Тема 5. «Системы линейных уравнений»

Основные понятия:

1. **Общий вид, основные понятия, матричная форма**
2. **Методы решения СЛУ**
3. **Теорема Кронекера-Капелли**

1. Общий вид, основные понятия, матричная форма

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $a_{ij}, b_i \in R$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных,

b_i – свободные коэффициенты.

Если $b_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$, то СЛУ называется **однородной**.

Если хотя бы один $b_i \neq 0$, то СЛУ называется **неоднородной**.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, и система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения.

Выражение «**решить СЛУ**» означает выяснить, совместна СЛУ или несовместна, в случае совместности – найти все ее решения.

Решение СЛУ называется упорядоченная совокупность чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ подстановка которых в СЛУ обращает каждое ее уравнение в тождество.

Любую СЛУ можно представить в матричном виде:

$$\grave{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

На основании согласованности матрицы А с матрицей Х:

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=B$$

$A\cdot X=B$ - **матричный вид** исходной СЛУ.

2. Методы решения СЛУ

1) Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса)
2) Метод Крамера (с помощью определителей)
3) Метод обратной матрицы

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) - немецкий математик
Габриэль Крамер (1704-1752) – швейцарский математик

1) *Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса)*

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Данный метод применим к СЛУ любой размерности.

Алгоритм метода:

- 1 уравнение умножаем на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и складываем со вторым уравнением системы;
- 1 уравнение умножаем на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и складываем с третьим уравнением системы;
- И т.д.

В результате чего придем к системе, эквивалентной исходной системе уравнений.

1 случай:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \tilde{a}_{33}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{b}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

В этом случае СЛУ имеет единственное решение.

Значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} из предпоследнего уравнения и т.д., значение x_1 находится из первого уравнения.

2 случай:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_{kk}x_k + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

В этом случае СЛУ имеет бесконечно много решений.

Из последнего уравнения выражается одно из неизвестных через остальные неизвестные и т.д.

<u>*3 случай:*</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

В этом случае СЛУ несовместна (не имеет решений), т.к. последнее уравнение является противоречивым.

<u>**Замечание**</u>. Метод Гаусса удобно осуществлять в матричном виде.

Метод Гаусса
(метод исключения неизвестных)

- Две системы называются *эквивалентными* (*равносильными*), если их решения совпадают.
- К эквивалентной системе можно перейти с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы этой системы.

Схема действий метода Гаусса:

а) из всех уравнений системы кроме первого исключается неизвестное x_1;

б) из всех уравнений системы кроме первого и второго исключается неизвестное x_2;

в) из всех уравнений системы кроме первого, второго и третьего исключается неизвестное x_3 и т.д.

г) Обратным ходом из последнего уравнения находят одну неизвестную, из предпоследнего – следующую и т.д.

Исключение неизвестных обычно осуществляют элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы СЛУ.

В результате расширенная матрица СЛУ приводится к трапецеидальному виду,

который позволяет легко выделить базисный минор основной матрицы системы.

- Неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор называются ***базисными неизвестными***.
- Неизвестные, коэффициенты при которых не вошли в базисный минор, называются ***свободными неизвестными***.

- Если n – число неизвестных системы, r – её ранг, то
- r *неизвестных системы – базисные,*
- $k = n - r$ свободные.

- Если ранг основной и расширенной матриц СЛУ совпадает с числом неизвестных СЛУ, то свободных неизвестных нет. В этом случае СЛУ имеет **единственное решение** (определённая СЛУ).
  Если ранги основной и расширенной матриц СЛУ равны, но меньше числа неизвестных СЛУ, то СЛУ неопределённая. В этом случае находят **общее решение** СЛУ.

- Решение СЛУ, в котором базисные неизвестные выражены через свободные неизвестные, называется ***общим решением*** СЛУ.
  Решение, которое получается из общего путём присваивания свободным неизвестным числовых значений, называется ***частным решением*** СЛУ.

- **Общее решение системы линейных уравнений** можно получить, руководствуясь, например, следующим планом:
- а) выбрать базисный минор (обычно это минор, под главной диагональю которого – все нули);
- б) перенести свободные неизвестные к свободным членам, то есть в правые части уравнений;
- в) обратным ходом метода Гаусса выразить базисные неизвестные через свободные неизвестные.

