

Линейная алгебра

Тема: **Системы линейных уравнений.**
Системы однородных уравнений

2010 г.

Метод Гаусса

(метод исключения неизвестных)

Две системы называются **эквивалентными (равносильными)** если их решения совпадают. К эквивалентной системе можно перейти с помощью элементарных преобразований системы.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются преобразования следующего вида:

- 1) умножение обеих частей уравнения на число $\alpha \neq 0$;
- 2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число $\alpha \neq 0$;
- 3) перестановка двух уравнений;
- 4) вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых уравнений.

Суть метод Гаусса:

- а) из всех уравнений системы кроме первого исключается неизвестное x_1 ;
- б) из всех уравнений системы кроме первого и второго исключается неизвестное x_2 ;
- в) из всех уравнений системы кроме первого, второго и третьего исключается неизвестное x_3 и т.д.

В результате система будет приведена к одному из следующих двух видов.

1) Первый возможный вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \boxed{} + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \boxed{} + \alpha_{2,n-1}x_{n-1} + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \boxed{} \quad \boxed{} \\ \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}x_n = \beta_{n-1}, \\ \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{array} \right. \quad (5)$$

Тогда

$$r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{A}}^*) = n,$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (5). Следовательно, система (5) (а значит и исходная система) совместна и имеет единственное решение.

Находим решение:

а) из последнего уравнения системы (5):

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$$

б) из предпоследнего уравнения системы (5):

$$x_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}} (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n} x_n) = \frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}} \left(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n} \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}} \right)$$

И т.д. получим последовательно x_{n-2} , x_{n-3} , \dots , x_1 .

2) Второй возможный вид

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \boxed{} & + & \alpha_{1r}x_r & + & \boxed{} & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1, \\ & & \alpha_{22}x_2 & + & \boxed{} & + & \alpha_{2r}x_r & + & \boxed{} & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2, \\ & & & & \boxed{} \\ & & & & & & \alpha_{rr}x_r & + & \boxed{} & + & \alpha_{rn}x_n & = & \beta_r. \end{array} \right. \quad (6)$$

Тогда $r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{A}}^*) = r < n$.

где $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (6). Следовательно, система (6) (а значит и исходная система) совместна и имеет множество решений.

Находим решение:

а) Выберем в матрице $\tilde{\mathbf{A}}$ базисный минор.

Переменные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем **зависимыми**. Остальные переменные назовем **независимыми** (или **свободными**).

Пусть, например, x_1, x_2, \dots, x_r – зависимые,
 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – свободные.

б) Перепишем систему (6) в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \boxed{} + \alpha_{1r}x_r = \beta_1 - \alpha_{1,r+1}x_{r+1} - \boxed{} - \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{22}x_2 + \boxed{} + \alpha_{2r}x_r = \beta_2 - \alpha_{2,r+1}x_{r+1} - \boxed{} - \alpha_{2n}x_n \\ \boxed{} \\ \alpha_{rr}x_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \boxed{} - \alpha_{rn}x_n \end{array} \right. \quad (7)$$

Выразим зависимые переменные через свободные:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \boxed{}, x_n) \\ \boxed{} \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \boxed{}, x_n) \end{array} \right. \quad (8)$$

Система (8), в которой зависимые переменные выражены через свободные, называется **общим решением системы** (6) (а значит и исходной системы).

Придавая свободным переменным в общем решении конкретные значения, мы можем записать бесконечно много решений системы.

§5. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{} + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \boxed{} + a_{2n}x_n = 0, \\ \boxed{} \quad \boxed{} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \boxed{} + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ называют **нулевым (тривиальным)**.

Если а) $m = n$ и $|\mathbf{A}| = 0$ или б) $m < n$, то $r(\mathbf{A}) < n$.

Следовательно, такая система имеет множество решений (система имеет **нетривиальные** решения)

Пусть c_1, c_2, \dots, c_n и d_1, d_2, \dots, d_n – два решения системы линейных уравнений (1), α, β – числа. **Линейной комбинацией** этих решений с коэффициентами α и β будем называть упорядоченную последовательность n чисел вида

$$\alpha c_1 + \beta d_1, \alpha c_2 + \beta d_2, \dots, \alpha c_n + \beta d_n$$

ТЕОРЕМА 1. *Линейная комбинация конечного числа решений системы линейных однородных уравнений тоже является решением этой системы.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть r – ранг матрицы системы (1). Если система имеет нетривиальные решения, то найдутся $n-r$ решений таких, что любое другое ее решение будет их линейной комбинацией.*

Решения, о которых идет речь в теореме 2, называются ***фундаментальной системой решений***.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ФСР:

- 1) находим общее решение системы;
- 2) записываем любой отличный от нуля определитель Δ , порядка $n - r$;
- 3) записываем $n - r$ решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы строк определителя Δ . Полученные таким образом $n-r$ решений будут являться фундаментальной системой решений системы.

Пусть дана некоторая система линейных неоднородных уравнений, имеющая множество решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \boxed{} + a_{2n}x_n = b_2, \\ \boxed{} \quad \boxed{} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \boxed{} + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Систему линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{} + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \boxed{} + a_{2n}x_n = 0, \\ \boxed{} \quad \boxed{} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \boxed{} + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

называют *соответствующей* системе (2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть c_1, c_2, \dots, c_n – какое-нибудь решение системы (2). Любое другое решение системы (2) может быть записано как сумма решения c_1, c_2, \dots, c_n и некоторого решения системы (3). Иначе говоря, справедливо равенство:

$$\mathbf{X} = \alpha_1 \mathbf{C}_1 + \alpha_2 \mathbf{C}_2 + \dots + \alpha_{n-r} \mathbf{C}_{n-r} + \mathbf{C}, \quad (4)$$

где \mathbf{X} – матрица-столбец неизвестных, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_{n-r}$ – матрицы-столбцы, элементами которых служат решения из фср системы (3), \mathbf{C} – матрица-столбец, элементами которой является решение c_1, c_2, \dots, c_n .