РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 1

Доцент Трухин М.П.

Цели и задачи изучения дисциплины

Дисциплина «Радиотехнические цепи и сигналы" (РЦС) формирует базовую теоретическую подготовку в области телекоммуникационных систем, являясь продолжением дисциплины "Теория электрических цепей».

Предметом изучения в курсе РЦС являются математические модели сигналов и физических процессов, происходящих при их преобразовании в радиотехнических устройствах, а также алгоритмы этих преобразований.

Цели и задачи изучения дисциплины

Целью преподавания дисциплины “Цифровая обработка сигналов" является формирование следующих профессиональных компетенций:

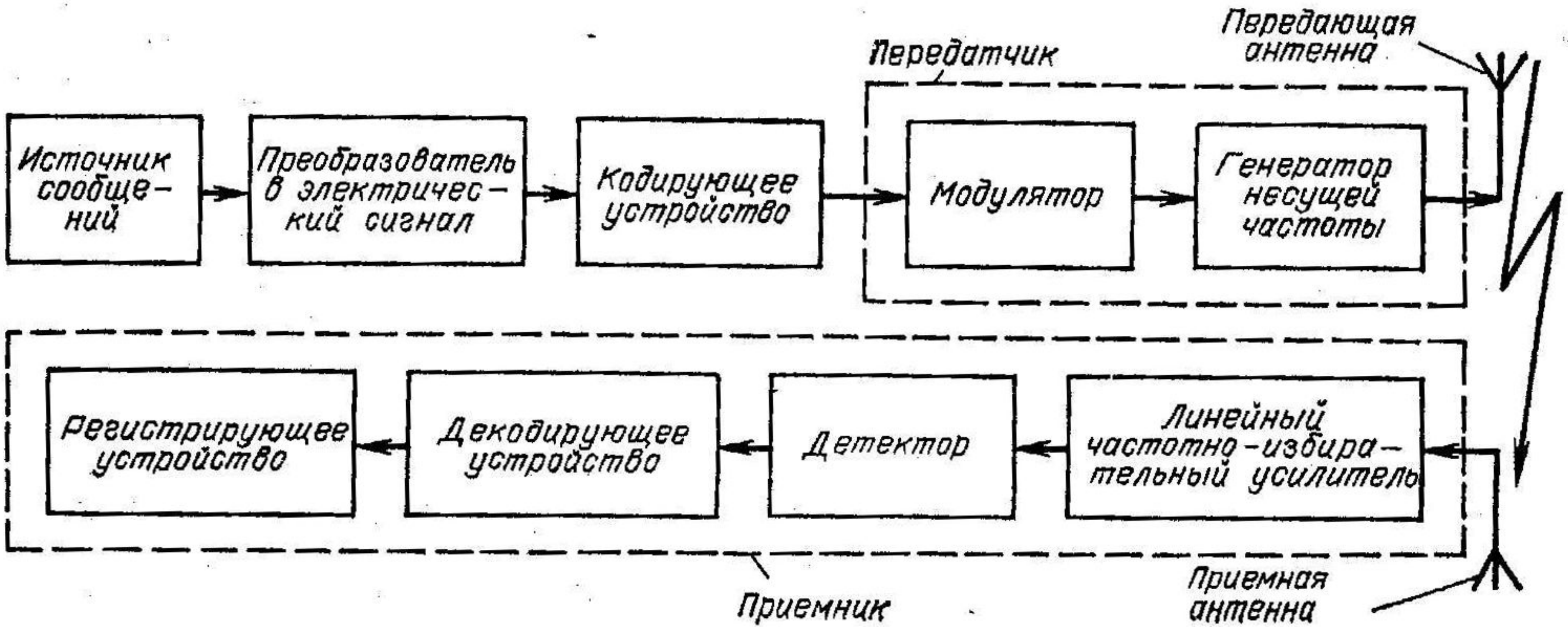
- **способность самостоятельного анализа свойств радиотехнических сигналов;**
- **способность самостоятельного синтеза и анализа типовых радиотехнических цепей и устройств;**
- **способность применять современные математические методы исследования с использованием компьютерной техники;**
- **способность проводить математическое моделирование процессов и объектов на базе стандартных пакетов автоматизированного проектирования и исследований.**

Частотные диапазоны

Волны	Диапазон радиоволн	Диапазон радиочастот	Нерекомендуемые термины
Декамегаметровые	100 000—10 000 км	3—30 Гц	
Мегаметровые	10 000—1000 км	30—300 Гц	
Гектокилометровые	1000—100 км	300—3000 Гц	
Мириаметровые	100—10 км	3—30 кГц	Сверхдлинные
Километровые	10—1 км	30—300 кГц	Длинные
Гектометровые	1000—100 м	300—3000 кГц	Средние
Декаметровые	100—10 м	3—30 МГц	Короткие
Метровые	10—1 м	30—300 МГц	
Дециметровые	100—10 см	300—3000 МГц	
Сантиметровые	10—1 см	3—30 ГГц	Ультракороткие
Миллиметровые	10—1 мм	30—300 ГГц	
Децимиллиметровые	1—0,1 мм	300—3000 ГГц	Субмиллиметровые

Примечание. Длина волны λ связана с периодом колебания T или с частотой $f=1/T$ соотношением $\lambda=cT=c/f$, где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

Типовая радиосистема передачи сообщений



Определение сигнала

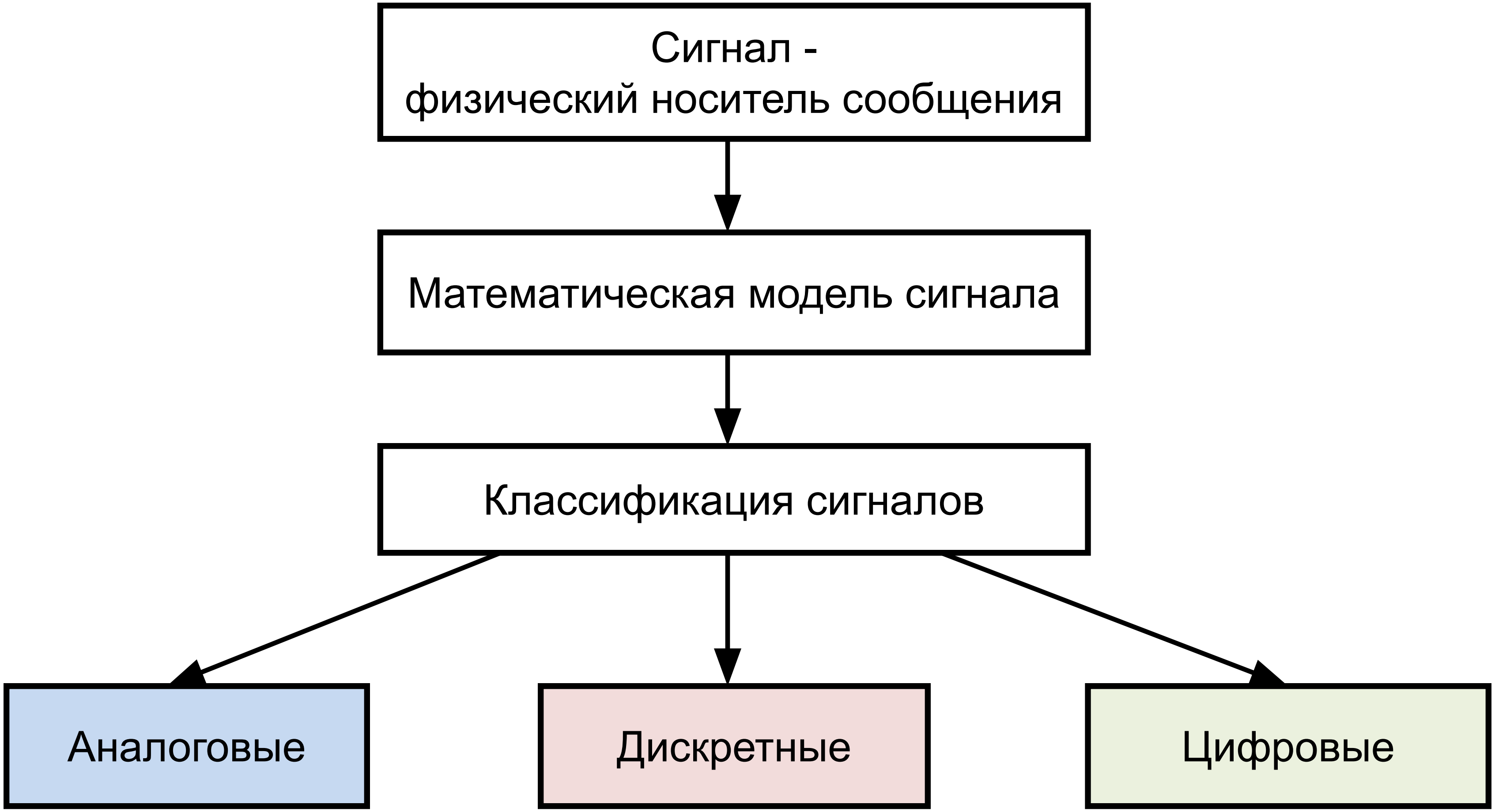
В соответствии с принятой традицией *сигналом* называют *физический носитель сообщения*, то есть информации, предназначенной для передачи.

