РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ
И СИГНАЛЫ

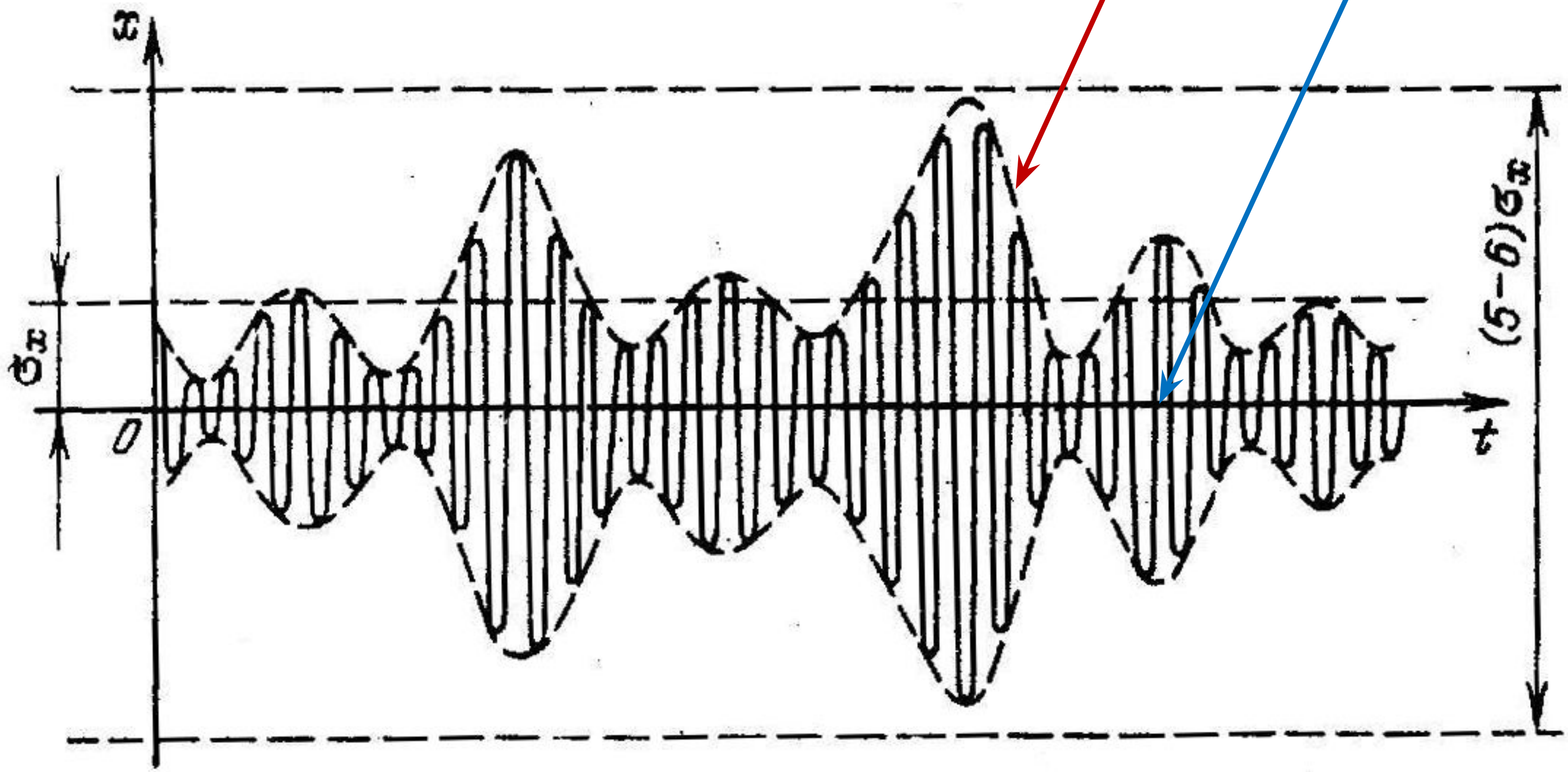
Лекционный курс

Лекция 12

Доцент Трухин М.П.

7. Узкополосный случайный процесс

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)\cos\psi(t)$$



Узкополосный случайный процесс

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)] = A(t)\cos\psi(t)$$

$A(t)$ - медленно меняющаяся амплитуда

$\psi(t)$ - медленно меняющаяся фаза

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)},$$

где $\hat{x}(t)$ — функция, сопряженная по Гильберту исходной функции $x(t)$, а ω_0 выбрана таким образом, что фаза $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно-зависящего от t

