РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

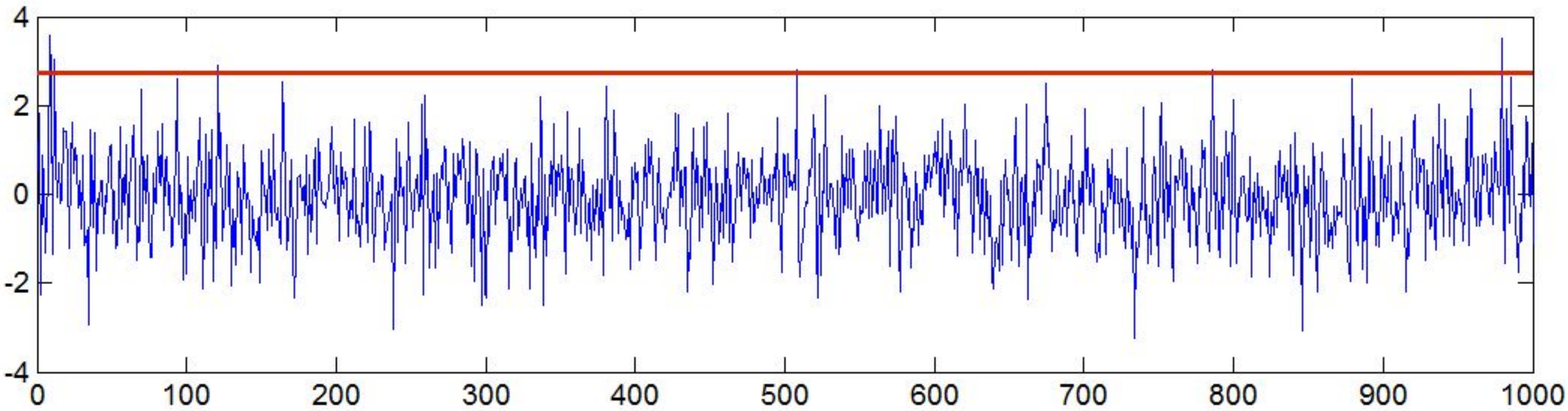
Лекционный курс

Лекция 11

Доцент Трухин М.П.

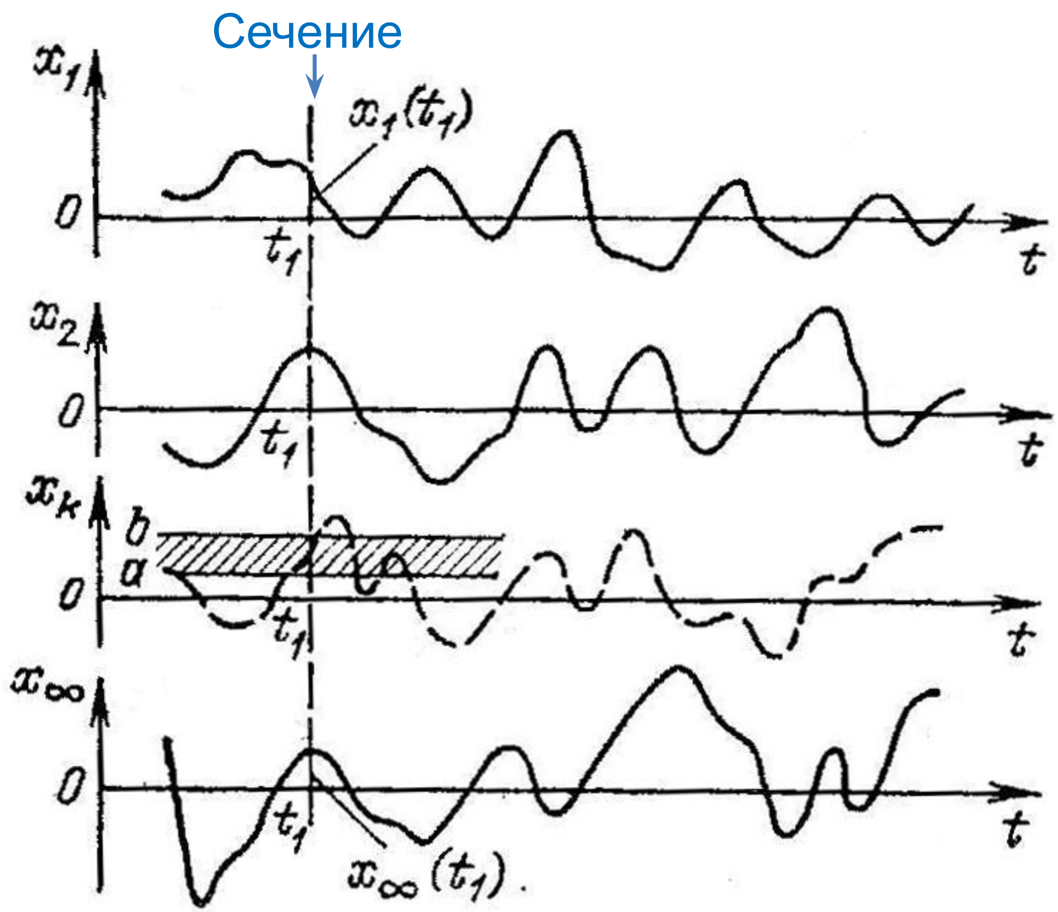
6. Случайные процессы

Случайным процессом называется процесс, то есть некоторая изменяющаяся во времени величина, значение которой в любой момент времени неизвестно.



Случайной величиной называется некоторая неизменяющаяся во времени величина, значение которой заранее неизвестно.

Реализации случайных процессов



Сечение в момент t_1

$$P_{t_1}(a < x \leqslant b) = \int_a^b p(x;\, t_1)\, dx \qquad \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x;\, t_1)\, dx = 1$$

6.1. Параметры случайных процессов

Математическое ожидание

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x; t)\,dx;$$

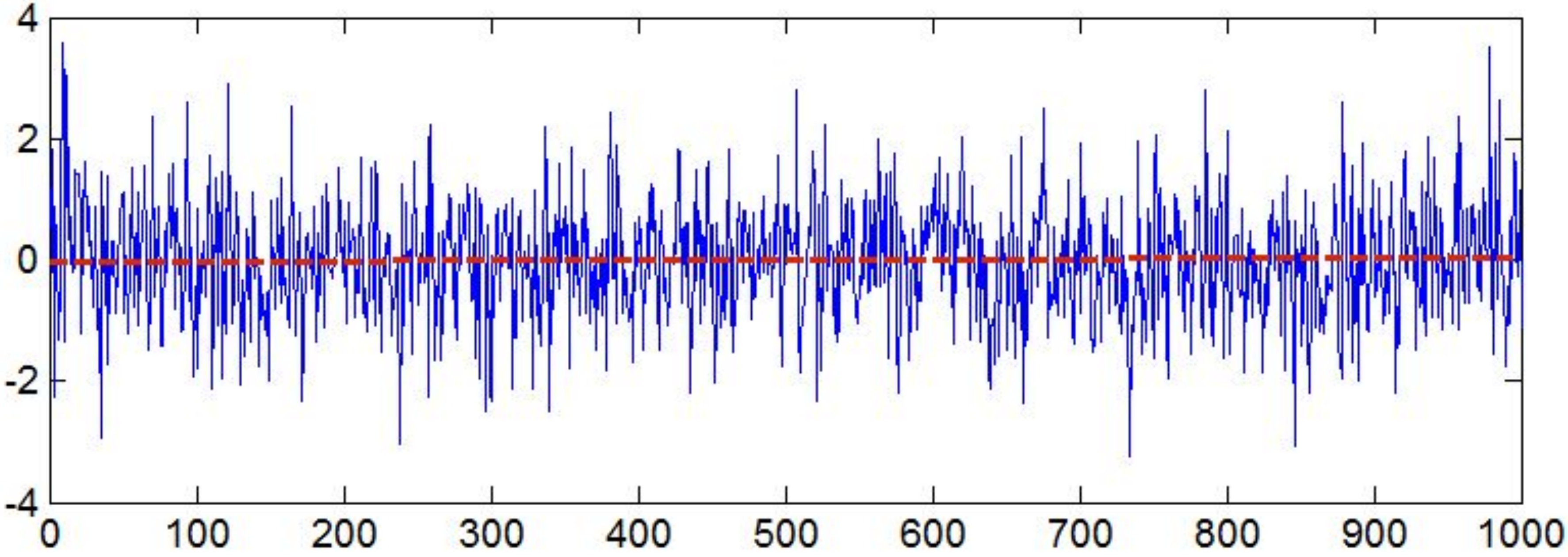
Дисперсия

$$D_x(t) = M\{[x(t) - m_x(t)]^2\};$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x(t) = \sqrt{M\{[x(t) - m_x(t)]^2\}} = \sqrt{D_x(t)}.$$