Для того, чтобы сделать сигнал объектом теоретического изучения вводят *математическую модель сигнала* – способ его математического описания, представляющий собой функциональную зависимость, аргументом которой, как правило, является время – $s(t)$, $x(t)$, $u(t)$.

Математическая модель позволяет абстрагироваться от физической природы носителя сообщения и описывает наиболее существенные свойства сигнала.

Введение математической модели позволяет провести *классификацию* сигналов.

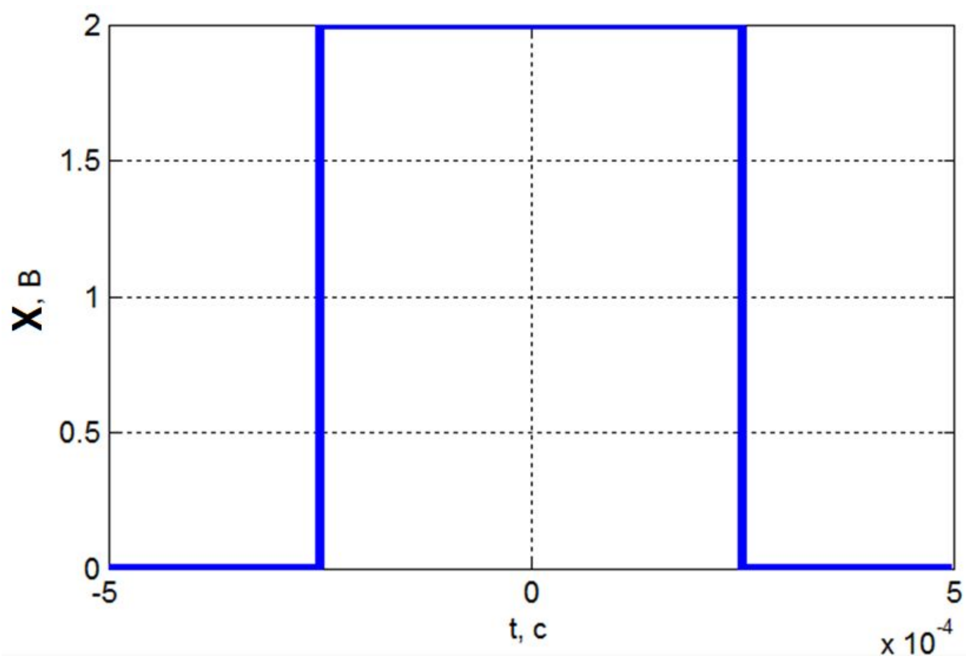
Классификация сигналов



Аналоговые сигналы

Аналоговым **или** **континуальным** **называют сигнал, произвольный по величине и непрерывный во времени. Аналоговый сигнал *x*(*t*) описывается *непрерывной* или кусочно-непрерывной функцией времени. Аргумент и сама функция принимают любые значения на интервале** $t_{\min} \le t \le t_{\max}$

$$x_{\min} \le x \le x_{\max};$$
$$t_{\min} \le t \le t_{\max}$$



Дискретные сигналы

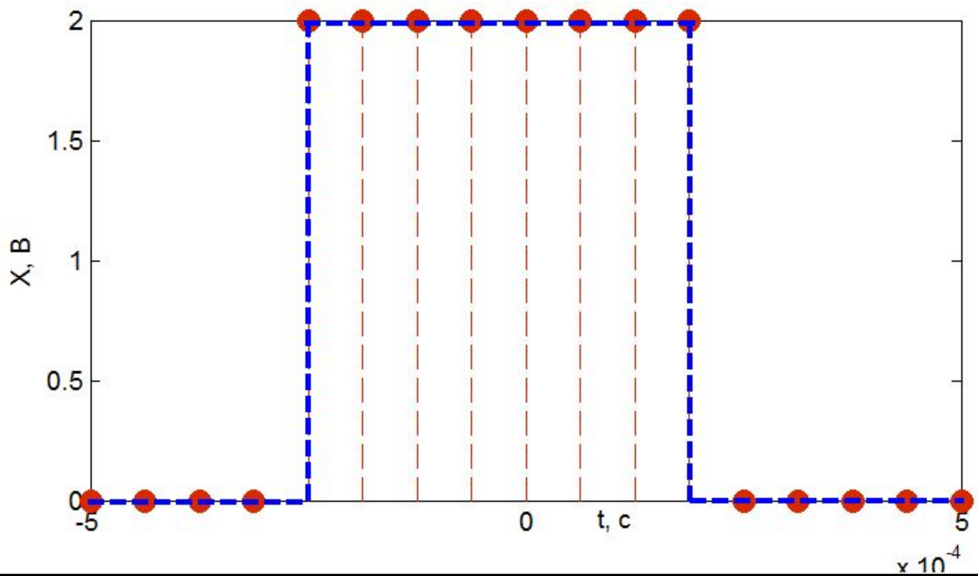
Дискретный **сигнал может принимать произвольные по величине значения в дискретные моменты времени.**

Дискретный сигнал $x_{д}(t)$ описывается *решётчатой функцией* – последовательностью выборочных значений (отсчетов) в соответствующие моменты времени:

$$x_0 = x(t_0),\ x_1 = x(t_1),\ \ldots,\ x_n = x(t_n);$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

Интервал *Δt* называется *интервалом дискретизации*.



0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0

Дискретные сигналы

При постоянном интервале дискретизации

$$\Delta t = t_{Д} - t_{i-1} = t_{i-1} - t_{i-2} = \ldots = T$$

величину *$T_Д$* называют *периодом дискретизации*, а величину, обратную ей – *частотой дискретизации*:

$$\boxed{F_{\text{Д}} = \frac{1}{T_{\text{Д}}} = \frac{1}{\Delta t}}$$

В этом случае значения решётчатой функции записываются как *$x(nT_Д)$*, *$x(n)$* или просто *x_n*. Таким образом, дискретный сигнал записывается как

$$\boxed{x_{Д}(t) = \left\{ x\left(nT_{Д}\right) \right\}}$$

Цифровые сигналы

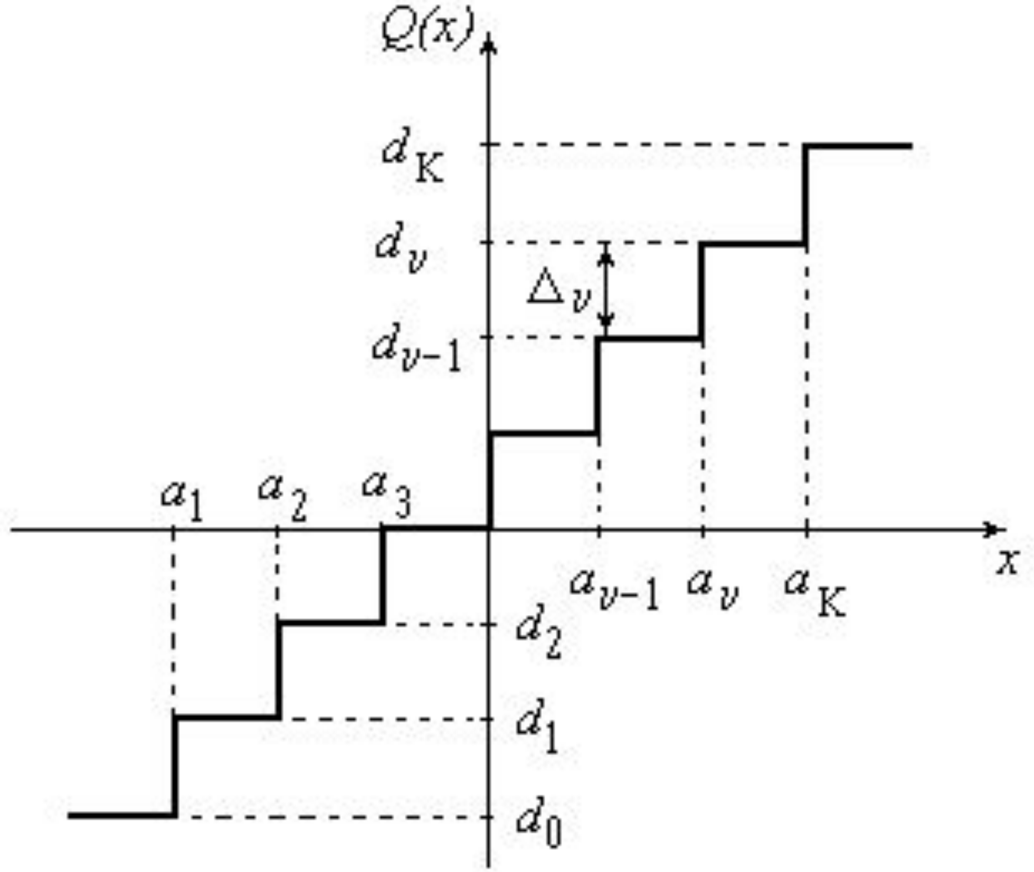
Цифровой сигнал – это квантованный по уровню дискретный сигнал.