7.1.Огибающая узкополосного СП

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

Квадратурные составляющие

$$A_c(t) = A(t)\cos\theta(t), \quad A_s(t) = A(t)\sin\theta(t)$$

Медленно меняющаяся амплитуда

Медленно меняющаяся фаза

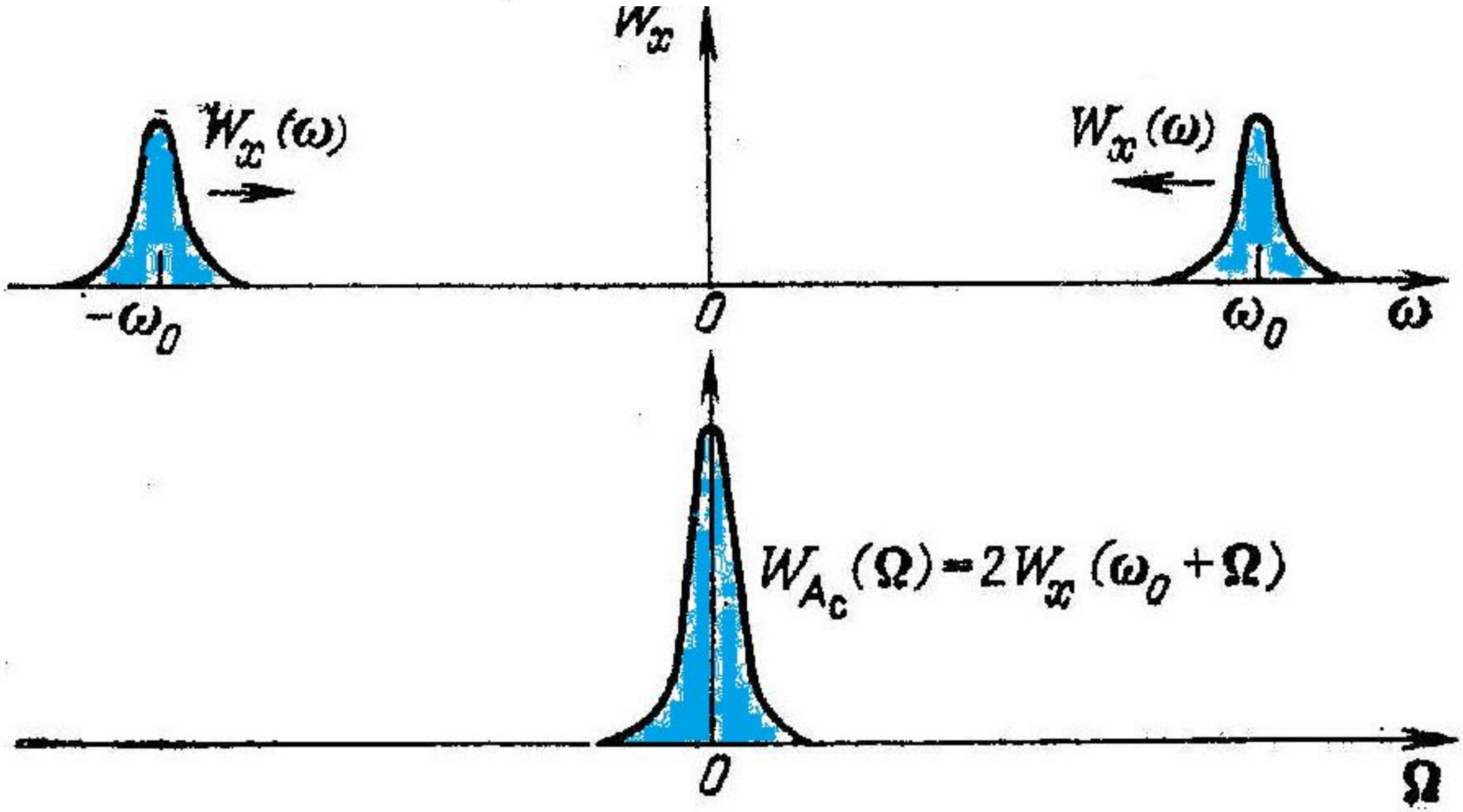
$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \theta(t) = \operatorname{arctg} A_s/A_c$$

Связь между спектром квадратуры и спектром узкополосного СП

$$\boxed{W_{A_c}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega)}$$

Спектральная плотность мощности узкополосного случайного процесса

$$W_{A_c}(\Omega) = 2W_x(\omega_0 + \Omega)$$



Распределение значений огибающей узкополосного СП

$$A_c(t) = A(t)\cos\theta(t), \quad A_s(t) = A(t)\sin\theta(t)$$

Стационарность СП

$$\sigma^2_{A_c} = \sigma^2_{A_s} = \sigma_x^2$$

Эргодичность СП

Нулевое МО $\overline{A(t)} = 0$

$$\langle A^2 \rangle = \overline{A^2(t)} = D_{A_c} + D_{A_s} = 2D_x = 2\sigma_x^2$$

$$p(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

$$p(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Распределение огибающей узкополосного СП

$$A_c(t) = A(t)\cos\theta(t), \quad A_s(t) = A(t)\sin\theta(t)$$

Квадратурные составляющие СП – независимы

$$R_{A_c A_s}(0) = 0$$

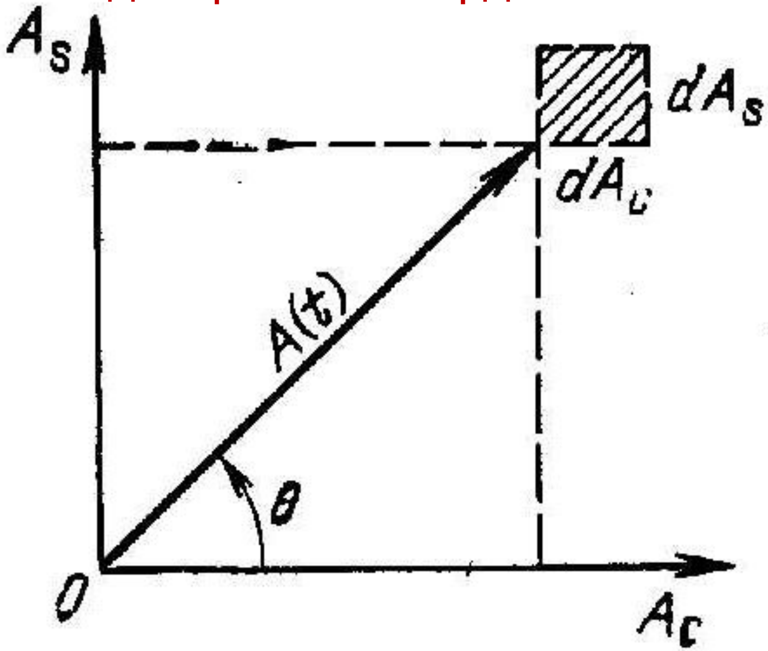
$A_c(t)$ и $A_s(t)$, отсчитываемые в один и тот же момент времени, — статистически независимые величины. Поэтому совместную плотность вероятности $p(A_c, A_s)$ можно определить выражением