- **Фундаментальной системой частных решений** системы n *однородных* линейных уравнений (СОЛУ) называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу $k = n - r$ свободных неизвестных системы,
- где r - ранг основной матрицы системы.

Фундаментальную систему частных решений (ФСЧР СОЛУ) получают обычно, последовательно приравнивая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы порядка

$$k = n - r \quad .$$

- **Замечание.** ФСЧР СОЛУ можно получить также, приравнивая свободные неизвестные элементам строк произвольной квадратной матрицы *A* порядка *k* = *n* – *r*, если

$$\det A \neq 0$$

4. Метод Гаусса

Метод Гаусса (1)

Метод ***последовательного исключения неизвестных*** – наиболее ***распространенный метод*** решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса (2)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Метод Гаусса (3)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований приводим ее к равносильной системе ступенчатого вида:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots\ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots\ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kr}x_r + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Метод Гаусса (4)

Возможен один из следующих случаев:

1) система не имеет решений (система несовместна);

2) система имеет единственное решение;

3) система имеет бесчисленное множество решений.

Теорема Кронекера-Капелли (1)

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капелли (2)

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капелли (3)

Теорема.
Система линейных уравнений ***совместна*** тогда и только тогда, когда

$$r(A) = r(\widetilde{A})$$

Пример 7 (1)

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Пример 7 (2)

Решение. ***Запишем расширенную матрицу:***

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Пример 7 (3)

Решение. ***Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Пример 7 (4)

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot\underline{(1)} \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Пример 7 (4)

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\underline{(1)} \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

r(A)=r(Ã)=3

Пример 7 (5)

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ \quad -x_2 + 2x_3 = -1 \\ \qquad -x_3 = 0 \end{cases} \quad \boxed{\Rightarrow x_3 = 0}$$

Пример 7 (6)

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2\cdot 0 = 3 \\ \quad -x_2 + 2\cdot 0 = -1 \end{cases} \quad \boxed{\Rightarrow x_2 = 1}$$

Пример 7 (7)

Решение. ***Найдем x_1:***

$$x_1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

Пример 7 (8)

Решение.

$x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=0$ – единственное решение.

2) Метод Крамера

Метод основан на вычислении определителей, поэтому применим к СЛУ размерности *nxn*.

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Теорема</u>. Если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$ где $k = \overline{1, n}$; (Формулы Крамера)

3) Метод обратной матрицы

Метод основан на нахождении обратной матрицы, поэтому применим к СЛУ размерности *nxn*.

Рассмотрим СЛУ в матричном виде:

$$1)\ AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$2)\ XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