Он описывается *квантованными решетчатыми функциями* (квантованными последовательностями отсчетных значений), принимающими конечный ряд дискретных значений $d_0, d_1, \ldots d_k$, называемых *уровнями квантования*.

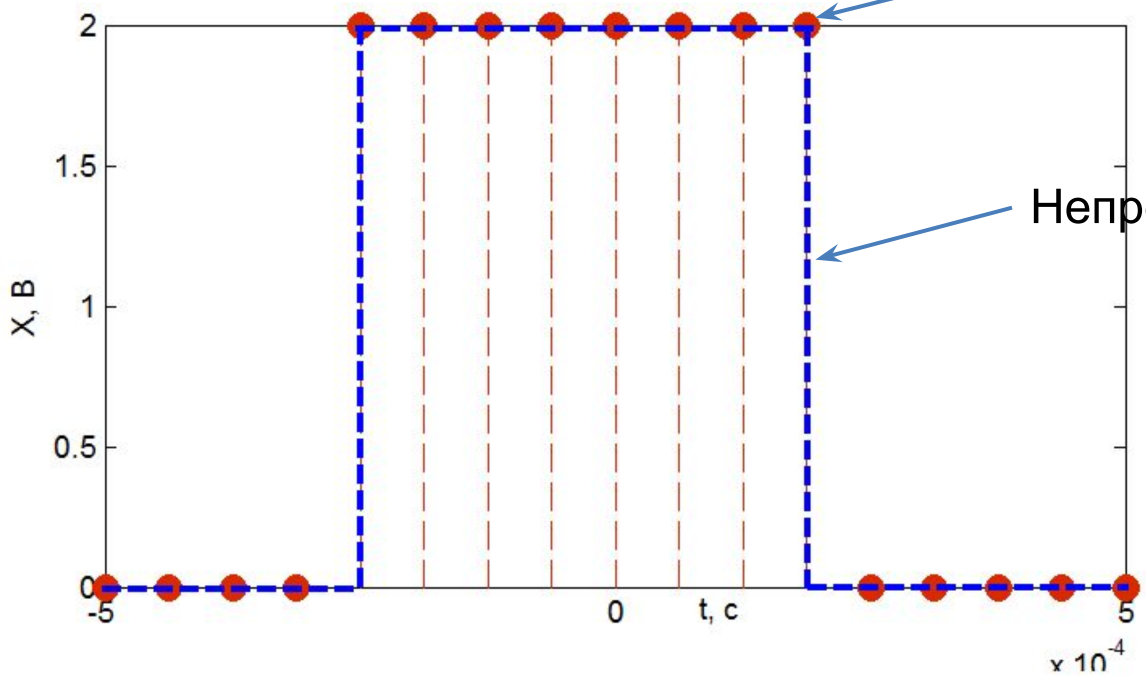
Связь между решетчатой функцией $x_Д(nT_Д)$ и квантованной решетчатой функцией $x_Ц(nT_Д)$ определяется нелинейной функцией – амплитудной характеристикой квантования $Q(x)$

Цифровые сигналы

Общий вид амплитудной характеристики квантования при квантовании с постоянным шагом $\Delta_\nu = \Delta$



Связи между сигналами



Дискретный сигнал

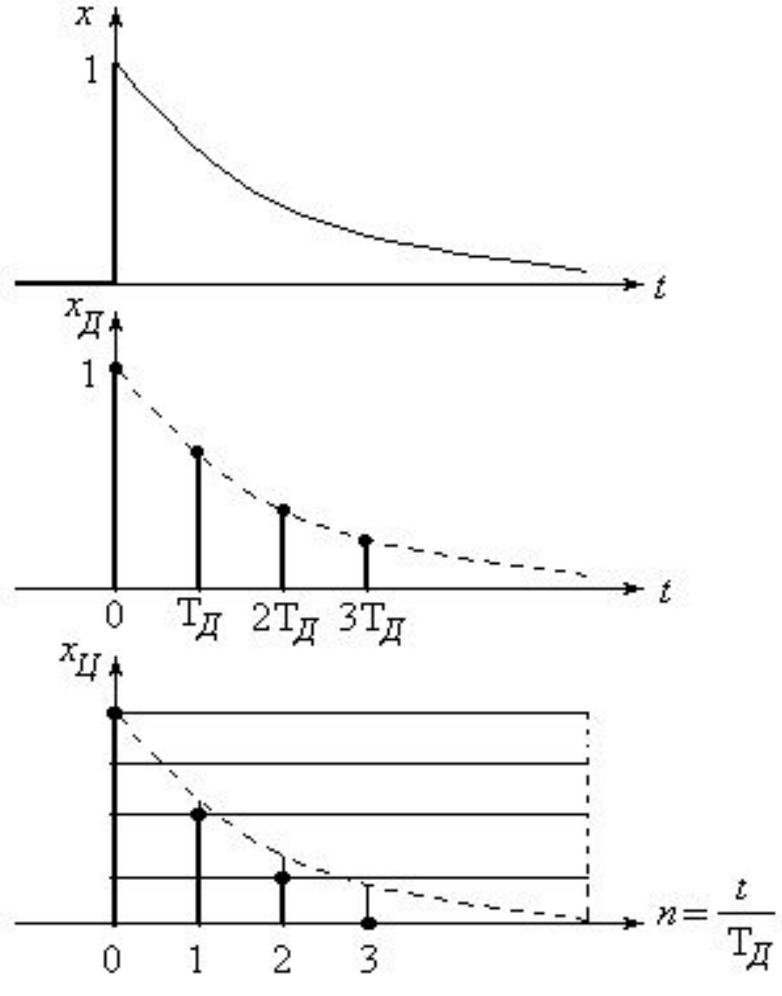
0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 0 0

Цифровой сигнал

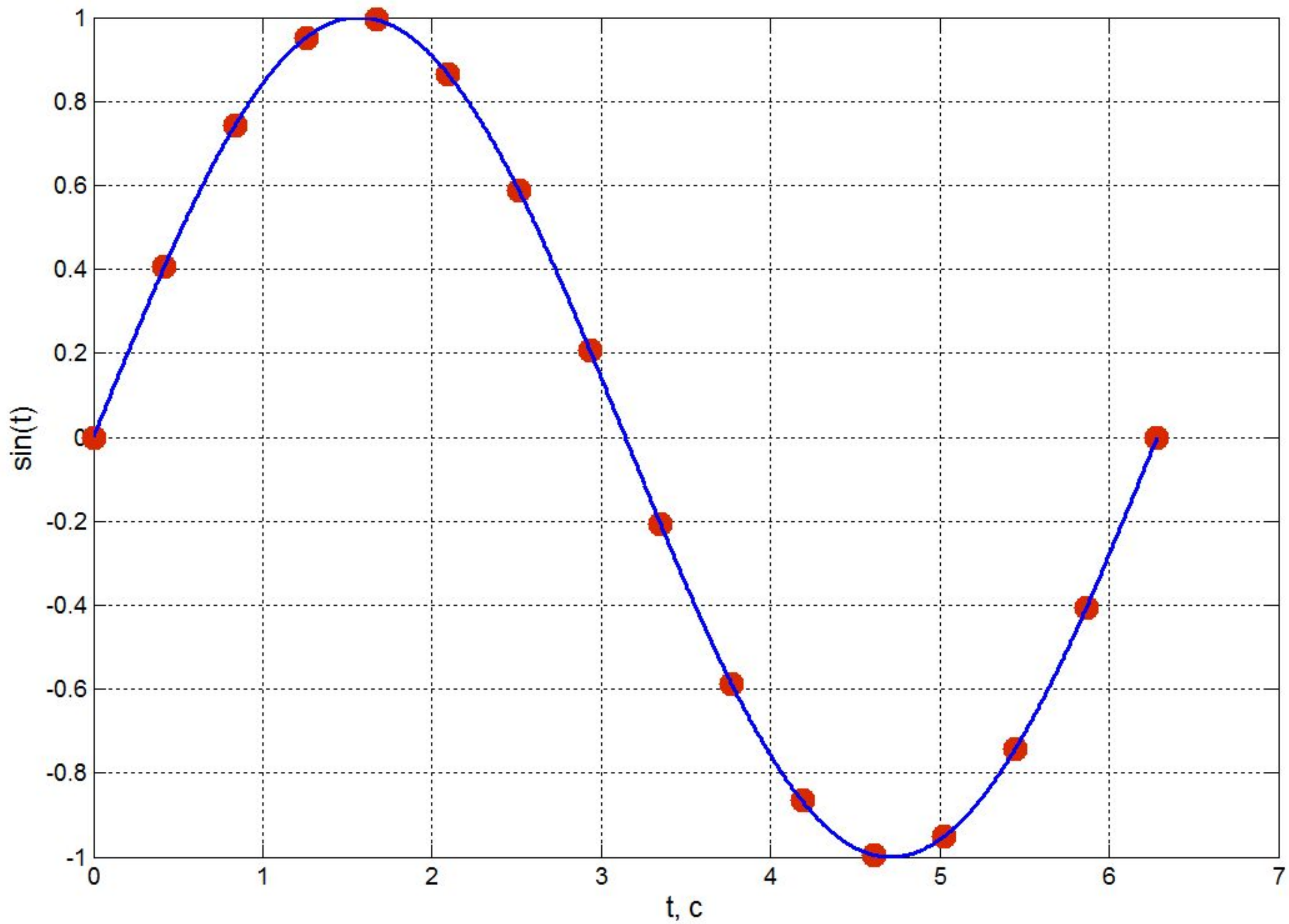
000 000 000 000 010 010 010 010 010 010 010 010 000 000 000 000 000