Пример случайного процесса 1

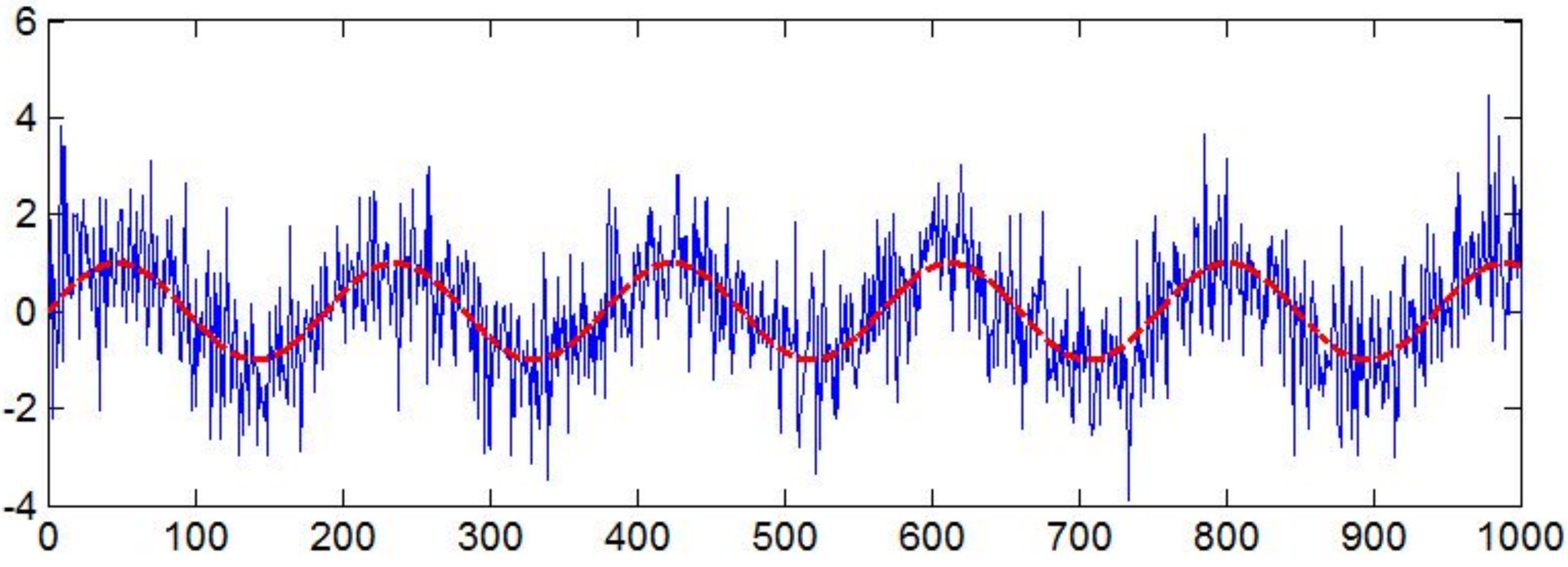


Математическое ожидание $m_x(t) = 0$

Дисперсия $D_x(t) = 1$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma_x(t) = 1$

Пример случайного процесса 2

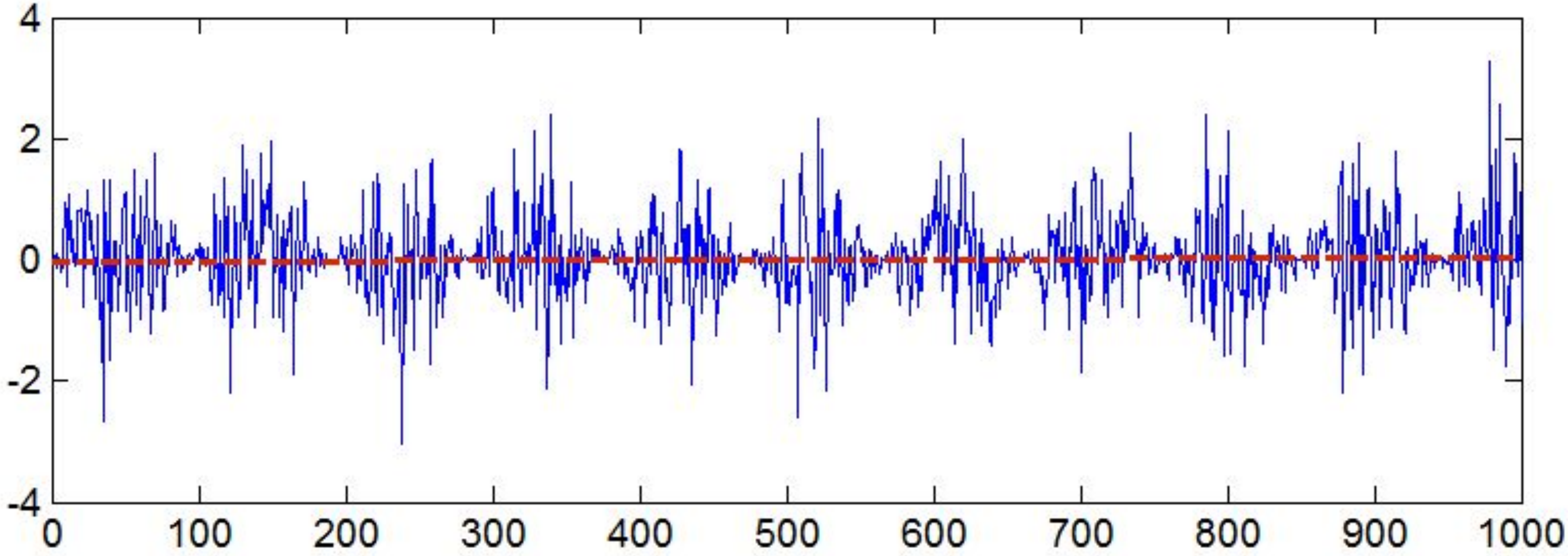


Математическое ожидание $m_x(t) =$ 1*sin(t/30)

Дисперсия $D_x(t) =$ 1

Среднеквадратическое отклонение $\sigma_x(t) =$ 1

Пример случайного процесса 3



Математическое ожидание $m_x(t) = 0$

Дисперсия $D_x(t) = 1^* \left|\sin\left(\frac{t}{30}\right)\right|$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma_x(t) = \sqrt{\left|\sin\left(\frac{t}{30}\right)\right|}$

6.2. Ковариационная функция случайного процесса

Исчерпывающей вероятностной характеристикой случайного процесса является n-мерная плотность вероятности при достаточно больших n. Однако большое число задач, связанных с описанием случайных сигналов, удается решать на основе двумерной плотности вероятности.

Задание двумерной плотности вероятности $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ позволяет, в частности, определить важную характеристику случайного процесса — *ковариационную функцию*

$$K_x(t_1, t_2) = M[x(t_1)\, x(t_2)].$$

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, p(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2.$$

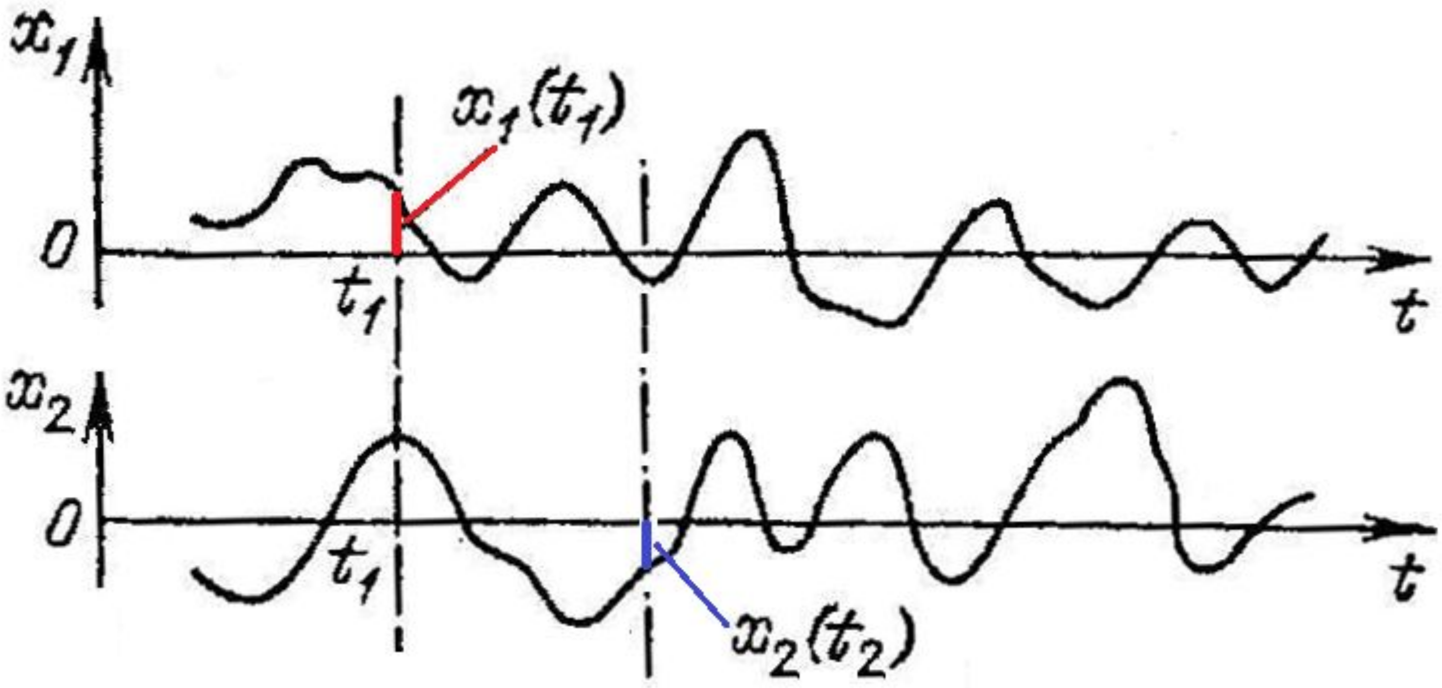
При $t_2 = t_1$ двумерная случайная величина $x_1 x_2$ вырождается в одномерную величину $x_1^2 = x_2^2$. Можно поэтому написать

