Тема 4. **«Обратная матрица. Ранг матрицы.»**

Основные понятия:

1. **Определение обратной матрицы**
2. **Способы нахождения обратной матрицы**
3. **Ранг матрицы, способы нахождения ранга матрицы**

1. Определение обратной матрицы

Необходимо: матрица должна быть **квадратной**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице А, если $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

Теорема. Для невырожденной матрицы А существует единственная обратная матрица A^{-1}

<u>*2. Способы нахождения обратной матрицы*</u>

<u>Алгоритм нахождения обратной матрицы</u>:

1) Вычисление определителя матрицы А,
2) Построение матрицы алгебраических дополнений A_{ij} (присоединенная матрица)
3) Нахождение $\left(A_{ij}\right)^T$
4) Нахождение обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A_{ij}\right)^T$

Обращение матрицы можно осуществить по следующему правилу.

1. Вычислить определитель исходной матрицы $\Delta = \det A$.

2. Сформировать матрицу из алгебраических дополнений всех элементов исходной матрицы

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} .$$

3. Транспонировать матрицу алгебраических дополнений, что дает присоединенную матрицу по отношению к исходной матрице A.

4. Каждый элемент присоединенной матрицы разделить на определитель исходной матрицы Δ.

Пример 1.10. Произвести обращение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и доказать, что она обратная.

Решение

1. $\Delta = \det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4$ – определитель.

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица из алгебраических дополнений.

3. $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица из алгебраических дополнений.

4. $\dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$ – обратная матрица.

Доказательство: Если A^{-1} – обратная матрица, то справедливо выражение $AA^{-1} = E$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

Действия над матрицами

- *Нахождение обратной матрицы*

Обратной матрицей по отношению к данной *невырожденной квадратной* матрице A *n - ного* порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1}. Таким образом, согласно определению: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A \to \det A \neq 0 \to A^{T} \to A^{+} \to \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^{+}}$$

Транспонированная матрица получается из матрицы A путем замены строк соответствующими столбцами

Присоединенная матрица получается путем замены каждого элемента матрицы $A^т$ на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует

Действия над матрицами

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&4&1\\2&2&0\end{pmatrix}\longrightarrow \det A=\begin{vmatrix}0&3&1\\2&4&1\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&1\\2&1&0\\2&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=2$$

Из второй строки вычтем первую строку

Разложим определитель по элементам 3 столбца

$$\longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&2&2\\3&4&2\\1&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow A^+=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&-2&2\\-4&6&-6\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^2=-2$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^3=2$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\1&1\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-1$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^3=2$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-2$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}\cdot(-1)^5=2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\4&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^4=-4$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}0&2\\3&2\end{vmatrix}\cdot(-1)^5=6$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0&2\\3&4\end{vmatrix}\cdot(-1)^6=-6$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\2&-2&2\\-4&6&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-0.5\\1&-1&1\\-2&3&-3\end{pmatrix}$$

<u>Алгоритм нахождения обратной матрицы (Метод Гаусса)</u>:

1) К матрице А справа приписывается Е,
2) Проделывая преобразования над строками расширенной матрицей (А|Е), матрицу А приводят к Е,
3) Справа на месте приписанной матрицы Е будет получена обратная матрица.

<u>Примеры</u>. Найдем обратные матрицы к матрицам

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ранг матрицы

Ранг матрицы (1)