Связи между сигналами

Переход от дискретного сигнала к цифровому сигналу осуществляется путем применения операций *квантования* и *кодирования*



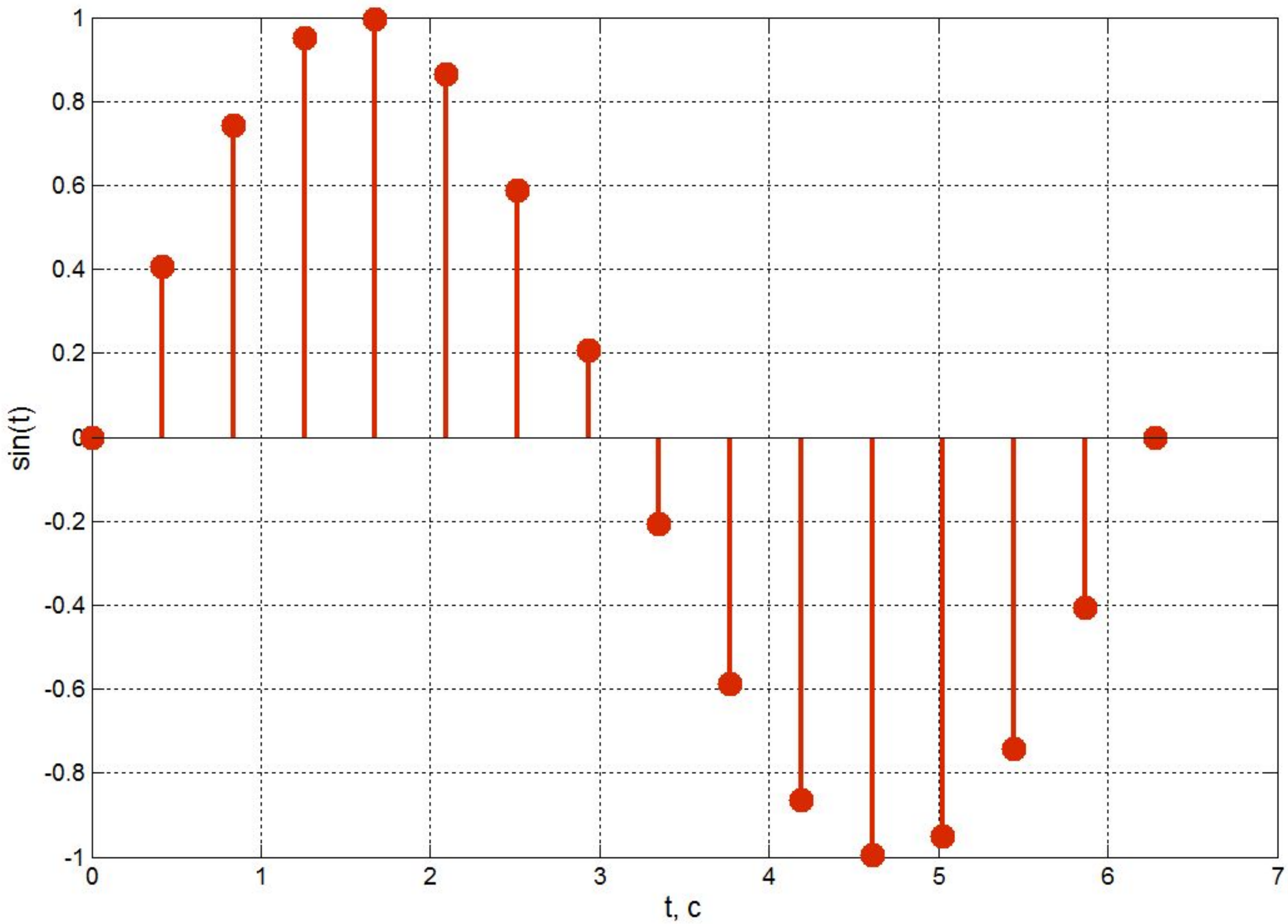
Связи между сигналами



t	sin(t)
0	0
0.4189	0.40674
0.8378	0.74314
1.2566	0.95106
1.6755	0.99452
2.0944	0.86603
2.5133	0.58779
2.9322	0.20791
3.3510	-0.20791
3.7699	-0.58779
4.1888	-0.86603
4.6077	-0.99452
5.0265	-0.95106
5.4454	-0.74314
5.8643	-0.40674
6.2832	-2.45e-016

$$\Delta = 2\pi/16 \quad \pi/16 \quad 0.4189$$

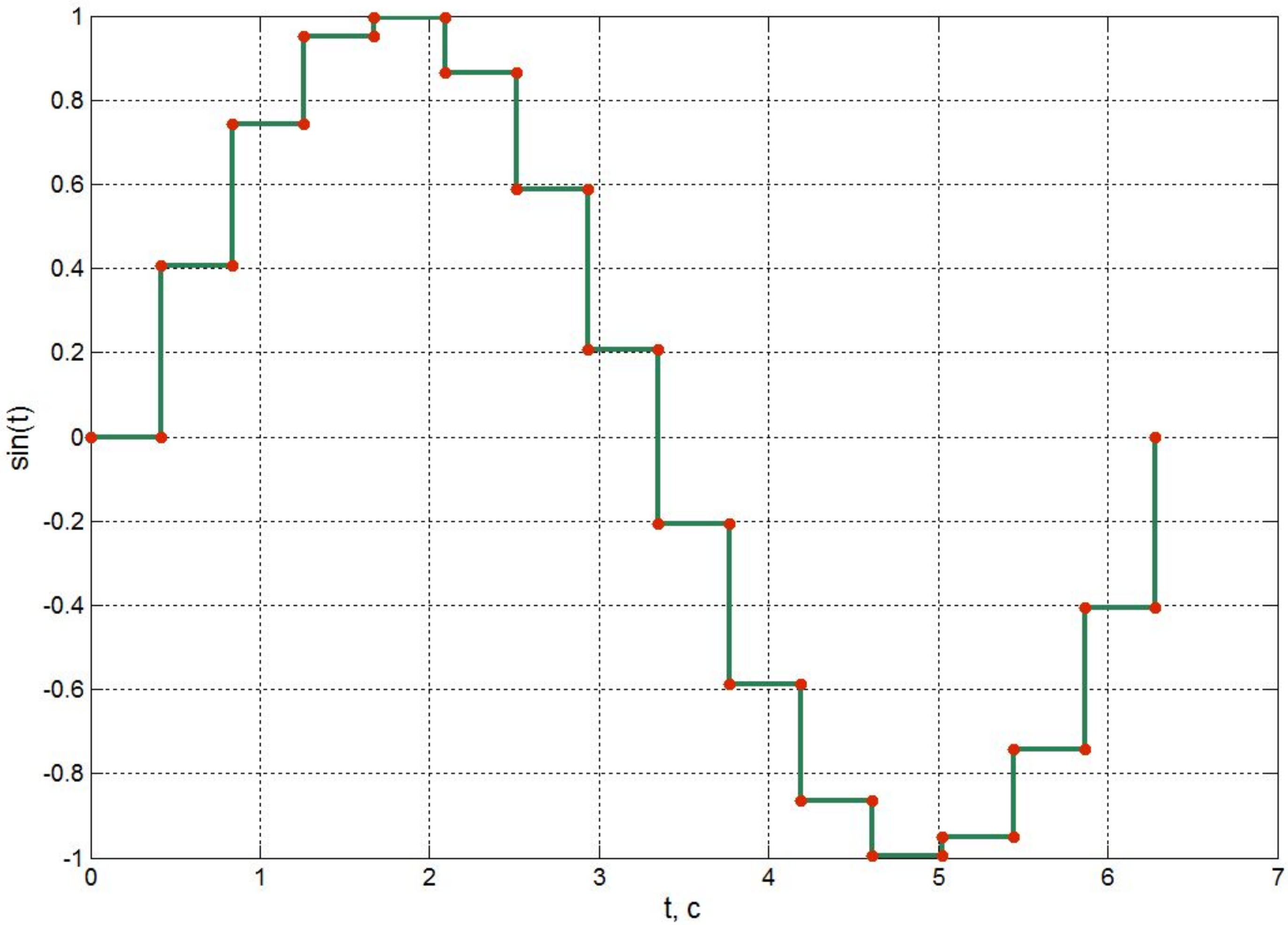
Связи между сигналами



t	sin(t)
0	0
0.4189	0.40674
0.8378	0.74314
1.2566	0.95106
1.6755	0.99452
2.0944	0.86603
2.5133	0.58779
2.9322	0.20791
3.3510	-0.20791
3.7699	-0.58779
4.1888	-0.86603
4.6077	-0.99452
5.0265	-0.95106
5.4454	-0.74314
5.8643	-0.40674
6.2832	-2.45e-016