$$K_x(t_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\, p(x_1; t_1)\, dx_1 = M[x^2(t)].$$

Часто применяется нормированная корреляционная функция

$$r_x(\tau) = R_x(\tau)/D_x = [K_x(\tau) - (\overline{x})^2]/D_x.$$

Ковариационная функция случайного процесса



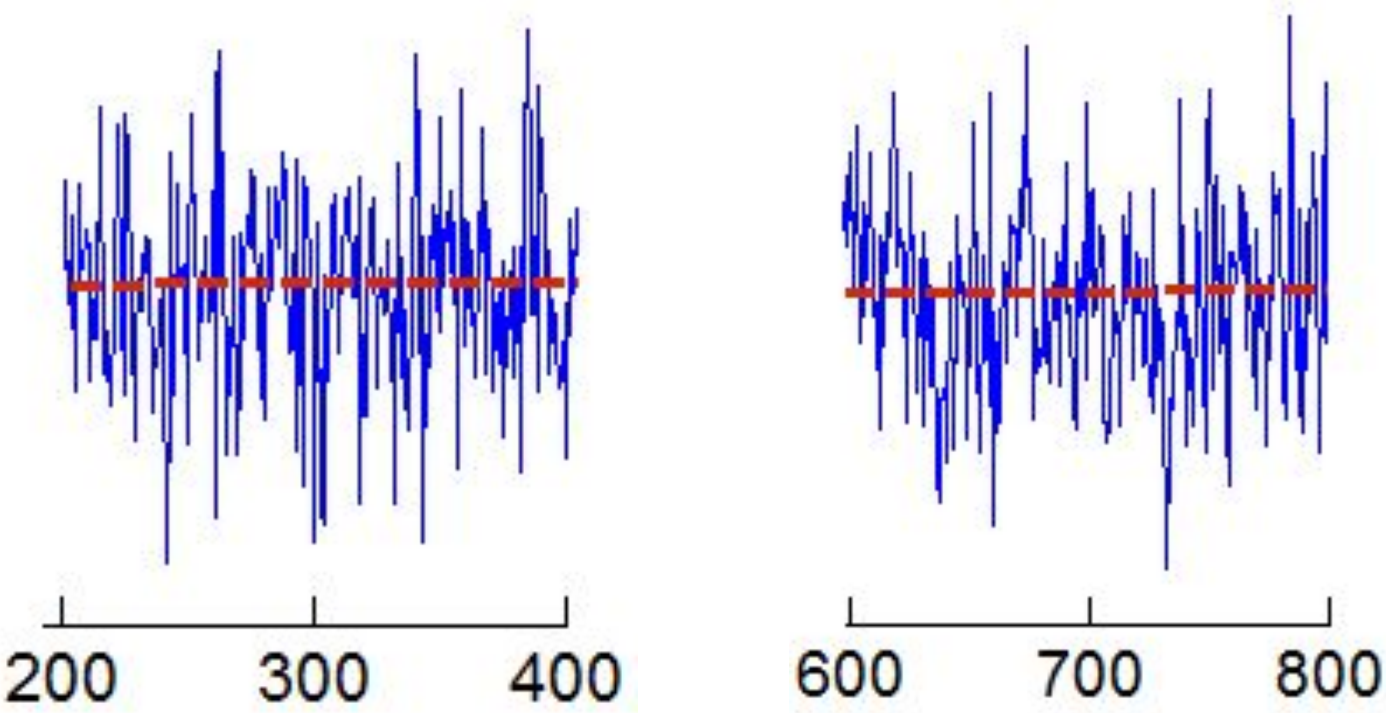
$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2.$$

6.3. Стационарность случайных процессов

Случайный процесс называется стационарным, если его статистические характеристики одинаковы во всех сечениях.

Случайный процесс называется строго стационарным или стационарным в узком смысле, если любая его *n*-мерная плотность вероятности инвариантна (независима) относительно временного сдвига

$$p(x_1, \dots, x_n;\, t_1, \dots, t_n) = p(x_1, \dots, x_n;\, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$



Стационарность случайных процессов

Стационарность процесса в широком смысле можно трактовать как стационарность в рамках корреляционной теории (для моментов не выше второго порядка).

Таким образом, для случайного процесса, стационарного в широком смысле, предыдущие выражения можно записывать без обозначения фиксированных моментов времени. В частности,

$$m_x = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx,$$

$$K_x(\tau) = M[x(t)\, x(t+\tau)],$$

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2,$$

$$D_x = K_x(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - m_x^2}.$$

6.4. Эргодичность случайных процессов

Дальнейшее упрощение анализа случайных процессов достигается при использовании условия *эргодичности* процесса. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при определении любых статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной теоретически бесконечно длинной реализации.

Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие его стационарности. В соответствии с определением эргодического процесса соотношения эквивалентны следующим выражениям, в которых операция усреднения по времени обозначена чертой:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt,$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x(t+\tau)\,dt,$$

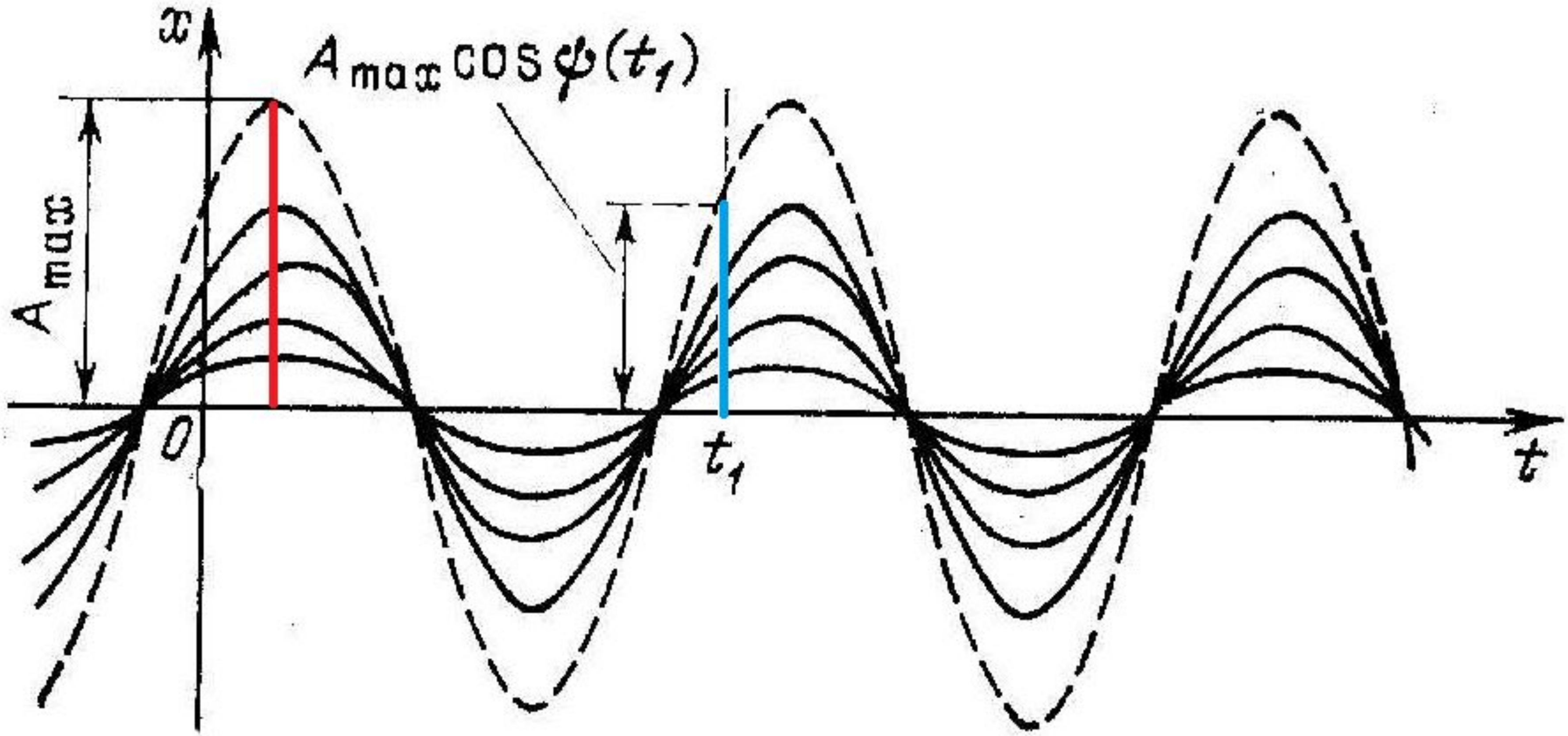
$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - (\overline{x(t)})^2,$$

