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24} =$$

$$= 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + (-8) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -136.$$

назад

<u>Теорема 2</u>. Каков бы ни был номер столбца k (k=1,2,…,n), для определителя n-го порядка справедлива формула

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot M_{ik}$$

или

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

называемая **разложением этого определителя по *k*-му столбцу**.

<u>Пример 8</u>. Вычислить определитель матрицы (самостоятельно)

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

назад

Свойства определителей:

1) Определитель не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами. **Пример 1)**
2) При перестановке двух столбцов (строк) определитель меняет знак. **Пример 2)**
3) Множитель, общий для элементов некоторого столбца (строки), можно выносить за знак определителя. **Пример 3)**
4) Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю. **Пример 4)**
5) Определитель равен нулю, если все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю. **Пример 5)**
6) Определитель с двумя пропорциональными столбцами (строками) равен нулю. **Пример 6)**

Частные случаи

назад

<u>Пример</u> 1):

Проверить $\det A = \det A^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

назад

Пример 2):

Проверить $\det A = -\det B$,

если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

назад

Пример 3):

Проверить $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

назад

Пример 4):

Проверить

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

назад

Пример 5):

Проверить

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

назад

Пример 6):

Проверить $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ -6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0$

назад

Частный случай 1:

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \dots & \grave{a}_{1n} \\ 0 & \grave{a}_{22} & \dots & \grave{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \grave{a}_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Пример

далее

<u>Пример</u> (Частный случай 1):

Проверить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 400$

назад

Частный случай 2:

$$\begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \dots & \grave{a}_{1(n-1)} & \grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21} & \dots & \grave{a}_{2(n-1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \grave{a}_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = -a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdot \dots \cdot a_{n1}$$

Пример

назад

<u>Пример</u> (Частный случай 2):

Проверить $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24$

назад

Спасибо за внимание!

Не забывайте готовиться к лекциям и семинарам!

(Тема следующей лекции «Обратная матрица. Ранг матрицы»)

Удачи!