$$\boxed{p(A_c, A_s) = p(A_c)\,p(A_s)}$$

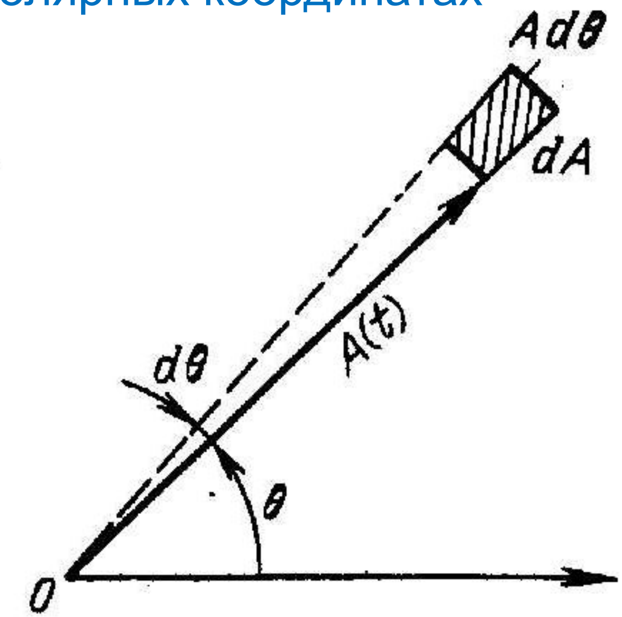
$$p(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(\frac{-A_c^2 - A_s^2}{2\sigma_x^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Преобразование координат в описании огибающей СП

Квадратурные составляющие
в декартовых координатах



Квадратурные составляющие
в полярных координатах



Элементарный объём в декартовых координатах

$$p(A_c)\,dA_c\,p(A_s)\,dA_s = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA_c\,dA_s$$

Распределение амплитуды огибающей СП

Элементарный объём в полярных координатах

$$\boxed{p(A,\theta)\,dA\,d\theta = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA\,d\theta}$$

Совместная плотность вероятности амплитуды и фазы огибающей

$$p(A,\theta) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Плотность вероятности мгновенных значений амплитуды огибающей

$$p_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} p(A,\theta)\,d\theta = \frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad 0 < A < \infty$$

Амплитуда и фаза
гауссовского узкополосного случайного процесса

$$p(A, \theta) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) =$$

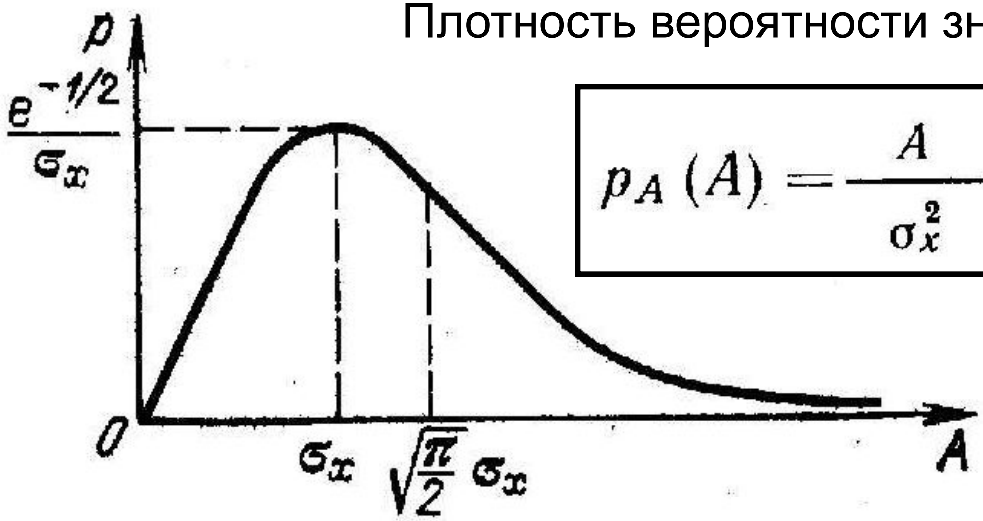
$$= \left[\frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)\right]\left(\frac{1}{2\pi}\right) = p_A(A)\, p_\theta(\theta)$$

$$0 < A < \infty$$

$$-\pi < \theta \leqslant \pi$$

7.2. Распределение Рэлея

Плотность вероятности значений амплитуды огибающей



$$\boxed{p_A(A) = \frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad 0 < A < \infty}$$