$$D_x = K_x(0) - (\overline{x(t)})^2 = \sigma_x^2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - (\overline{x(t)})^2}.$$

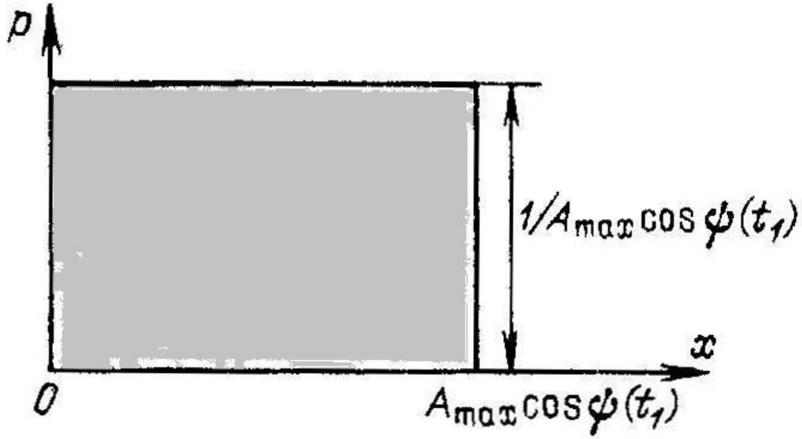
Пример 1: Гармоническое колебание со случайной амплитудой

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) = A\cos\psi(t)$$



$$p(x;t_1) = 1/A_{max}\cos\psi(t_1),\ \ 0 < x < A_{max}\cos\psi(t_1)$$

Продолжение примера 1: Гармоническое колебание со случайной амплитудой



$$M[x^2(t_1)] = \frac{1}{A_{\max}\cos\psi(t_1)} \int\limits_0^{A_{\max}\cos\psi(t_1)} x^2\,dx = \frac{1}{3} A_{\max}^2 \cos^2\psi(t_1).$$

Дисперсия

$$D_x(t_1) = M[x^2(t_1)] - [M[x(t_1)]]^2 = \frac{1}{3} A_{\max}^2 \cos^2\psi(t_1) - \frac{1}{4} A_{\max}^2 \cos^2\psi(t_1) = \frac{1}{12} A_{\max}^2 \cos^2\psi(t_1).$$

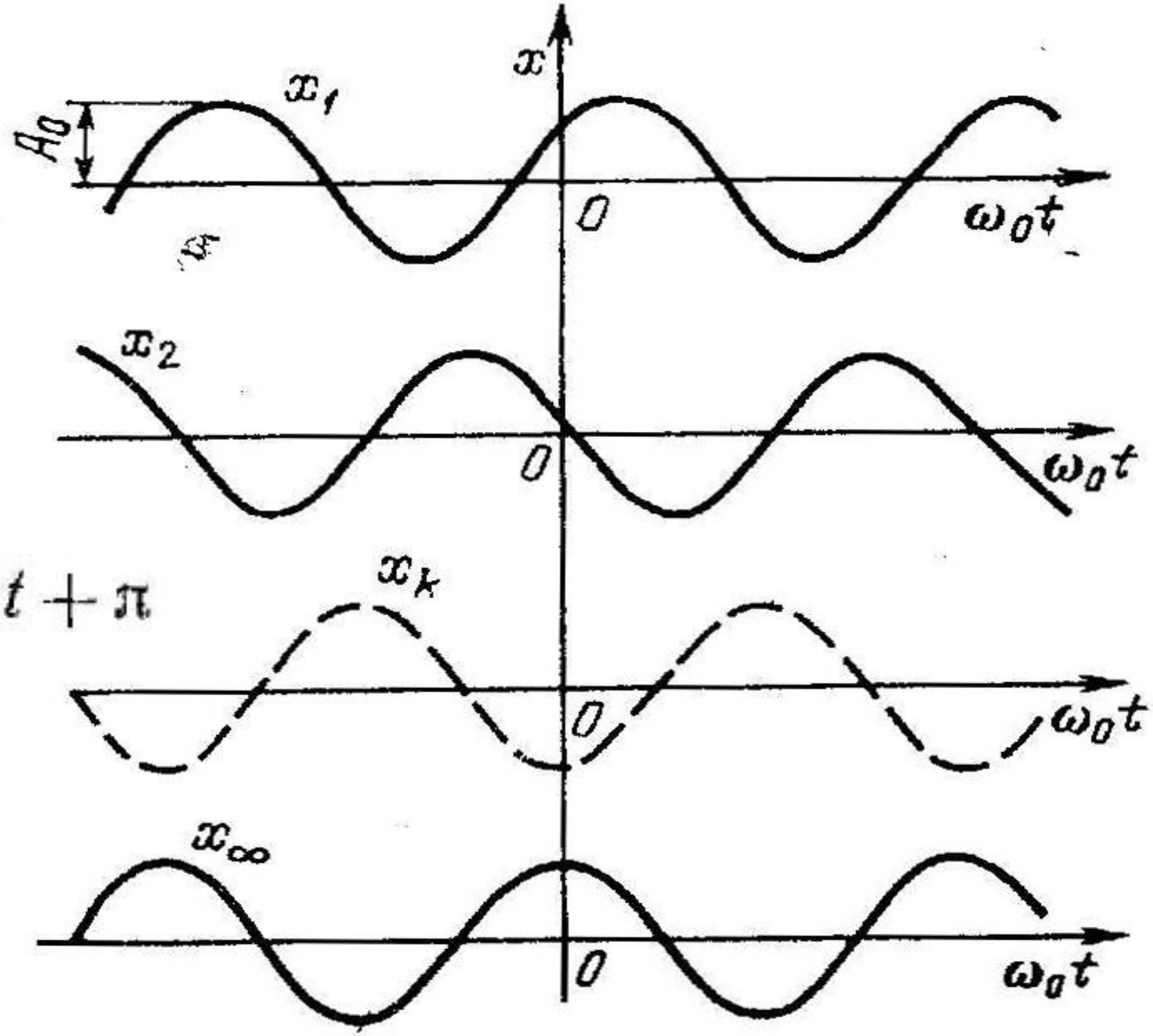
Случайный процесс *нестационарный и неэргодический.*