$$\Delta = 2*\pi/16 \quad \pi/16 \quad 0.4189$$

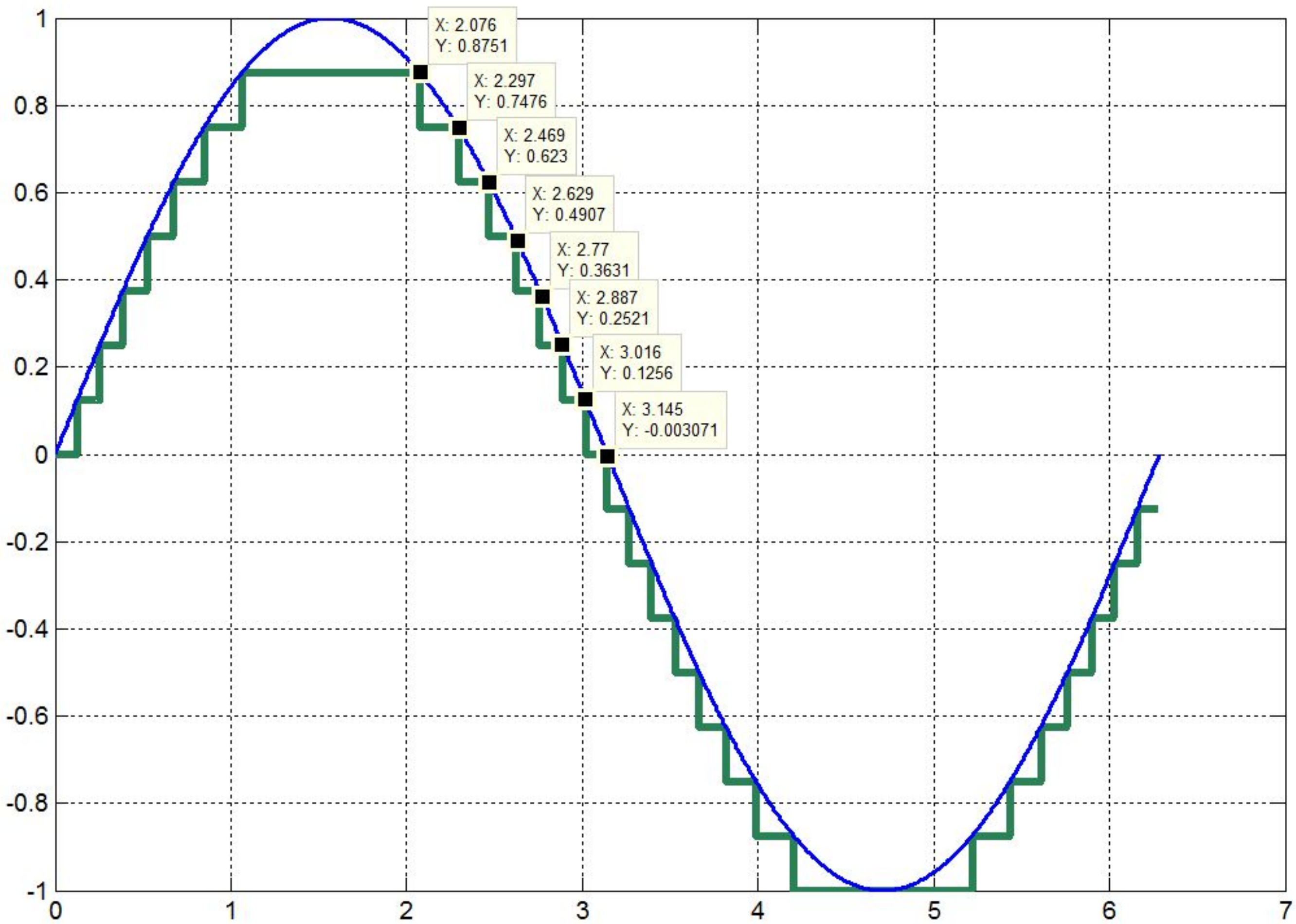
Связи между сигналами



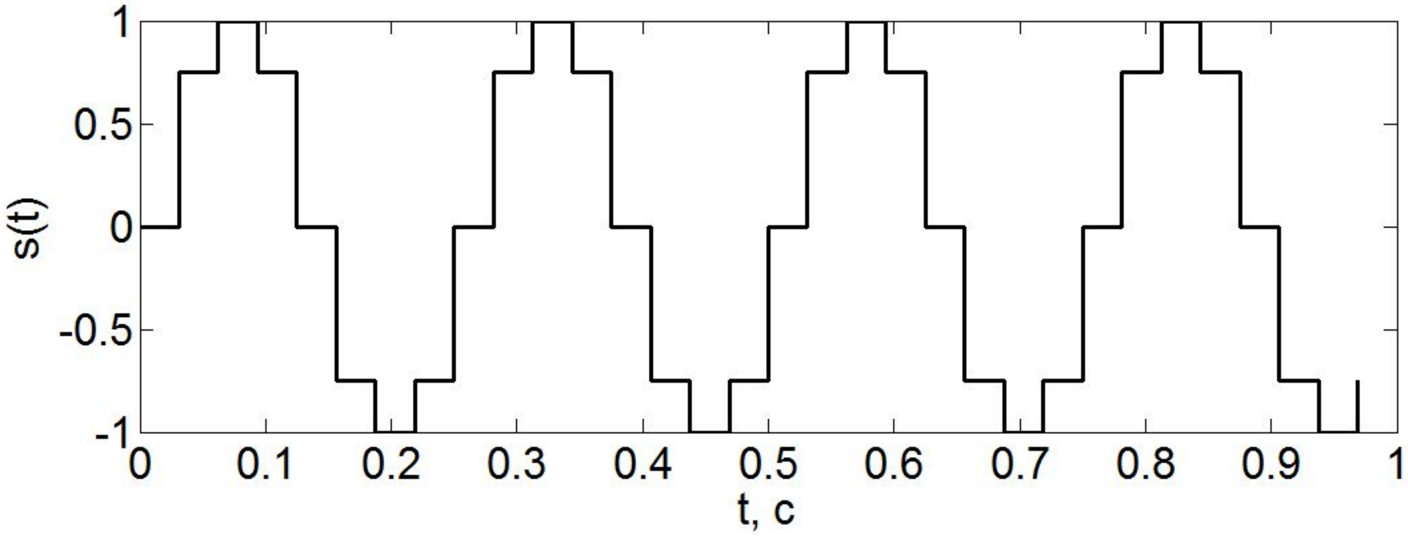
t	sin(t)
0	0
0.4189	0.40674
0.8378	0.74314
1.2566	0.95106
1.6755	0.99452
2.0944	0.86603
2.5133	0.58779
2.9322	0.20791
3.3510	-0.20791
3.7699	-0.58779
4.1888	-0.86603
4.6077	-0.99452
5.0265	-0.95106
5.4454	-0.74314
5.8643	-0.40674
6.2832	-2.45e-016

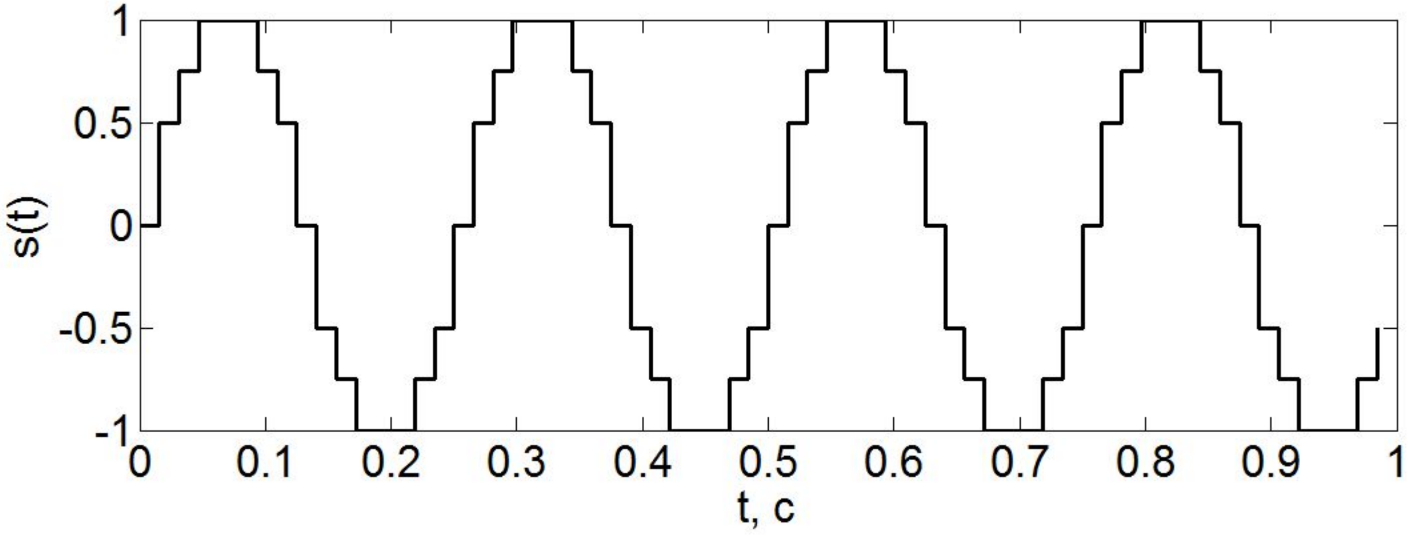
$$\Delta = 2\pi/16 \quad \pi/16 \quad 0.4189$$