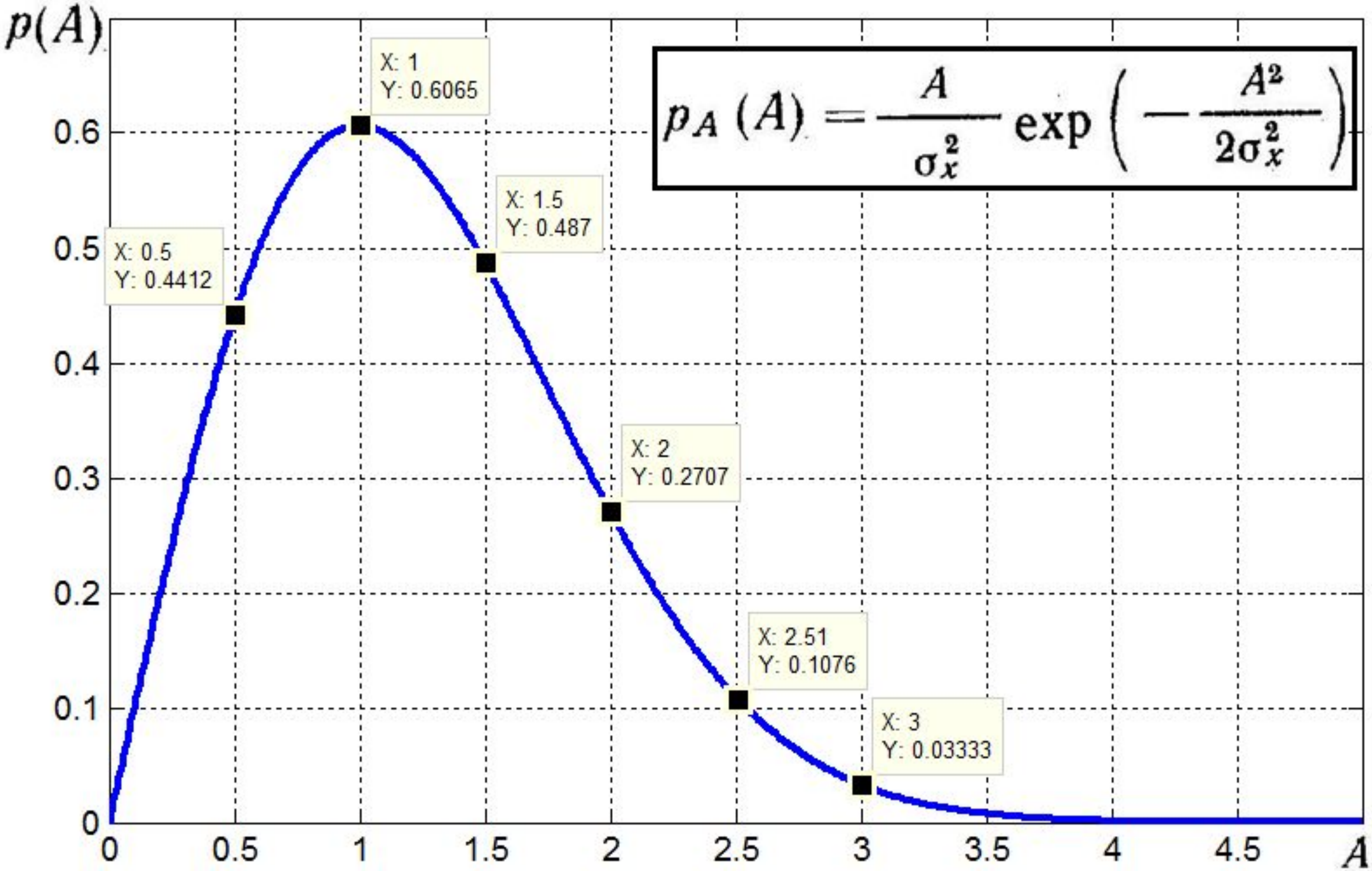
Математическое ожидание мгновенных значений амплитуды огибающей

$$M[A] = \int_0^\infty A p_A(A)\, dA =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2}\int_0^\infty A^2 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA =$$

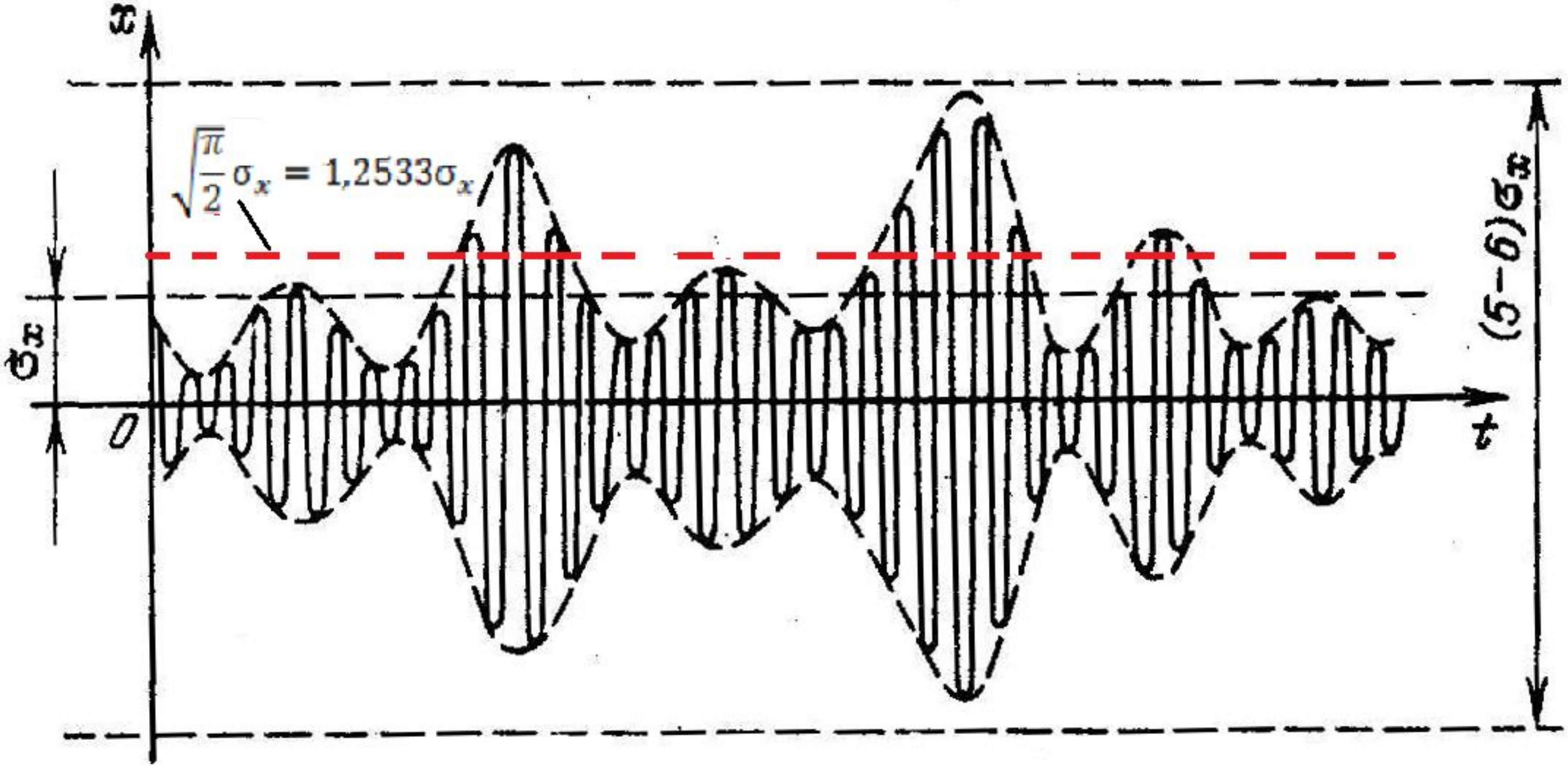
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma_x$$