Пример 2: Гармоническое колебание со случайной фазой

$$x_k(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_k) = \cos\psi_k(t)$$

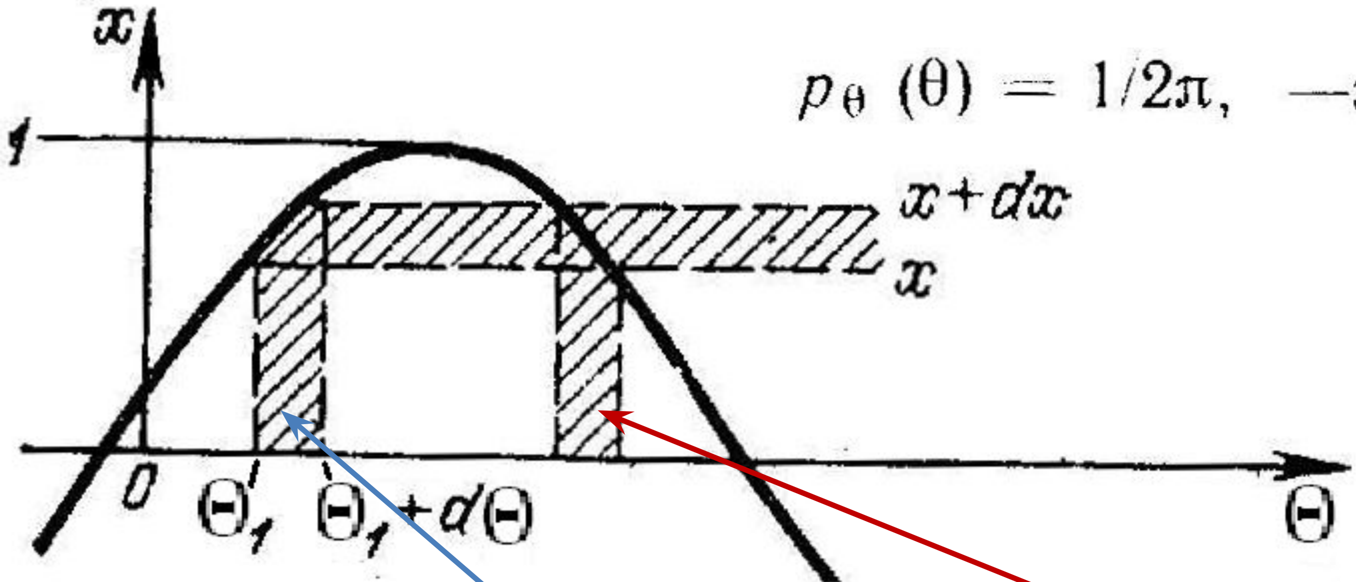
$$p_\theta(\theta) = 1/2\pi,$$
$$-\pi < \theta < \pi$$

$$p_\psi(\psi) = 1/2\pi,$$
$$\omega_0 t - \pi < \psi < \omega_0 t + \pi$$



Продолжение примера 2: Гармоническое колебание со случайной фазой

$$p_\theta(\theta) = 1/2\pi, \quad -\pi < \theta < \pi$$

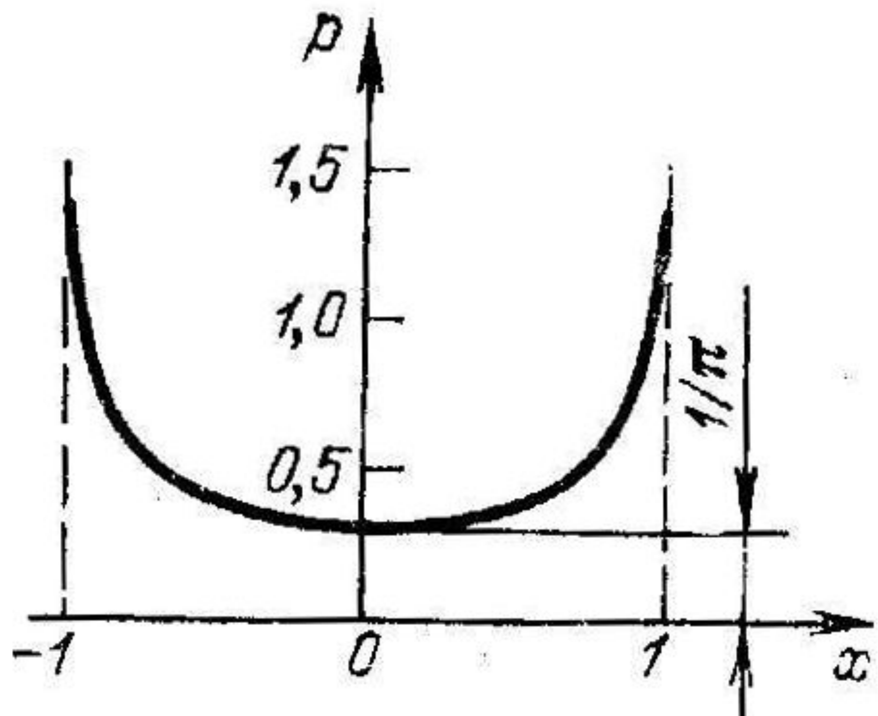


Метод обратной функции для $x = \sin(\Theta)$ даёт функцию $\Theta = \arcsin(x)$

Согласно методу для первой однозначной зависимости (и то же для второй)

$$p(x) = p(\Theta)\left|\frac{d\Theta}{dx}\right| = p(\Theta)\left|\frac{d(\arcsin(x))}{dx}\right| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

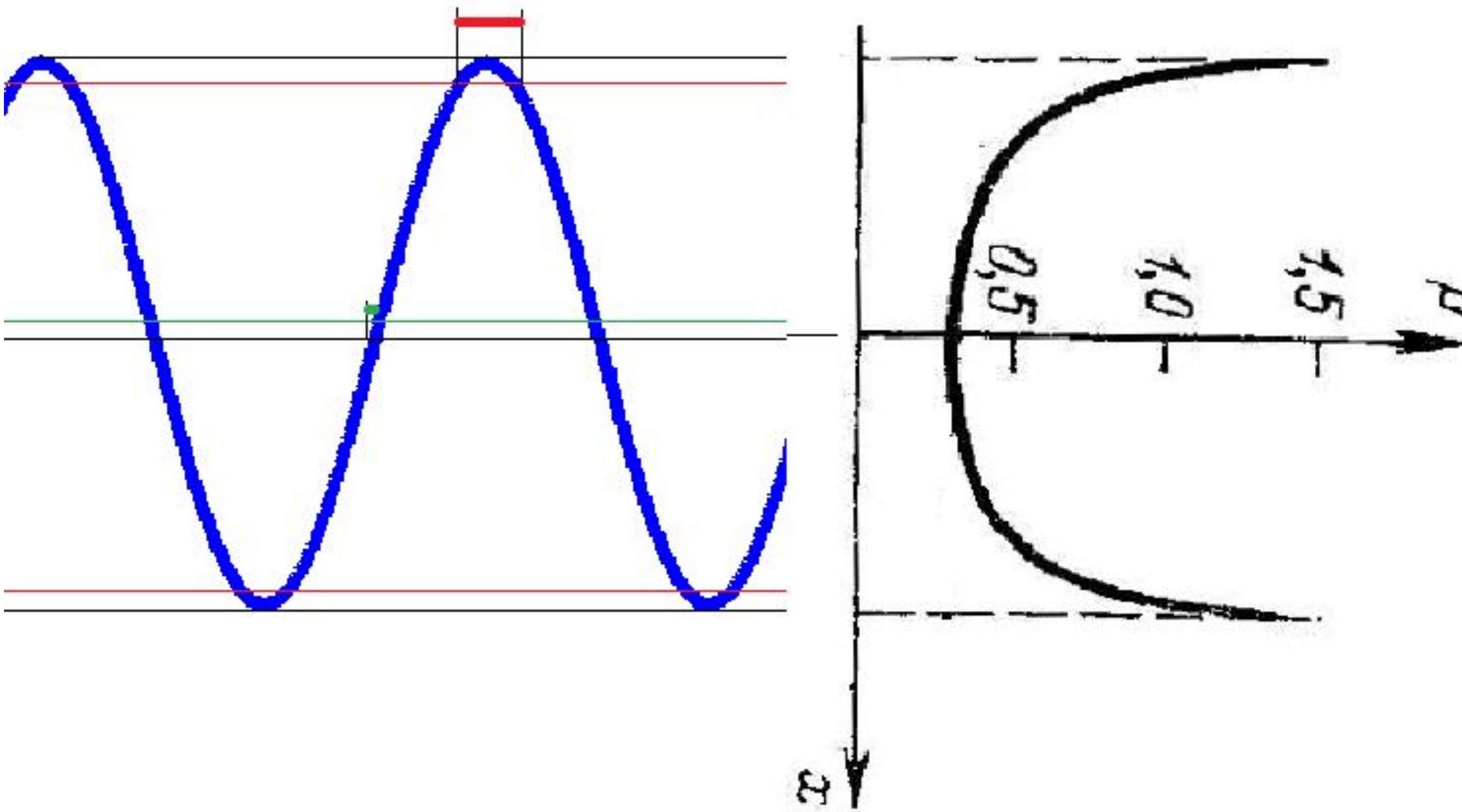
Продолжение примера 2: Плотность вероятности гармонического колебания со случайной фазой



Для двух полупериодов

$$p_x(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Продолжение примера 2: Плотность вероятности гармонического колебания со случайной фазой со случайной фазой



$$p_x(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Продолжение примера 2: Гармоническое колебание со случайной фазой

$$M[x(t)] = \int_{-1}^{1} x p_x(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