Связи между сигналами

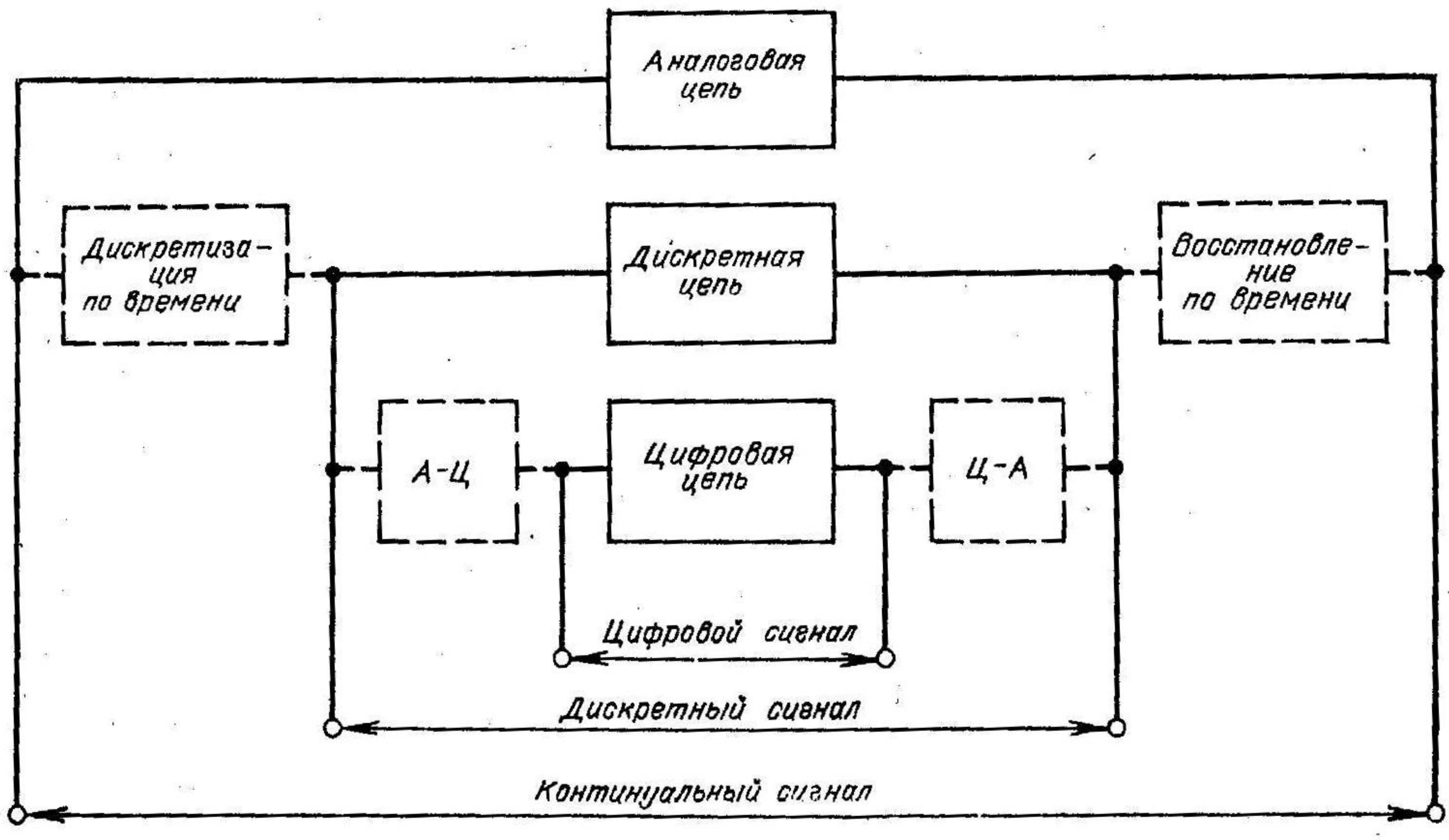


Связи между сигналами

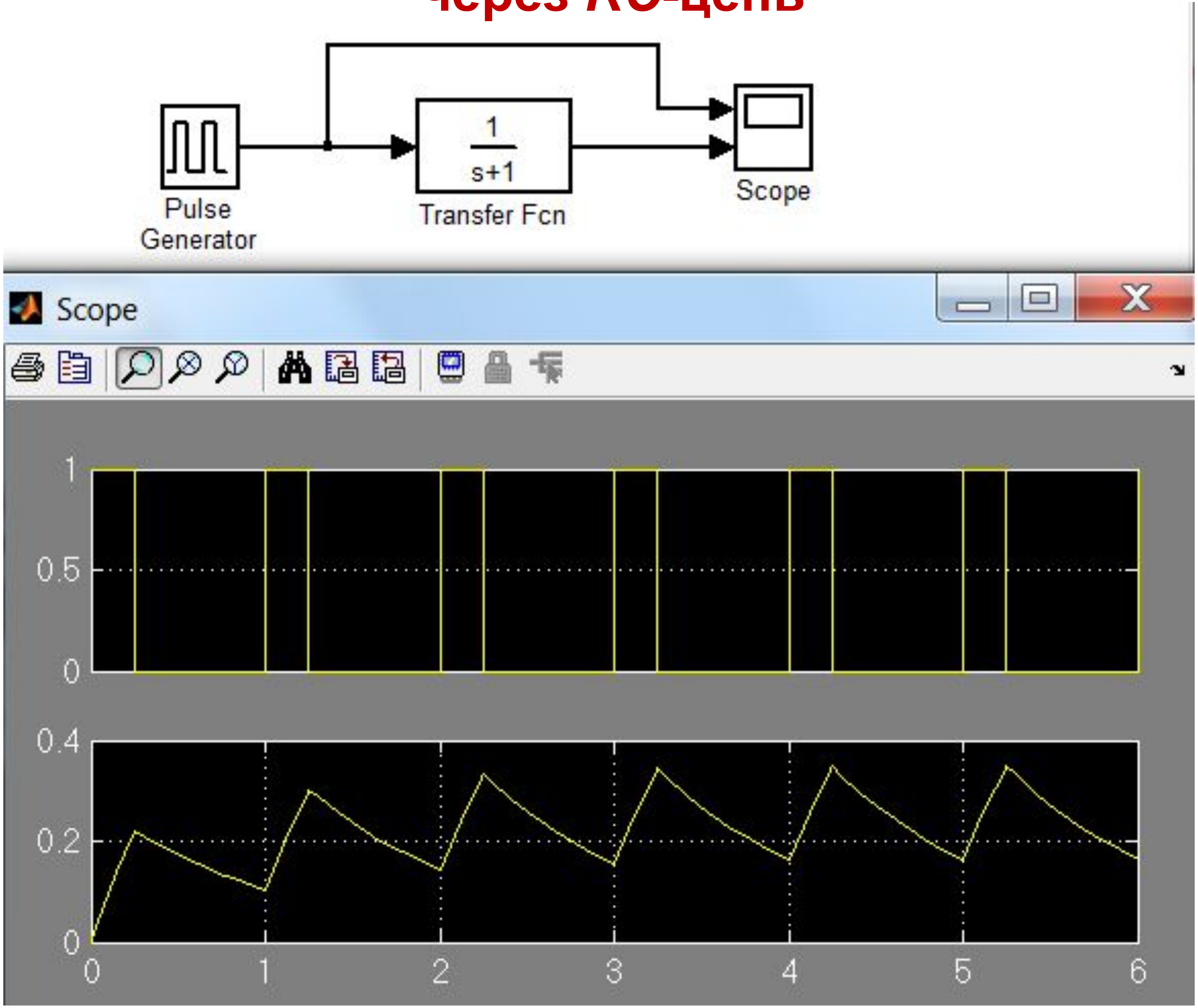




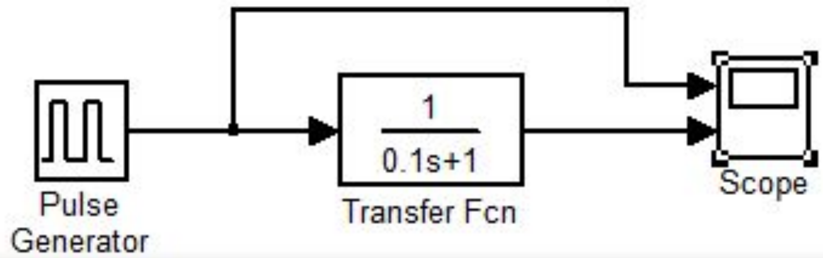
Виды сигнала и соответствующие им цепи



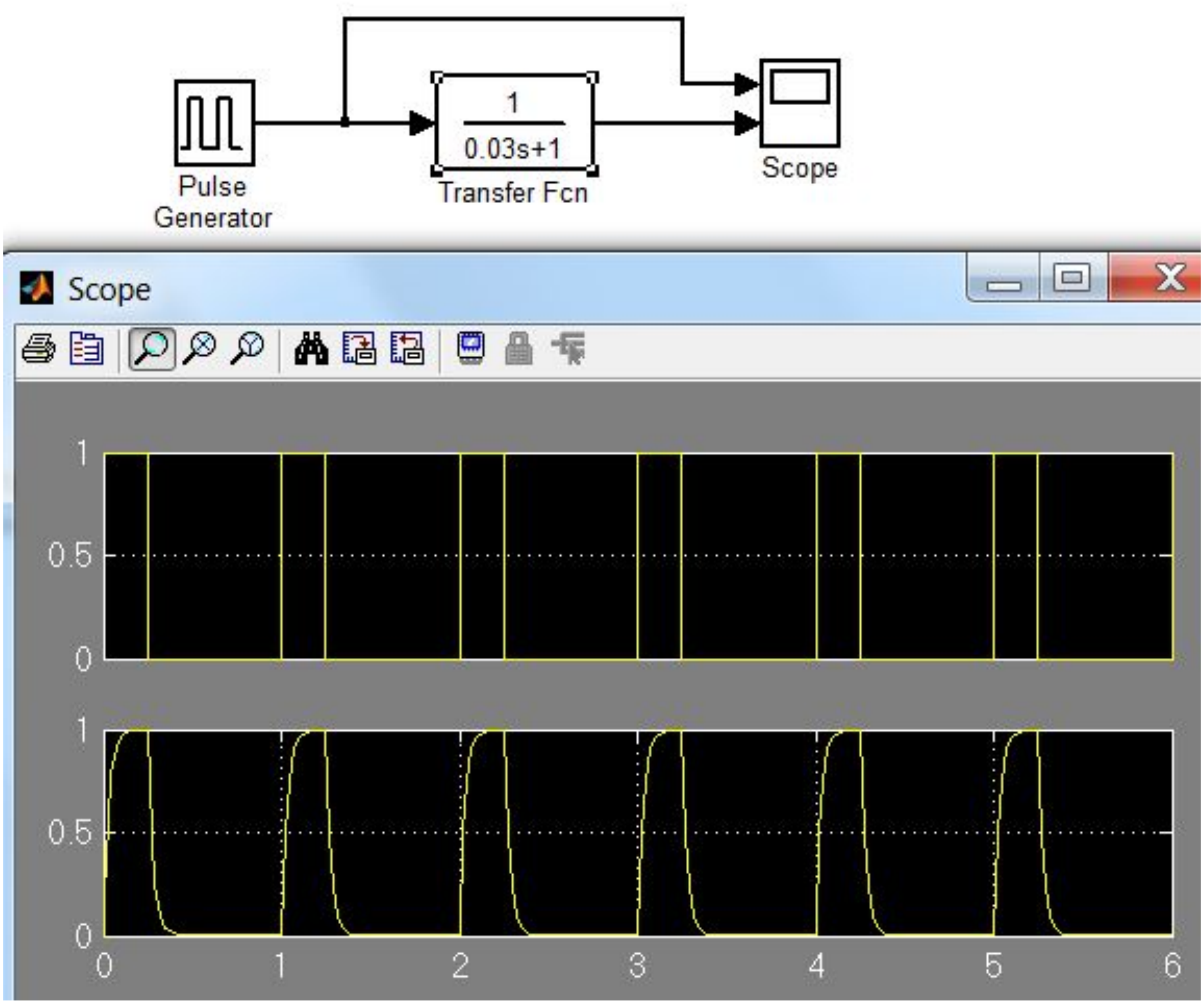
Прохождение прямоугольного импульса через *RC*-цепь



Прохождение прямоугольного импульса через *RC*-цепь



Прохождение прямоугольного импульса через *RC*-цепь



Функция единичного скачка (Хевисайда)

Математическая модель этого предельного сигнала получила название *функции включения* или *функции Хевисайда*:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ {}^1/_2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