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

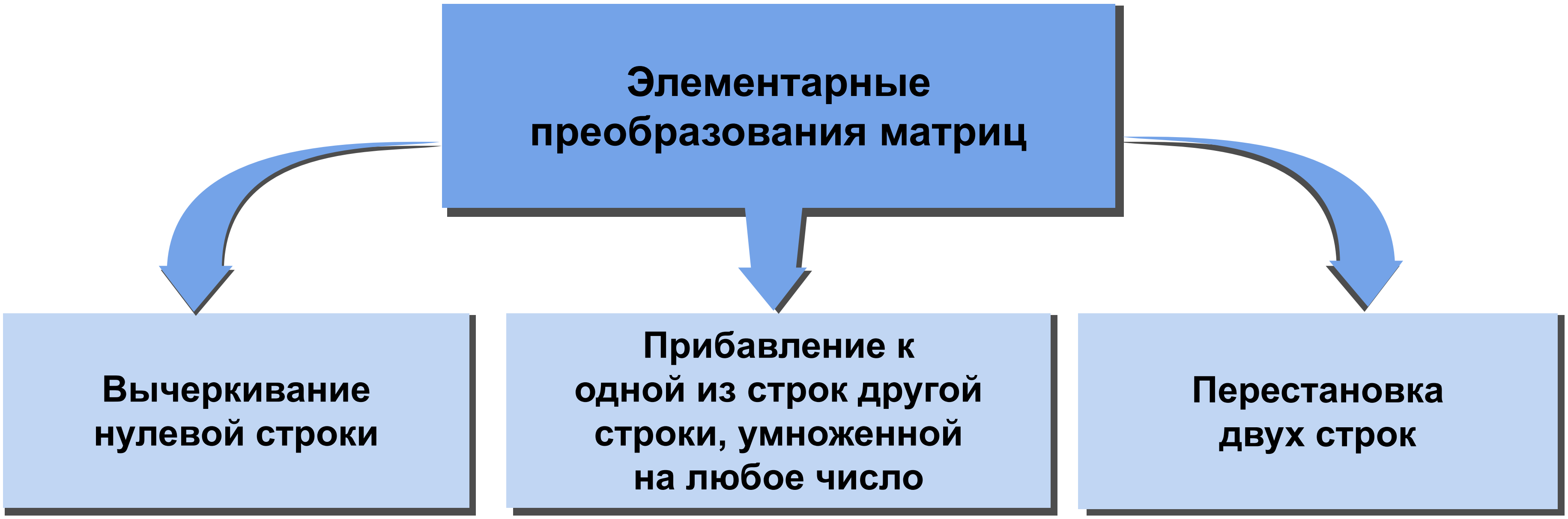
Минором к – го порядка **матрицы А называется** ***определитель к – го порядка*** **с элементами, стоящими** ***на пересечении любых к строк и к столбцов*****.**

$$(k \le \min\{m, n\})$$

Ранг матрицы (2)

Рангом матрицы r(A) называется ***наибольший из порядков миноров*** данной матрицы, ***отличных от нуля***.

Элементарные преобразования матриц



Элементарные преобразования матриц (1)

Теорема 1.

Любую матрицу с помощью <u>элементарных преобразований</u> можно привести к <u>ступенчатому виду</u>.

Элементарные преобразования матриц (2)

Теорема 2.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Ранг ступенчатой матрицы равен числу (ненулевых) строк.

Пример 6 (1)

Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 6 (2)

Решение. ***Приведем матрицу к ступенчатому виду:***

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\,\underline{\mathbf{(-2)}} \\ \quad\quad\downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array}$$

Пример 6 (3)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 6 (4)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{\cdot} \\ \underline{(-3)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{matrix}$$

Пример 6 (5)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{\cdot(-3)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 6 (6)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \underline{(-1)} \\ \quad\;\downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 6 (7)

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\,\underline{(-1)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{r(A)=2}$

3. Ранг матрицы, способы нахождения ранга матрицы

Рангом матрицы называют наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля (обозначается ***r***).

Способ нахождения ранга матрицы (по свойству миноров):

Свойство миноров. Если все миноры порядка *k* данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю.

Следовательно, если среди миноров порядка *k* данной матрицы есть отличные от нуля, а все миноры порядка (*k*+1) равны нулю или не существуют, ранг матрицы равен *k*.

<u>Способ нахождения ранга матрицы</u> (сведение матрицы к квазитреугольной форме).

<u>Пример</u>. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 7 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r = 3$$