совпадает со средним по времени

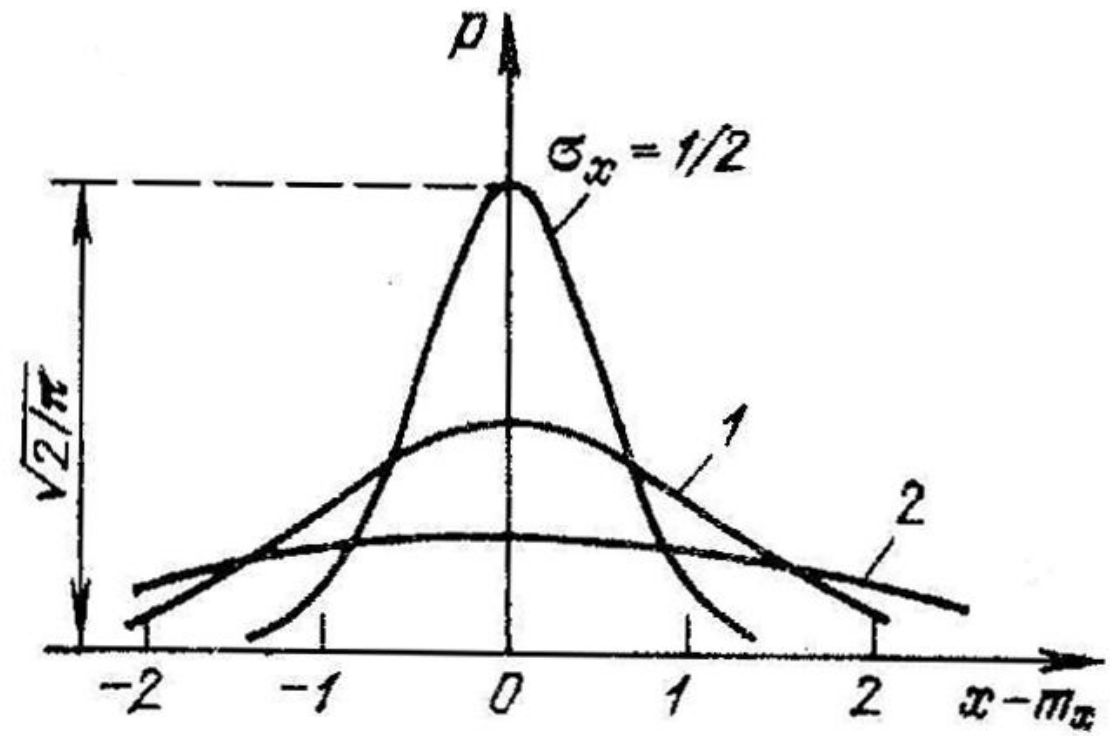
$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega_0 t+\theta)\,dt = 0$$

$$x(t_1)\,x(t_2) = \cos(\omega_0 t_1+\theta)\cos(\omega_0 t_2+\theta) = {}^1/_2\{\cos\omega_0(t_2-t_1) + \cos[\omega_0(t_1+t_2)+2\theta]\}$$

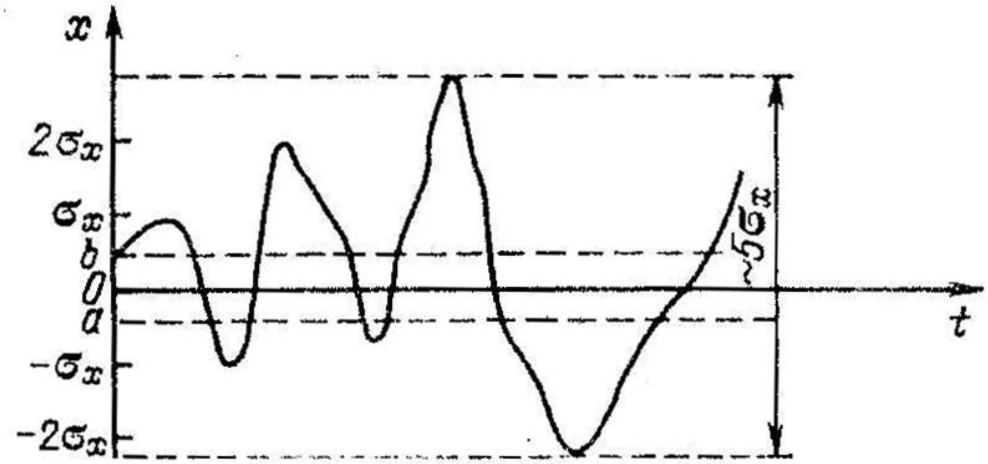
$$\boxed{R_x(t_1,\ t_2) = M[x(t_1)\,x(t_2)] = {}^1/_2\cos\omega_0\tau}$$

6.5. Гауссовский случайный процесс

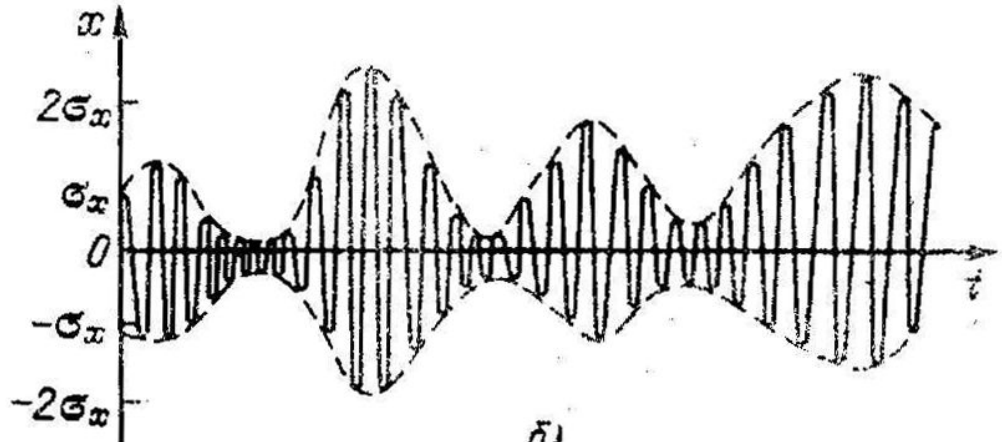
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$



Гауссовский случайный процесс



а)



б)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

Гауссовский случайный процесс

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_a^b e^{-x^2/2\sigma_x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_0^b e^{-x^2/2\sigma_x^2}\,dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_0^a e^{-x^2/2\sigma_x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2}\,dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a/\sigma_x} e^{-y^2/2}\,dy =$$

$$= \Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right).$$

$$\boxed{\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-y^2/2}\,dy}$$

Гауссовский случайный процесс

Интервал значений	Вероятность пребывания в интервале	Вероятность пребывания вне интервала
$(-\sigma_x, \sigma_x)$	$2\cdot 0,3413 = 0,6826$	$\sim 0,317$
$(-2\sigma_x, 2\sigma_x)$	$2\cdot 0,4772 = 0,9544$	$\sim 0,046$
$(-3\sigma_x, 3\sigma_x)$	$2\cdot 0,49865 = 0,9973$	$\sim 0,003$

$$\boxed{P(-b < x < b) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2}\,dy = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right)}$$

6.6. Спектральная плотность мощности случайного процесса

$$[W(x)] = \left[\frac{\text{Мощность}}{\text{Полоса частот}}\right] = [\text{Мощность} \times \text{время}] = [\text{Энергия}]$$

$$Э_{kT} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT}^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}\,d\omega$$

$$x_k^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega)\,d\omega$$

Спектральная плотность мощности случайного процесса

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega,$$

где

$$W_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|\mathbf{X}_T(\omega)|^2}{T}$$

$$W_x(\omega) = (\overline{x(t)})^2 \cdot 2\pi\delta(\omega) + W_\sim(\omega),$$

где $W_\sim(\omega)$ — сплошная часть спектра, соответствующая флуктуационной составляющей x, а $\delta(\omega)$ — дельта-функция

Спектральная плотность мощности случайного процесса

$$D_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\sim}(\omega)\, d\omega = \sigma_x^2.$$

Для процесса с нулевым средним

$$\overline{x^2(t)} = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(2\pi f)\, df$$