В общем случае функция включения может быть смещена относительно начала отсчета времени на величину t_0. Запись смещенной функции такова:

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ {}^1/_2, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases}$$

Представление сигнала единичными ступеньками

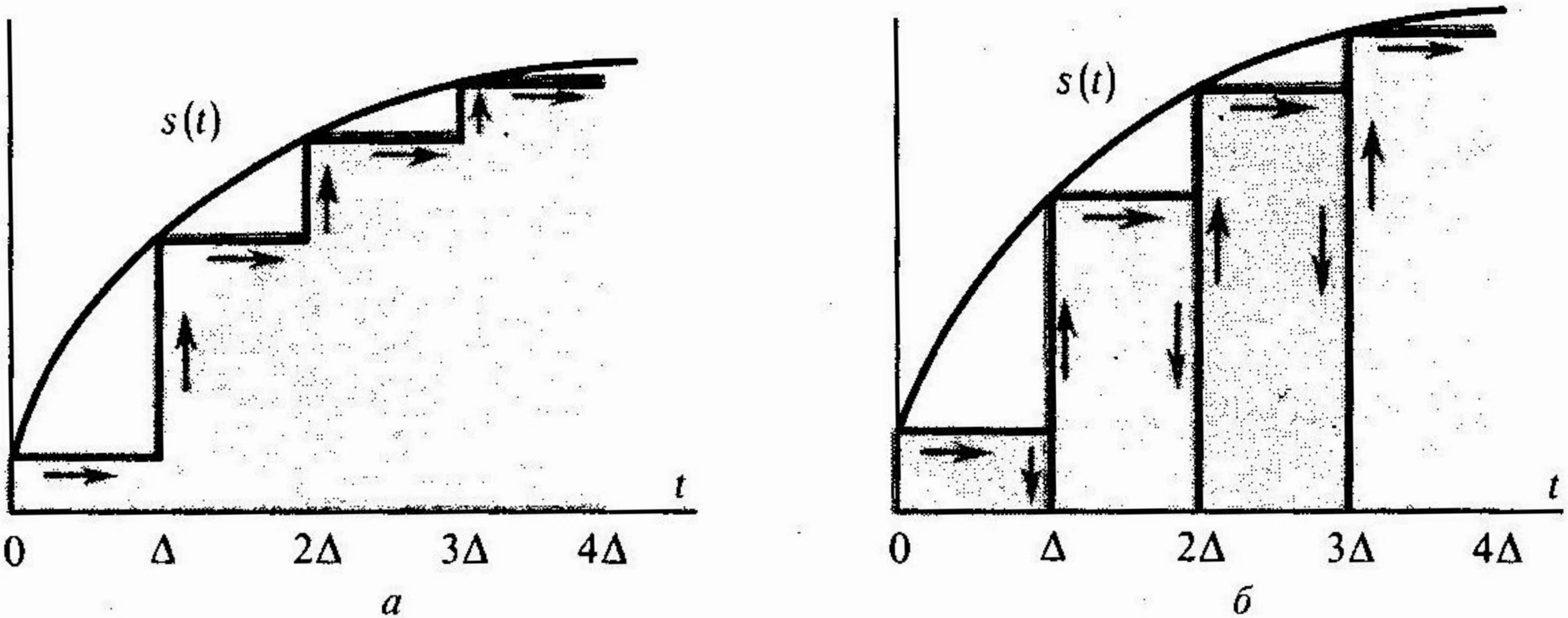
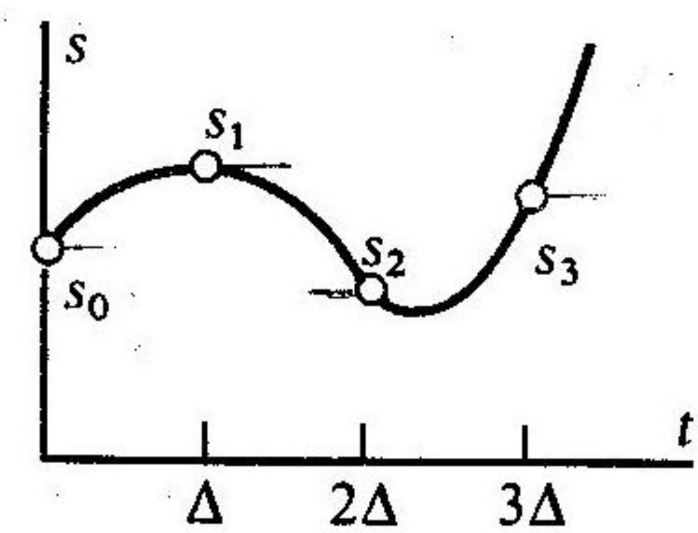


Рис. 1.3. Способы динамического представления сигналов (стрелками показаны пути изменения во времени отдельных элементарных слагаемых)