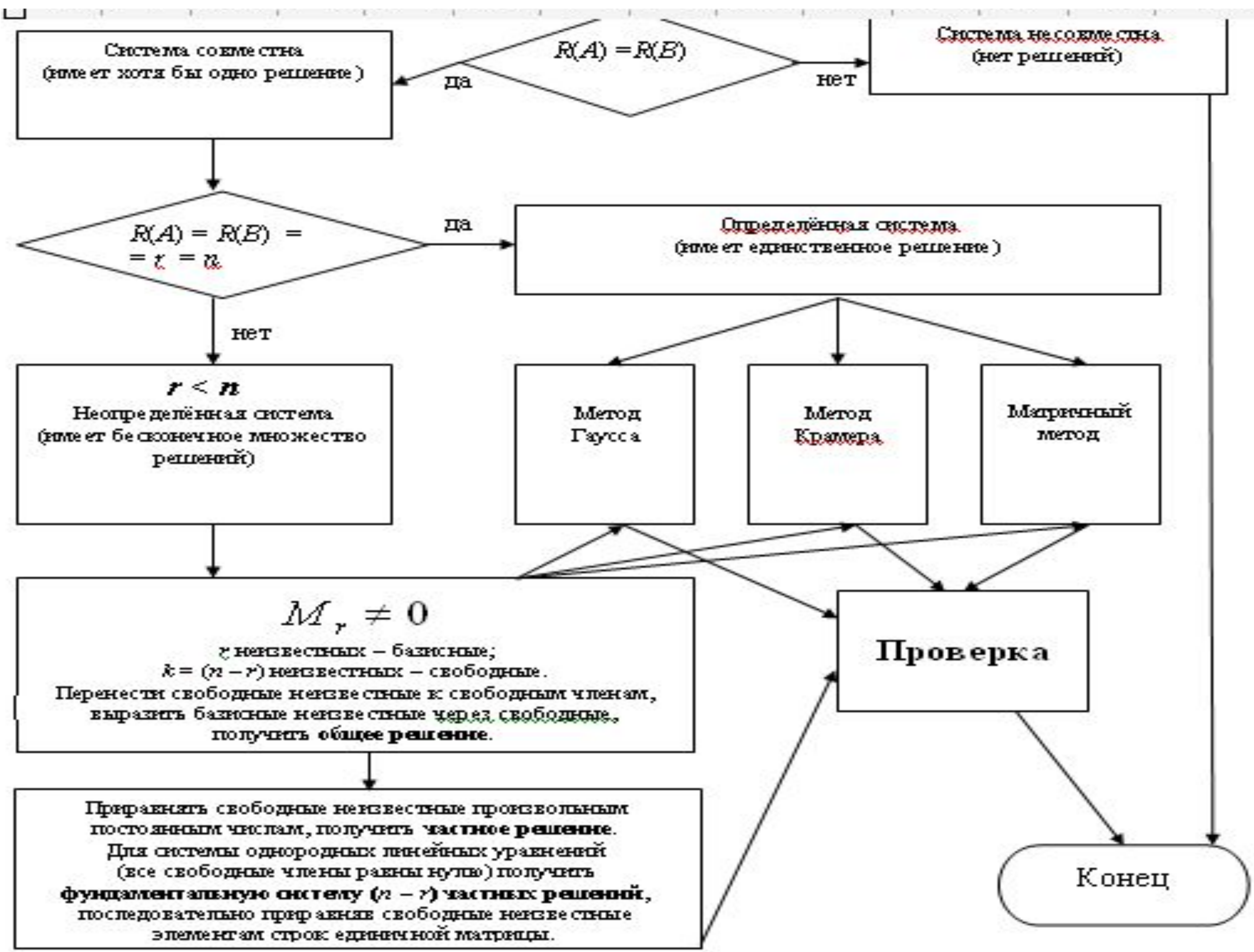
3. Теорема Кронекера-Капелли

Помимо метода Гаусса, на вопрос **совместна ли СЛУ или нет** можно воспользоваться теоремой Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли. Для совместимости СЛУ необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.



Система совместна (имеет хотя бы одно решение)
$R(A) = R(B)$
да
нет
Система не совместна (нет решений)
$R(A) = R(B) = r = n$
да
Определённая система (имеет единственное решение)
нет
$r < n$
Неопределённая система (имеет бесконечное множество решений)
Метод Гаусса
Метод Крамера
Матричный метод
$M_r \neq 0$
r неизвестных – базисные;
$k = (n - r)$ неизвестных – свободные.
Перенести свободные неизвестные к свободным членам, выразить базисные неизвестные через свободные, получить **общее решение**.
Проверка
Приравнять свободные неизвестные произвольным постоянным числам, получить **частное решение**.
Для системы однородных линейных уравнений (все свободные члены равны нулю) получить **фундаментальную систему $(n - r)$ частных решений**, последовательно приравняв свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы.
Конец

Системы линейных уравнений (1)

Системой m линейных уравнений
с n неизвестными
называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} и b_i – числа, x_i – неизвестные.

Пример 1

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Пример 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Системы линейных уравнений (2)

Решением системы уравнений называется ***такой набор чисел*** $x_1, x_2 .. x_n$, при котором ***каждое уравнение*** системы обращается ***в тождество***.