$W_x(\omega)$ является четной и неотрицательной функцией ω

6.7. Теорема Винера - Хинчина

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

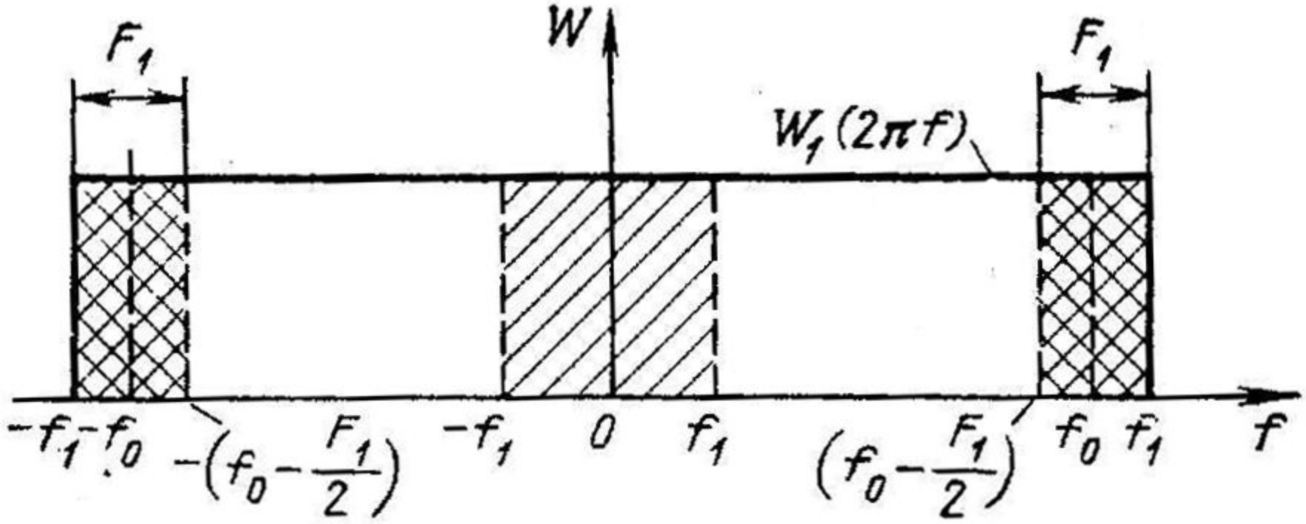
$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

Теорема Винера – Хинчина
для процессов с нулевым средним

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

Теорема Винера – Хинчина



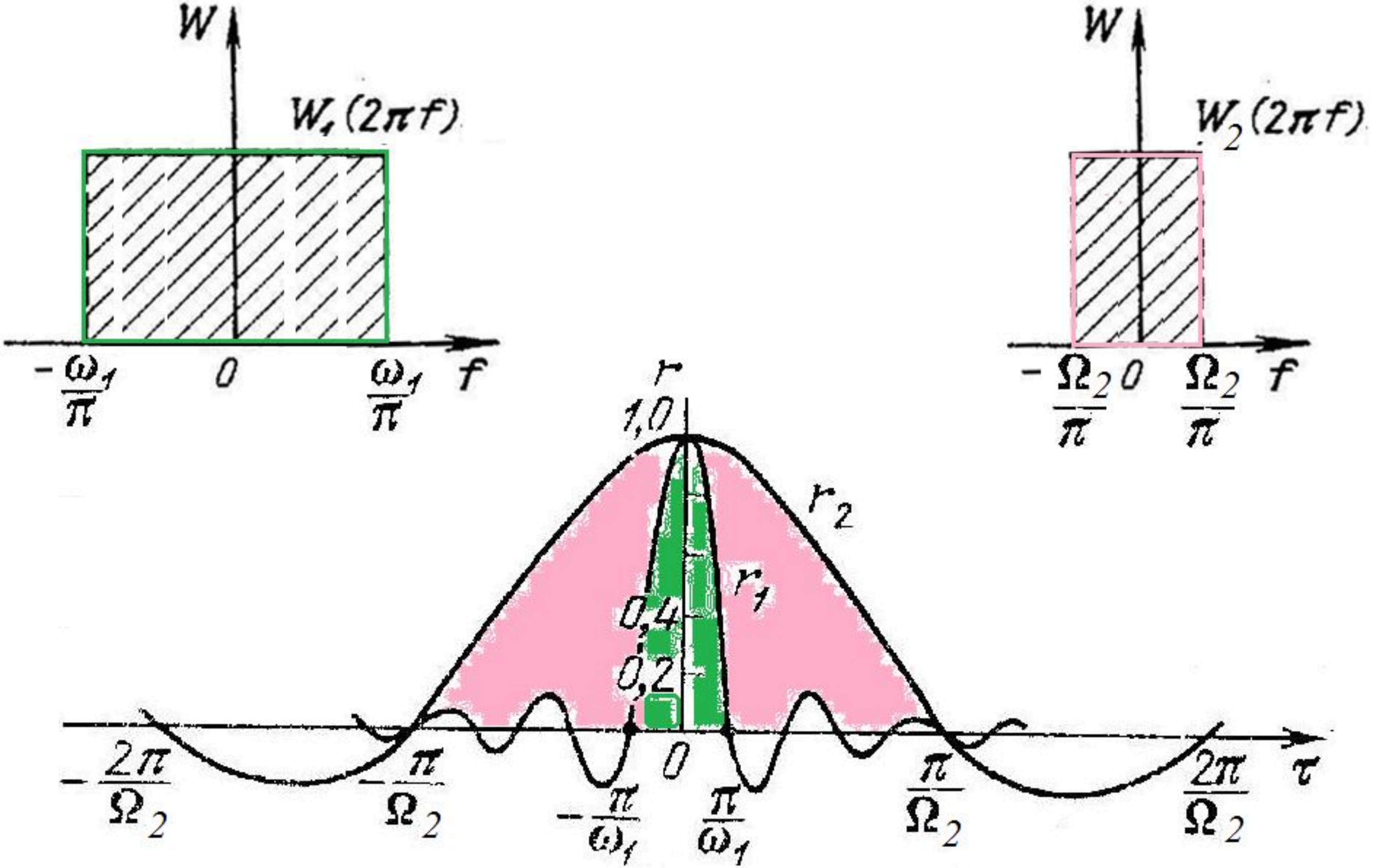
чем шире спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции, и соответственно чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса

$$W_x(\omega) = W_0 = \text{const}$$

$$R_x(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega = W_0\, \delta(\tau)$$