Динамическое представление произвольного сигнала посредством функций включения. Рассмотрим некоторый сигнал $s(t)$, причем для определенности положим, что $s(t) = 0$ при $t < 0$. Пусть $\{\Delta, 2\Delta, 2\Delta, \ldots\}$ – последовательность моментов времени и $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ – отвечающая им последовательность значений сигнала. Если $s_0 = s(0)$ – начальное значение, то, как видно из построения, текущее значение сигнала при любом t приближенно равно сумме ступенчатых функций:

$$s(t) \approx s_0\sigma(t) + (s_1 - s_0)\sigma(t-\Delta) + (s_2 - s_1)\sigma(t - 2\Delta) + \ldots =$$

$$= s_0\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta).$$

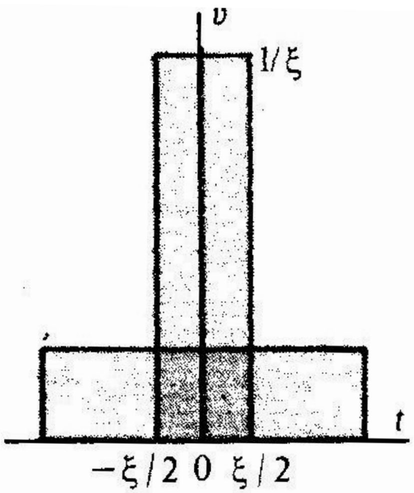


$$\boxed{s(t) = s_0\sigma(t) + \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\sigma(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

Функция единичного импульса (Дирака)

Дельта-функция. Рассмотрим импульсный сигнал прямоугольной формы, заданный следующим образом:

$$v(t;\xi) = \frac{1}{\xi}\left[\sigma\left(t+\frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t-\frac{\xi}{2}\right)\right].$$



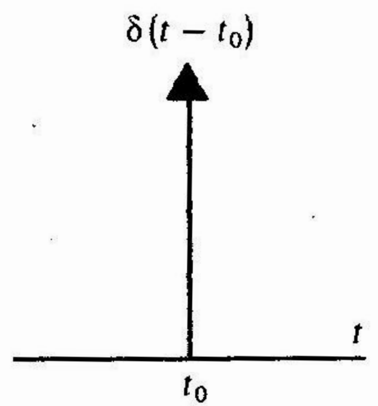
При любом выборе параметра ξ площадь этого импульса равна единице:

$$\Pi_v = \int_{-\infty}^{\infty} v\,\mathrm{d}t = 1.$$

Например, если v – напряжение, то $\Pi_v = 1$ В · с.

Пусть теперь величина ξ стремится к нулю. Импульс, сокращаясь по длительности, сохраняет свою площадь, поэтому его высота должна неограниченно возрастать. Предел последовательности таких функций при $\xi \to 0$ носит название *дельта-функции*, или *функции Дирака*:

$$\delta(t) = \lim_{\xi\to 0} v(t;\xi).$$



Функция единичного импульса (Дирака)

Дельта-функция – интересный математический объект. Будучи равной нулю всюду, за исключением точки $t = 0$ (принято говорить, что она сосредоточена в этой точке), дельта-функция тем не менее обладает единичным интегралом

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.}$$

Дельта-функция как раз и является математической моделью короткого внешнего воздействия с единичным импульсом (площадью).

В математике показано, что свойства дельта-функции присущи пределам многих последовательностей обычных классических функций. Приведем два характерных примера:

$$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n/(2\pi)}\, \exp(-nt^2/2),$$

$$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} [\sin nt/(\pi t)].$$

Динамическое представление сигнала посредством дельта-функций. Вернемся к задаче описания аналогового сигнала суммой примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (см. рис. 1.3, *б*). Если s_k – значение сигнала на k-м отсчете, то элементарный импульс с номером k представляется так:

$$\eta_k(t) = s_k\left[\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)\right].$$

В соответствии с принципом динамического представления исходный сигнал $s(t)$ должен рассматриваться как сумма таких элементарных слагаемых:

$$s(t) = \sum^{\infty} \eta_k(t).$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta}\left[\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)\right]\Delta.$$

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, необходимо заменить суммирование интегрированием по формальной переменной τ, дифференциал которой $d\tau$ будет отвечать величине Δ.

Поскольку

$$\lim_{\Delta \to 0} [\sigma(t-\tau) - \sigma(t-\tau-\Delta)] \frac{1}{\Delta} = \delta(t-\tau),$$

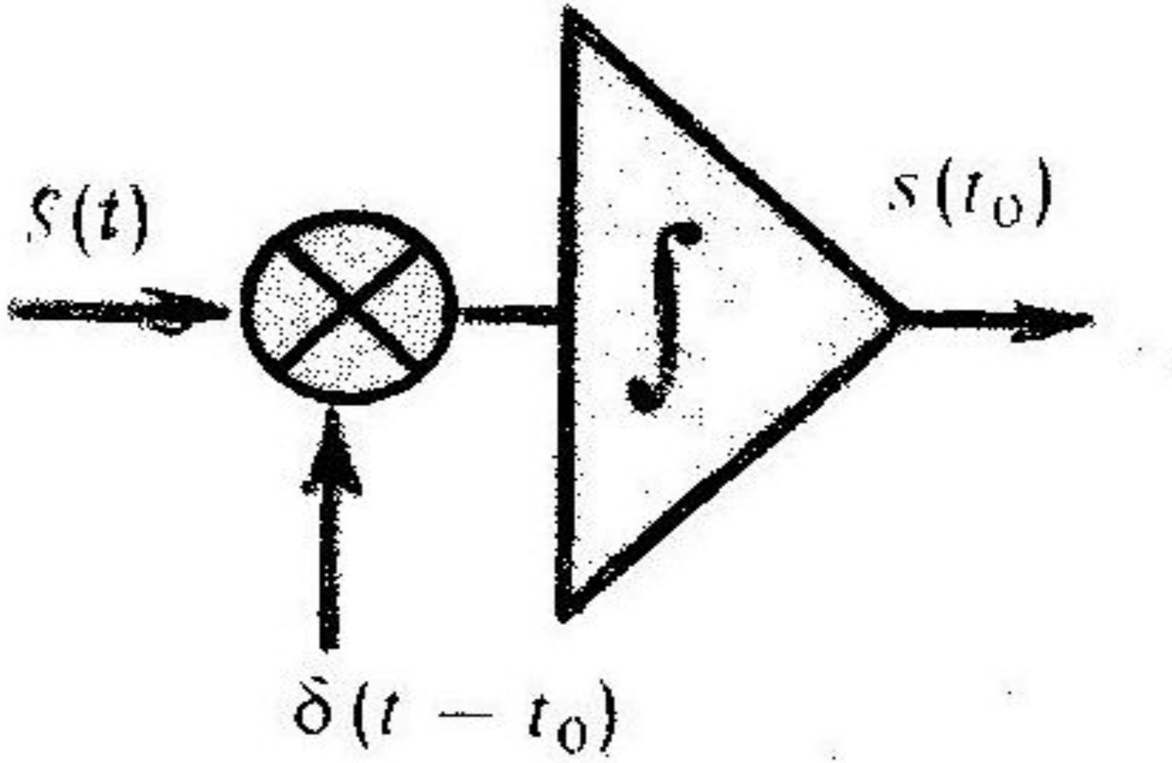
получим искомую формулу динамического представления сигнала

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau.}$$

Можно усмотреть важное свойство дельта-функции: *ее физическая размерность такая же, как и размерность частоты*, т. е. $с^{-1}$.

Итак, если непрерывную функцию умножить на дельта-функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен δ-импульс. Принято говорить, что в этом состоит *фильтрующее свойство* дельта-функции.

Фильтрующее свойство функции Дирака



Обобщенные функции как математические модели сигналов. В классической математике полагают, что функция $s(t)$ должна принимать какие-то значения в каждой точке оси t. Однако рассмотренная функция $\delta(t)$ не вписывается в эти рамки – ее значение при $t = 0$ не определено вообще, хотя эта функция и имеет единичный интеграл. Очевидна необходимость расширить само понятие функции как математической модели сигнала. Современная математика преодолела эту трудность, введя принципиально новое понятие *обобщенной функции*.

В основе идеи обобщенной функции лежит простое интуитивное соображение. Держа в руках и рассматривая какой-нибудь предмет, мы его поворачиваем, стремясь получить множество проекций этого объекта на всевозможные плоскости. Аналогом «проекции» исследуемой функции $f(t)$ может служить, например, значение интеграла

$$\boxed{(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t}$$

при известной функции $\varphi(t)$, которую называют *пробной функцией*.

Функционал

Каждой функции $\varphi(t)$ отвечает, в свою очередь, некоторое конкретное числовое значение (f, φ). Поэтому говорят, что формула задает некоторый *функционал* на множестве пробных функций $\varphi(t)$. Непосредственно видно, что данный функционал линеен, т. е.

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2).$$

Если этот функционал к тому же еще и непрерывен, то говорят, что на множестве пробных функций $\varphi(t)$ задана обобщенная функция $f(t)$. Подчеркнем, что интеграл в правой части выражения нужно понимать формально-аксиоматически, а не как предел соответствующих интегральных сумм. Именно с таких позиций следует рассматривать формулу динамического представления:

$$(\delta(t - \tau), s(\tau)) = s(t).$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t),$$

Операции с обобщёнными функциями

причем это равенство необходимо понимать именно в смысле теории обобщенных функций, поскольку в классическом смысле производная $\sigma'(t)$ при $t = 0$ просто не существует.

Таким же образом можно определить и производную дельта-функции:

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

Хотя явная формула для $\delta'(t)$ отсутствует, такой математический объект существует и действует по правилу — каждой классической функции $\varphi(t)$ он сопоставляет числовое значение ее производной в нуле с точностью до знака.

Благодарю за внимание!