Матричный вид системы

Обозначения:

Матрица коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix},$$

Столбец неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix},$$

Матричные уравнения (1)

Матричная запись системы:

$$A \cdot X = B$$

Пример 1 (продолжение)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Пример 2 (продолжение)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Пример 3 (продолжение)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Матричные уравнения (2)

Матричная запись системы:

$$A \cdot X = B$$

Пусть m=n
Пусть detA≠0

A^{-1} — существует

Матричные уравнения (3)

Тогда

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Матричные уравнения (4)

Тогда

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}}_{=E}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Матричные уравнения (5)

Тогда

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}}_{E}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathrm{E}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{B}$$

Матричные уравнения (6)

Тогда

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}}_{=E}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathrm{E}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{B}$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Пример 4 (1)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Пример 4 (2)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Решение. ***Обозначим:***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Получим матричное уравнение:

$$A \cdot X = B$$

Пример 4 (3)

Вычислим определитель матрицы коэффициентов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-1) + (2-1) = 3 \neq 0$$

Пример 4 (4)

Найдем алгебраические дополнения элементов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Пример 4 (5)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

Пример 4 (6)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Пример 4 (7)

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 4 (8)

По формуле $X=A^{-1}\cdot B$ найдем решение матричного уравнения:

$$X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot1-1\cdot0+2\cdot1\\ 1\cdot1-1\cdot0-1\cdot1\\ -2\cdot1+5\cdot0-1\cdot1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Правило Крамера (1)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пусть m=n

Пусть detA = Δ ≠ 0

Правило Крамера (2)

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пусть m=n

Пусть detA = Δ ≠ 0

Обозначим

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \underline{b_1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \underline{b_2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \underline{b_n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

J – столбец

Правило Крамера (3)

Решение системы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \ldots,\quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Пример 5 (1)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Пример 5 (2)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Запишем определитель из коэффициентов уравнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

Пример 5 (3)

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Запишем определитель из коэффициентов уравнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

Вычислим определители Δ_1 и Δ_2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Пример 5 (4)

Подставим полученные значения в формулы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{5}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{5}$$

Занятие 5.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных.

Пусть задана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

1. Составим расширенную матрицу.
2. С помощью элементарных преобразований строк расширенную матрицу приведём к треугольному (ступенчатому) виду.
3. Вернувшись к системе уравнений, находим неизвестные.

- Элементарными преобразованиями матрицы называют:
- Умножение какой-нибудь строки (столбца) на отличное от нуля число.
- Прибавление к какой-нибудь строке (столбцу) другой её строки (столбца), умножение на любое число, отличное от нуля.
- Перестановку местами любых двух строк.

Пример 6. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и приведём её к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{cc} -2 & -2 \\ & \\ & \end{array}\right.$$

Получаем:

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 5 & -7\\ 0 & -1 & -9 & 16\\ 0 & 1 & -13 & 28\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -13 & 28\\ 0 & 0 & -22 & 44\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -13 & 28\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Вернёмся к системе уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+5x_3=-7,\\ x_2-13x_3=28,\\ x_3=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2-10=-7,\\ x_2+26=28,\\ x_3=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2=3,\\ x_2=2,\\ x_3=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=2,\\ x_3=-2\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+2=3,\\ x_2=2,\\ x_3=-2\end{cases}$$

Ответ: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=-2$

Метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений. При этом система будет несовместной, т.е. не иметь решения, если после преобразований мы получим уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля.

Пример 7. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5, \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу и преобразуем её.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{cc} -3 & -1 \\ & \\ & \\ & \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{cc} & \\ & \\ -21 & -20 \\ & \end{array}\right.$$

Получаем:

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & \big| & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & \big| & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & \big| & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & \big| & 162 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 1 & \big| & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & \big| & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & \big| & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \big| & 2 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что последнее уравнение будет 0 = 2. Значит, заданная система будет несовместной, т.е. не иметь решения. Совместная система будет неопределённой, (то есть иметь решений больше, чем одно), если после преобразований матрица приводится к трапециевидному виду.