Распределение Рэлея



$$p_A(A) = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Осциллограмма узкополосного СП
(шумовая дорожка при 1 % границах)



$$p_A(A) = \frac{A}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad 0 < A < \infty$$

Средний квадрат огибающей узкополосного СП

$$M[A^2] = \int_0^\infty A^2 p_A(A)\, dA =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^\infty A^3 \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA = 2\sigma_x^2$$

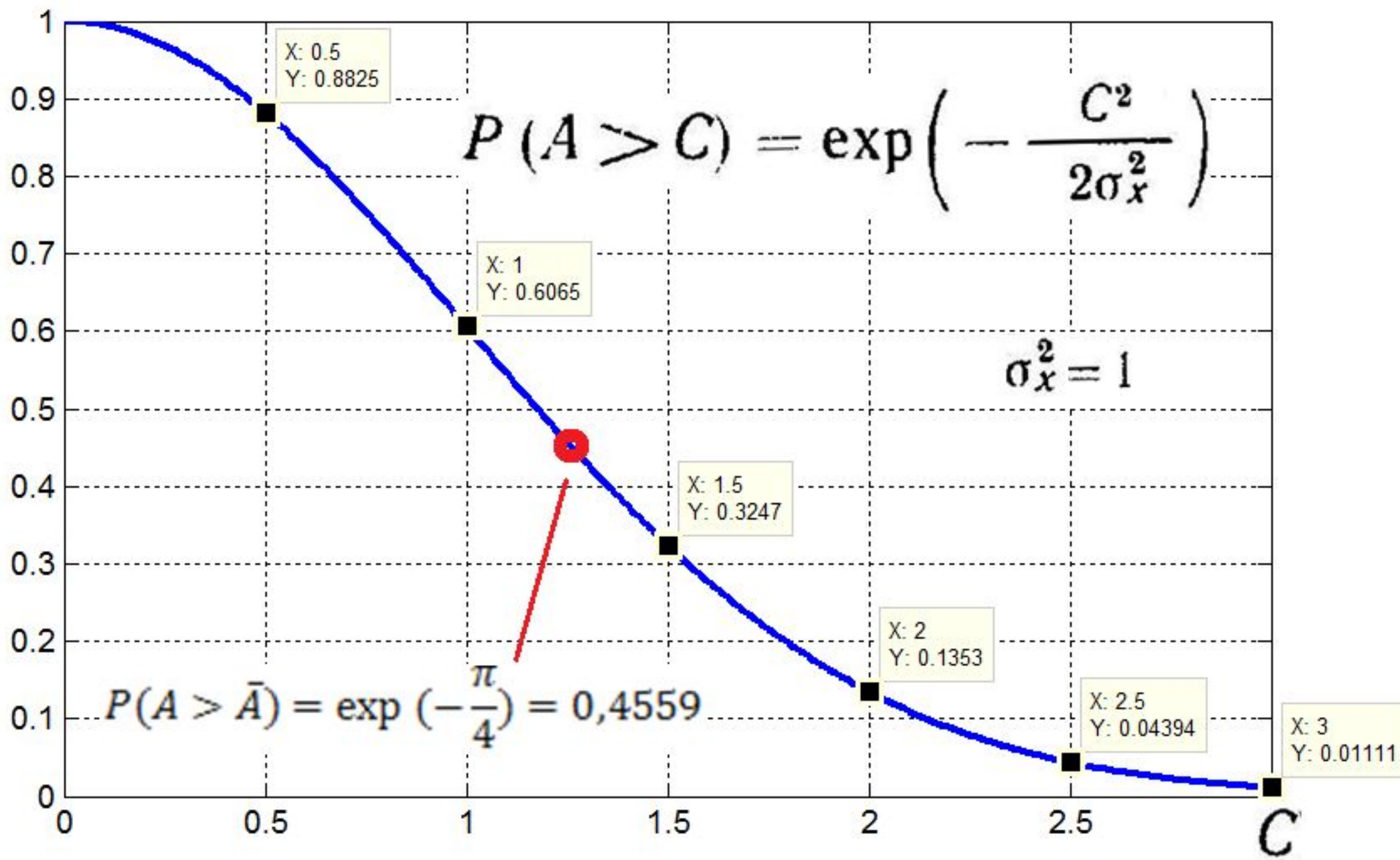
равен удвоенному значению дисперсий каждой из квадратур,
или сумме дисперсий обеих квадратур $\langle A^2 \rangle = D_{A_c} + D_{A_s} = 2\sigma_x^2$

Превышение порога С

$$P(A > C) = \int_C^\infty p_A(A)\, dA =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_C^\infty A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

Превышение порога С амплитудой узкополосного СП



7.3. Автокорреляционная функция огибающей СП

Коэффициент корреляции случайного процесса

$$r_x(\tau) = R_x(\tau)/\sigma_x^2 = r_0(\tau)\cos\omega_0\tau$$

Автокорреляционная функция огибающей сложным образом зависит от коэффициента корреляции самого случайного процесса

$$K_A(\tau) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r_0^2(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right]^2 r_0^{2n}(\tau)\right\}$$

