Тема 5. «Системы линейных уравнений»

Основные понятия:

1. **Общий вид, основные понятия, матричная форма**
2. **Методы решения СЛУ**
3. **Теорема Кронекера-Капелли**

1. Общий вид, основные понятия, матричная форма

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где

$a_{ij}, b_i \in R$

a_{ij} – коэффициенты при неизвестных,

b_i – свободные коэффициенты.

Если $b_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$, то СЛУ называется **однородной**.

Если хотя бы один $b_i \neq 0$, то СЛУ называется **неоднородной**.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, и система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения.

Выражение «**решить СЛУ**» означает выяснить, совместна СЛУ или несовместна, в случае совместности – найти все ее решения.

Решение СЛУ называется упорядоченная совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, подстановка которых в СЛУ обращает каждое ее уравнение в тождество.

Любую СЛУ можно представить в матричном виде:

$$\grave{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

На основании согласованности матрицы A с матрицей X:

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=B$$

$$A\cdot X=B$$

- **матричный вид** исходной СЛУ.

2. Методы решения СЛУ

1) Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса)
2) Метод Крамера (с помощью определителей)
3) Метод обратной матрицы

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) - немецкий математик

Габриэль Крамер (1704-1752) – швейцарский математик

1) *Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса)*

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Данный метод применим к СЛУ любой размерности.

Алгоритм метода:

- 1 уравнение умножаем на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и складываем со вторым уравнением системы;
- 1 уравнение умножаем на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и складываем с третьим уравнением системы;
- И т.д.

В результате чего придем к системе, эквивалентной исходной системе уравнений.

1 случай:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \tilde{a}_{33}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{3n}x_n = \tilde{b}_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

В этом случае СЛУ имеет единственное решение.

Значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} из предпоследнего уравнения и т.д., значение x_1 находится из первого уравнения.

2 случай:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tilde{a}_{kk}x_k + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m
\end{cases}
$$

В этом случае СЛУ имеет бесконечно много решений.

Из последнего уравнения выражается одно из неизвестных через остальные неизвестные и т.д.

<u>*3 случай:*</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

В этом случае СЛУ несовместна (не имеет решений), т.к. последнее уравнение является противоречивым.

<u>**Замечание**</u>. Метод Гаусса удобно осуществлять в матричном виде.

2) Метод Крамера

Метод основан на вычислении определителей, поэтому применим к СЛУ размерности *nxn*.

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Теорема</u>. Если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},$$ где $k = \overline{1, n}$ (Формулы Крамера)

3) Метод обратной матрицы

Метод основан на нахождении обратной матрицы, поэтому применим к СЛУ размерности *nxn*.

Рассмотрим СЛУ в матричном виде:

$$1)\ AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$2)\ XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$$

3. Теорема Кронекера-Капелли

Помимо метода Гаусса, на вопрос **совместна ли СЛУ или нет** можно воспользоваться теоремой Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли. Для совместимости СЛУ необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.