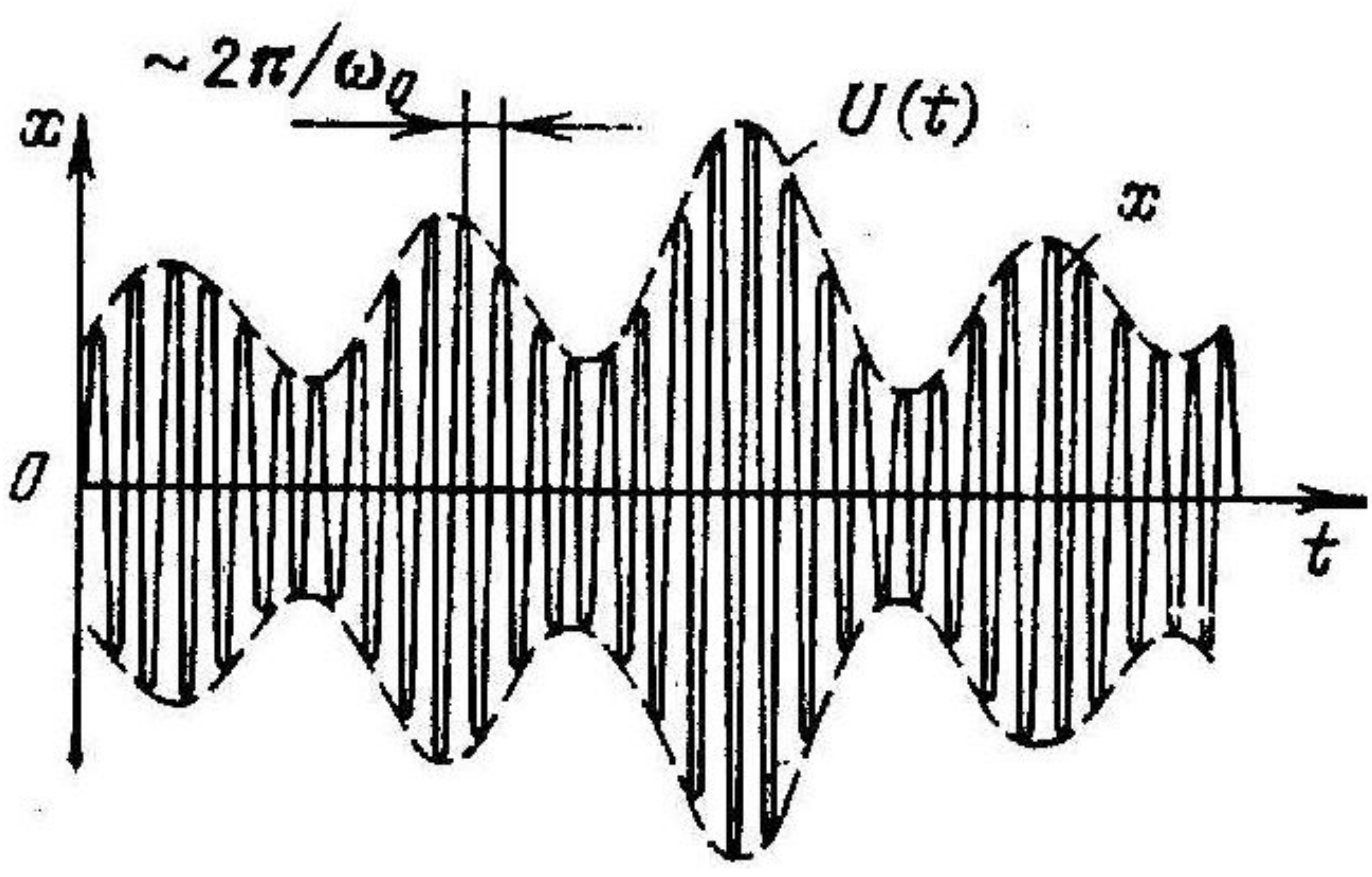
где $\delta(\tau)$ — дельта-функция

6.8. Идеальный низкочастотный случайный процесс

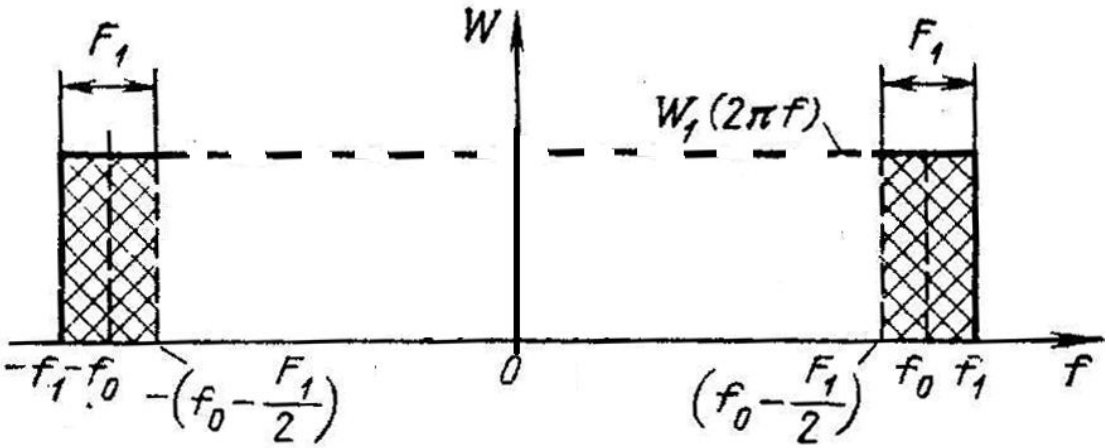


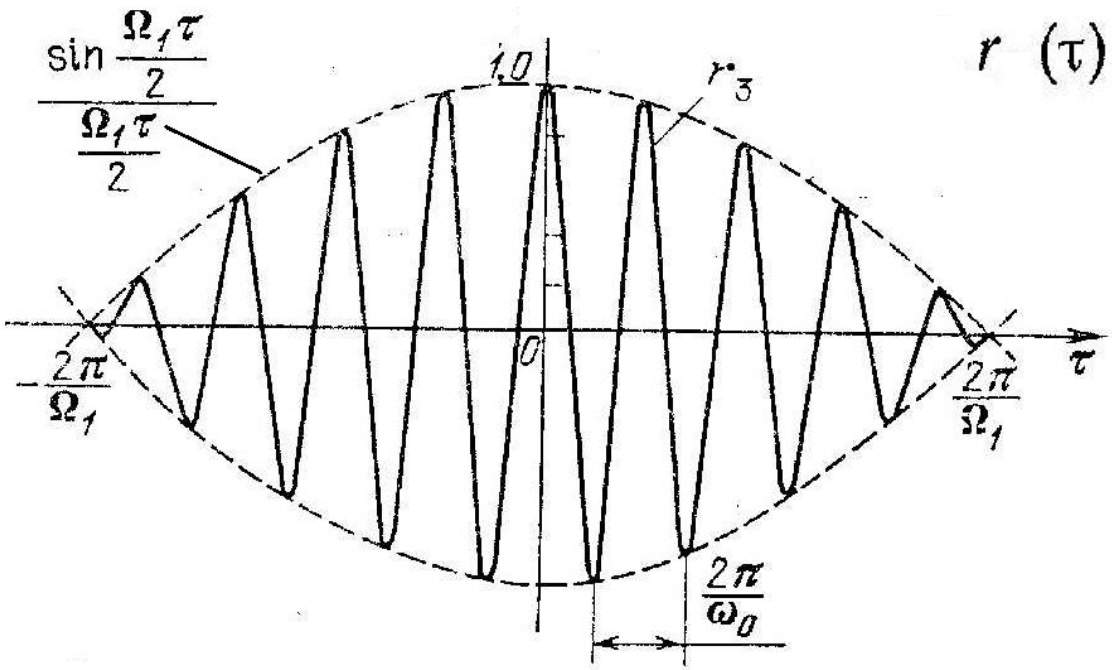
СП с равномерным в полосе частот спектром

$$x(t) = U(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$



Нормированная корреляционная функция СП с равномерным в полосе частот спектром





$$r(\tau) = \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \cos \omega_0 \tau$$

6.9. Взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(\tau) = M[x(t)\,y(t+\tau)], \quad R_{yx}(\tau) = M[y(t)\,x(t+\tau)]$$

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y(t+\tau)\,dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\,x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \overline{x(t-\tau)\,y(t)},$$

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\,x(t-\tau)} = \overline{y(t-\tau)\,x(t)}$$

Взаимная корреляционная функция

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_{xx}(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_{yy}(\tau) \end{bmatrix}$$

При $\tau = 0$ $R_{xx}(0) = \sigma_x^2$ и $R_{yy}(0) = \sigma_y^2$, а $R_{xy}(0) = R_{yx}(0)$

$$s(t) = x(t) + y(t)$$

$$D_s = \mathrm{R}_s(0) = D_x + D_y + R_{xy}(0) + R_{yx}(0) = D_x + D_y + 2R_{xy}(0)$$

Независимые случайные процессы

$$\boxed{D_s = D_x + D_y}$$

Взаимная корреляционная функция

$$s(t) = x(t) + y(t)$$

$$W_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = W_x(\omega) + W_y(\omega) + W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega)$$

$$W_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \quad W_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$W_{xy}(\omega) = W^{*}_{yx}(\omega)$$

$$W_{xy}(\omega) + W_{yx}(\omega) = 2\mathrm{Re}\,[W_{xy}(\omega)] = 2\mathrm{Re}\,[W_{yx}(\omega)]$$

$$W_s(\omega) = W_x(\omega) + W_y(\omega) + 2\mathrm{Re}\,[W_{xy}(\omega)]$$

Взаимная корреляционная функция

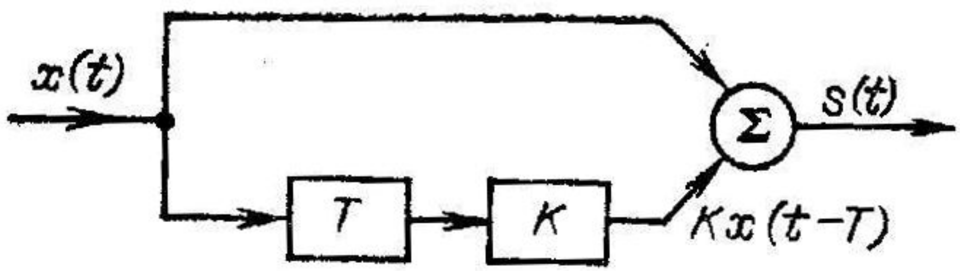
$$s(t) = x(t) + y(t)$$

Если $D_s = D_x + D_y$, то процессы $x(t)$ и $y(t)$ являются независимыми и аддитивными

Если случайные процессы $x(t)$ и $y(t)$ статистически независимы, то $W_{xy}(\omega) = 0$ и спектр суммы $s(t) = x(t) + y(t)$ равен сумме спектров $W_x(\omega)$ и $W_y(\omega)$ и, следовательно, мощность процесса $s(t)$ равна сумме мощностей процессов $x(t)$ и $y(t)$

Взаимная корреляционная функция СП и такого же задержанного СП

$$x(t) \text{ и } y = Kx(t-T)$$



$$R_{xx}(\tau) = R_x(\tau);$$

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \overline{Kx(t)\,x(t-T+\tau)} = KR_x(\tau-T),$$

$$R_{yx}(\tau) = \overline{y(t)\,x(t+\tau)} = \overline{Kx(t-T)\,x(t+\tau)} = KR_x(\tau+T),$$

$$R_{yy}(\tau) = R_y(\tau) = \overline{y(t)\,y(t+\tau)} = \overline{K^2x(t-T)\,x(t-T+\tau)} = K^2R_x(\tau)$$

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_x(\tau) & KR_x(\tau-T) \\ KR_x(\tau+T) & K^2R_x(\tau) \end{bmatrix}$$

$$D_s = D_x + KR_x(-T) + KR_x(T) + K^2D_x = D_x[1 + K^2 + 2Kr_x(T)]$$

Благодарю за внимание!