Приближённая формула АКФ рэлеевской огибающей случайного процесса

$$K_A(\tau) \approx \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[1 + \frac{1}{4} r_0^2(\tau)\right]$$

АКФ огибающей СП

КФ рэлеевской огибающей узкополосного СП состоит из суммы двух составляющих: квадрата матожидания огибающей и АКФ флуктуационной составляющей

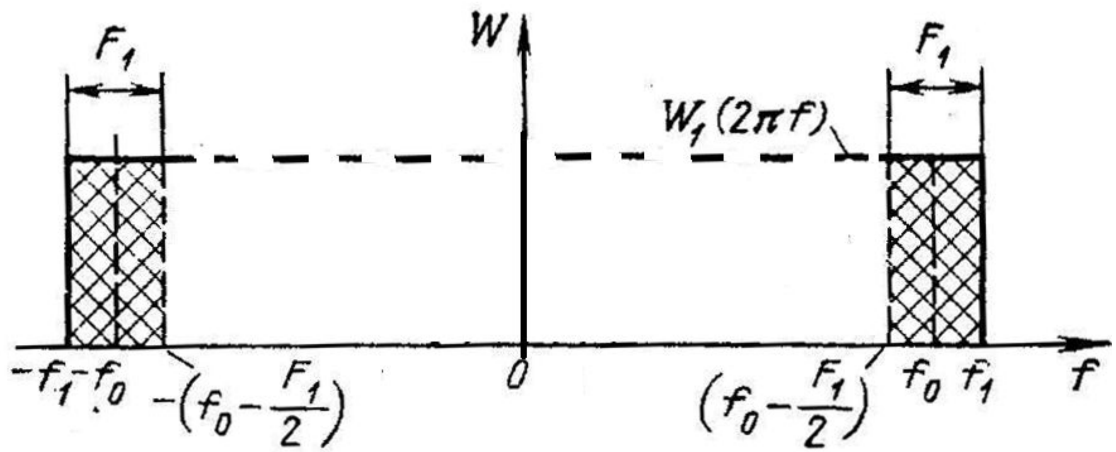
$$K_A(\tau) \approx \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[1 + \frac{1}{4} r_0^2(\tau)\right]$$

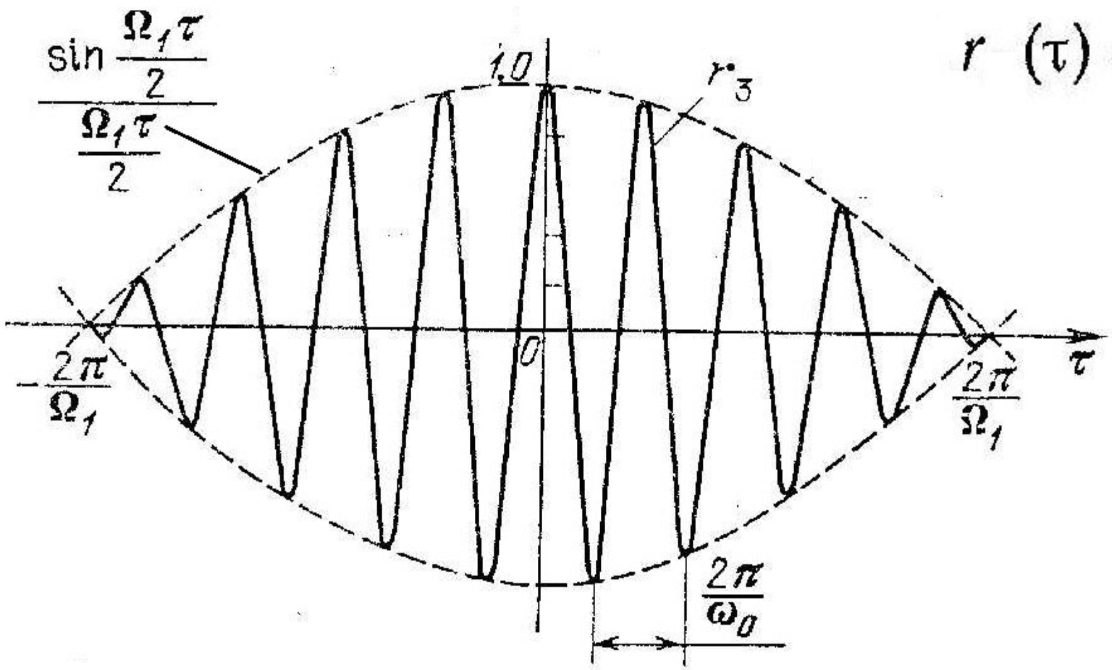
$$= \frac{\pi\sigma_x^2}{2} + \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\frac{1}{4} r_0^2(\tau)$$

Исключая квадрат матожидания огибающей, получим автокорреляционную функцию рэлеевской огибающей СП