Пример 8. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу и преобразуем её.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}\right.$$

Получаем:

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&-3&-2&-1\\0&0&3&2&1\\0&0&6&4&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&3&2&1\\0&0&3&2&1\\0&0&3&2&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&3&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Вернёмся к системе уравнений.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\3x_3+2x_4=1,\\0=0,\\0=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_3=-\dfrac{2}{3}x_4+\dfrac{1}{3},\\x_4-\text{любое}\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2-\dfrac{2}{3}x_4+\dfrac{1}{3}+x_4=1,\\x_3=-\dfrac{2}{3}x_4+\dfrac{1}{3},\\x_4-\text{любое}\end{cases}$$

В итоге имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}, x_2 - \textit{любое} \\ x_3 = -\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}, \\ x_4 - \textit{любое} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}, \\ x_3 = -\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}, \\ x_2, x_4 - \textit{любое} \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда заданная система состоит из линейных однородных уравнений, то есть уравнений, свободные члены которых равны нулю. Такая система всегда совместна, так как обладает нулевым решением (0; 0; …; 0). Если в системе линейных однородных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то эта система обладает, помимо нулевого решения, также и ненулевыми решениями. Таких решений будет бесконечно много.

Пример 9. решить систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение:

Эта система однородных уравнений; причём число уравнений меньше числа неизвестных (3<4), поэтому данная система будет неопределённой.

- Составим матрицу из коэффициентов (так как свободные члены равны нулю) и преобразуем её.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вернёмся к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4, \\ x_3 = \dfrac{4}{5}x_4, \\ x_1 = \dfrac{3}{5}x_4 \end{cases}$$

Как мы видим, с помощью метода Гаусса можно решить любую систему, содержащую любое число линейных уравнений с любым числом неизвестных. Это один из самых эффективных методов решения систем линейных уравнений.

Занятие 7

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Пусть дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матрицу А из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Найдём определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Правило Крамера. Если $m=n$ и $\det A \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

где $\det A_i$ – определитель, полученный из $\det A$ заменой i-ого столбца столбцом свободных членов.

Решение системы линейных уравнений :

- Находим определитель системы Δ.
- Вычисляем определители Δx_1, Δx_2, …
- Возможны три случая:
- Если $\Delta \neq 0$, то система имеет

единственное решение: $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots$

- Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей x_i не равен нулю, то система не имеет решений.
- Если $\Delta = 0$, $\Delta x_1 = 0$, $\Delta x_2 = 0$, …, $\Delta x_n = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 6 = 9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

Пример 2. Решить систему: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -6 + 10 - 21 - 14 - 30 - 21 = -22$$

Находим: Δx_1, Δx_2, Δx_3.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \\ 14 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & 1 & 5 & -7 & 1 \\ 14 & 3 & -3 & 14 & 3 \end{array}\right. = -6 + 70 - 21 - 14 - 30 - 21 = -22$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \\ 2 & 14 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 5 & 1 & -7 \\ 2 & 14 & -3 & 2 & 14 \end{array}\right. = 42 + 20 + 14 + 14 - 140 + 6 = -44$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 14 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -7 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 14 & 2 & 3 \end{array}\right. = 28 - 14 + 6 - 4 + 42 - 14 = 44$$

Применяем формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1 \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{44}{-22} = -2$$

$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-2$

Занятие 9

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Матричная запись системы линейных уравнений имеет вид: AX=B Отсюда: X= $A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} матрица, обратная матрице A.

Пример 12. Решить с помощью обратной матрицы систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение:

Находим определитель $\Delta(\det A)$

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -6 + 10 + 3 - 2 - 30 + 3 = -22$$

Если $\Delta = 0$, то система не имела бы решения.

Вычислим алгебраические дополнения для элементов каждой строки.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 15 = -18$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 10) = 13$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 - 3) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 2) = -4$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 1) = -3$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Составляем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{-22}\begin{pmatrix}-18 & 6 & 4\\ 13 & -8 & -9\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2\\ -7\\ 14\end{pmatrix}$$

$$X=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-18 & 6 & 4\\ 13 & -8 & -9\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -7\\ 14\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-18\cdot 2+6(-7)+4\cdot 14\\ 13\cdot 2+(-8)(-7)+(-9)14\\ 1\cdot 2+(-4)(-7)+1\cdot 14\end{pmatrix}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-22\\ -44\\ 44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

Отсюда: $\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=-2\end{cases}$