$$R_A(\tau) = \frac{\pi\sigma_x^2}{8} r_0^2(\tau)$$

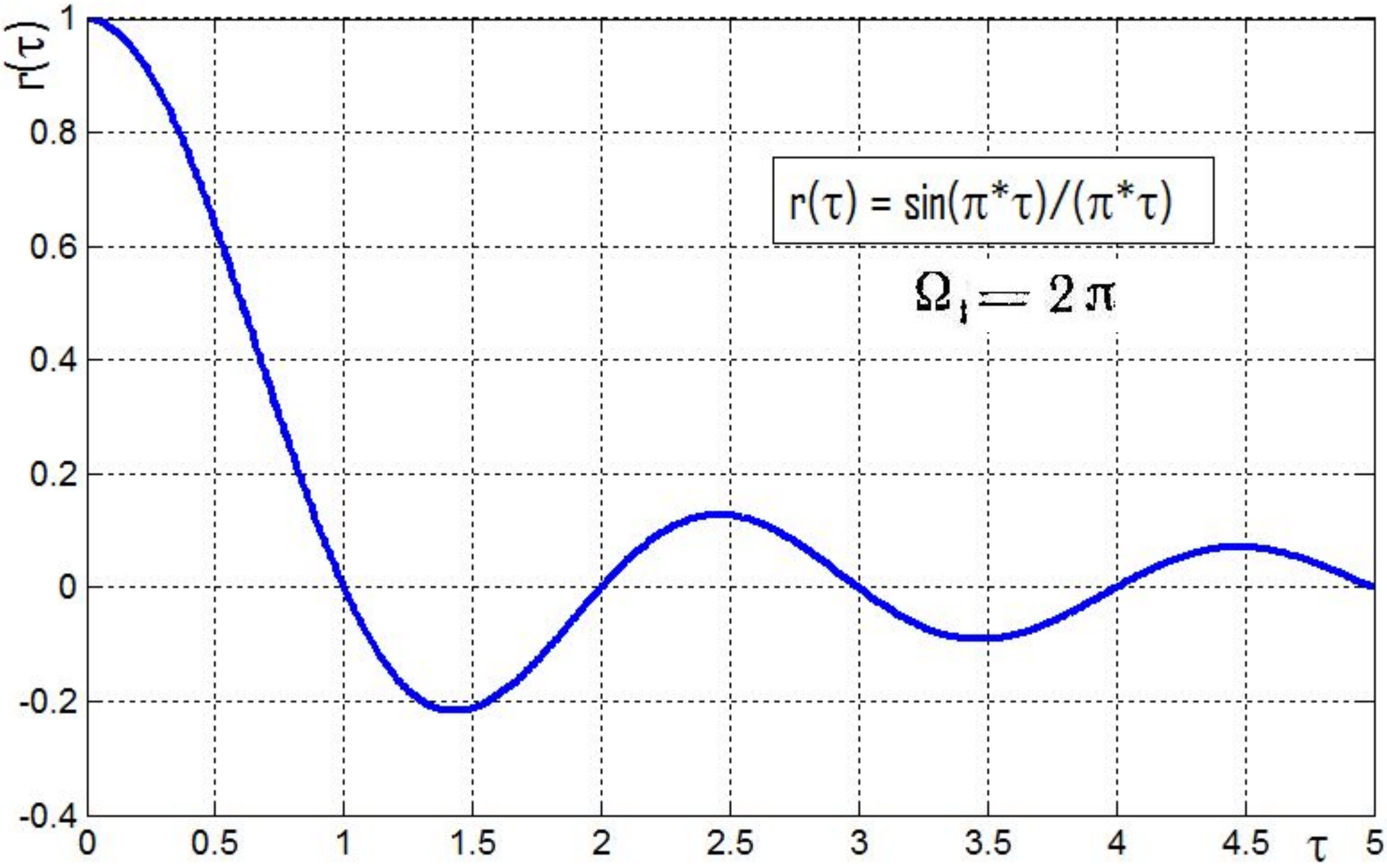
Пример: Нормированная корреляционная функция СП с равномерным в полосе частот спектром



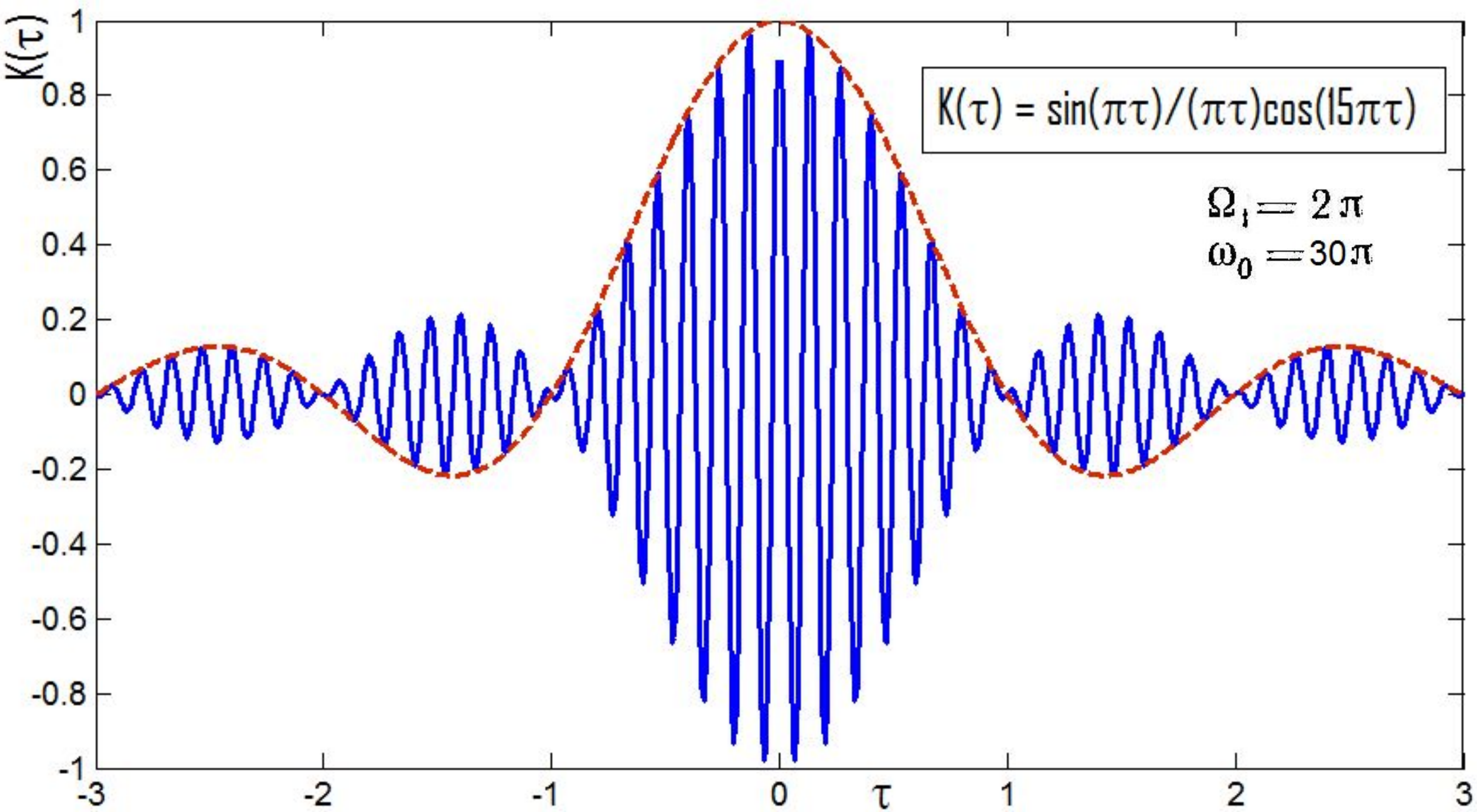


$$r(\tau) = \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \cos \omega_0 \tau$$

Пример: Огибающая АКФ случайного процесса



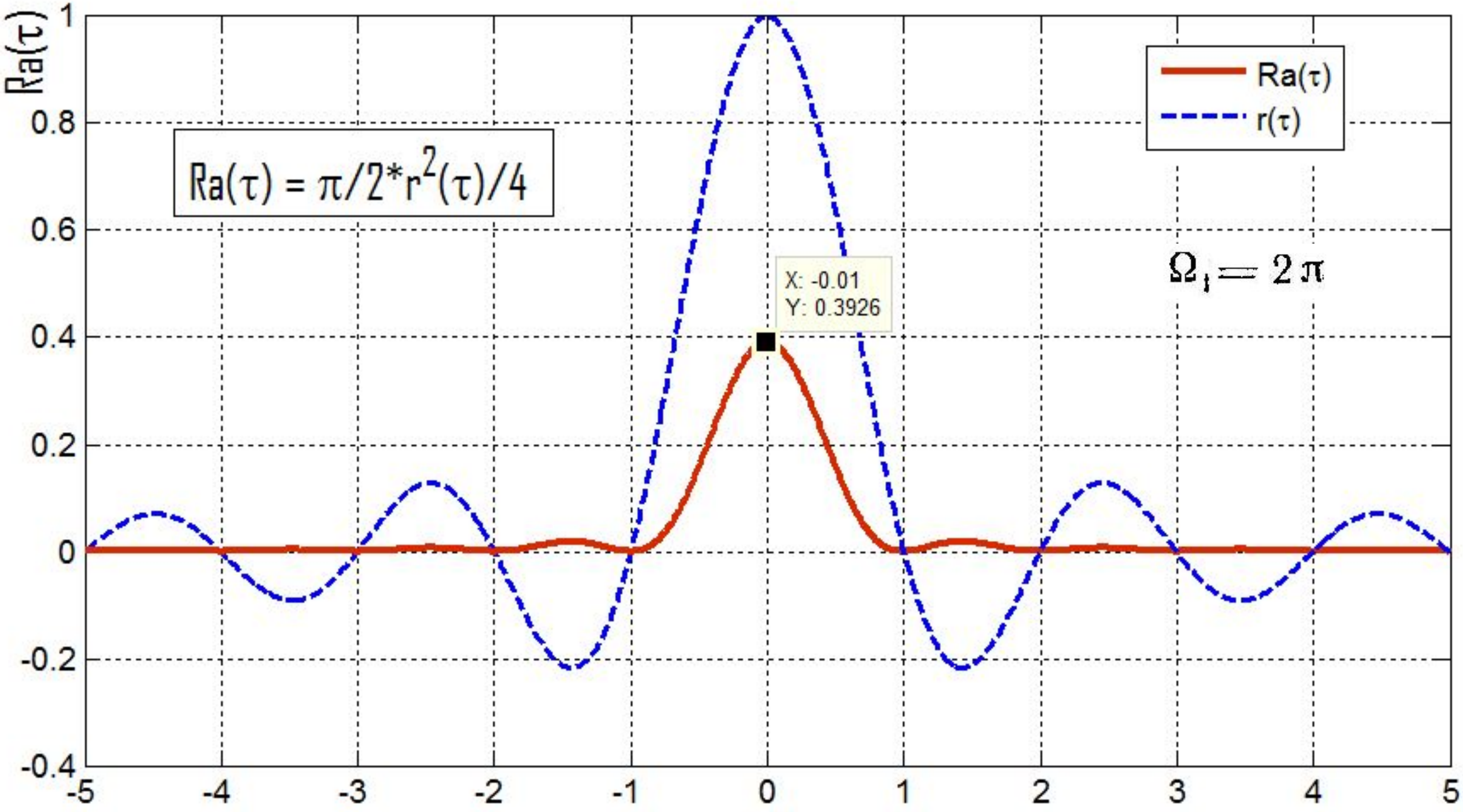
Продолжение примера: АКФ случайного процесса



Продолжение примера: АКФ огибающей СП

Приближённая формула АКФ рэлеевской огибающей случайного процесса

$$R_A(\tau) = \frac{\pi\sigma_x^2}{8} r_0^2(\tau)$$



7.4. Спектральная плотность огибающей СП

$$K_A(\tau) \approx \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\left[1 + \frac{1}{4} r_0^2(\tau)\right]$$

Спектральная плотность мощности – прямое преобразование Фурье от АКФ

$$W_A(\Omega) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2} 2\pi\delta(\Omega) + \\ + \frac{\pi\sigma_x^2}{2} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau$$

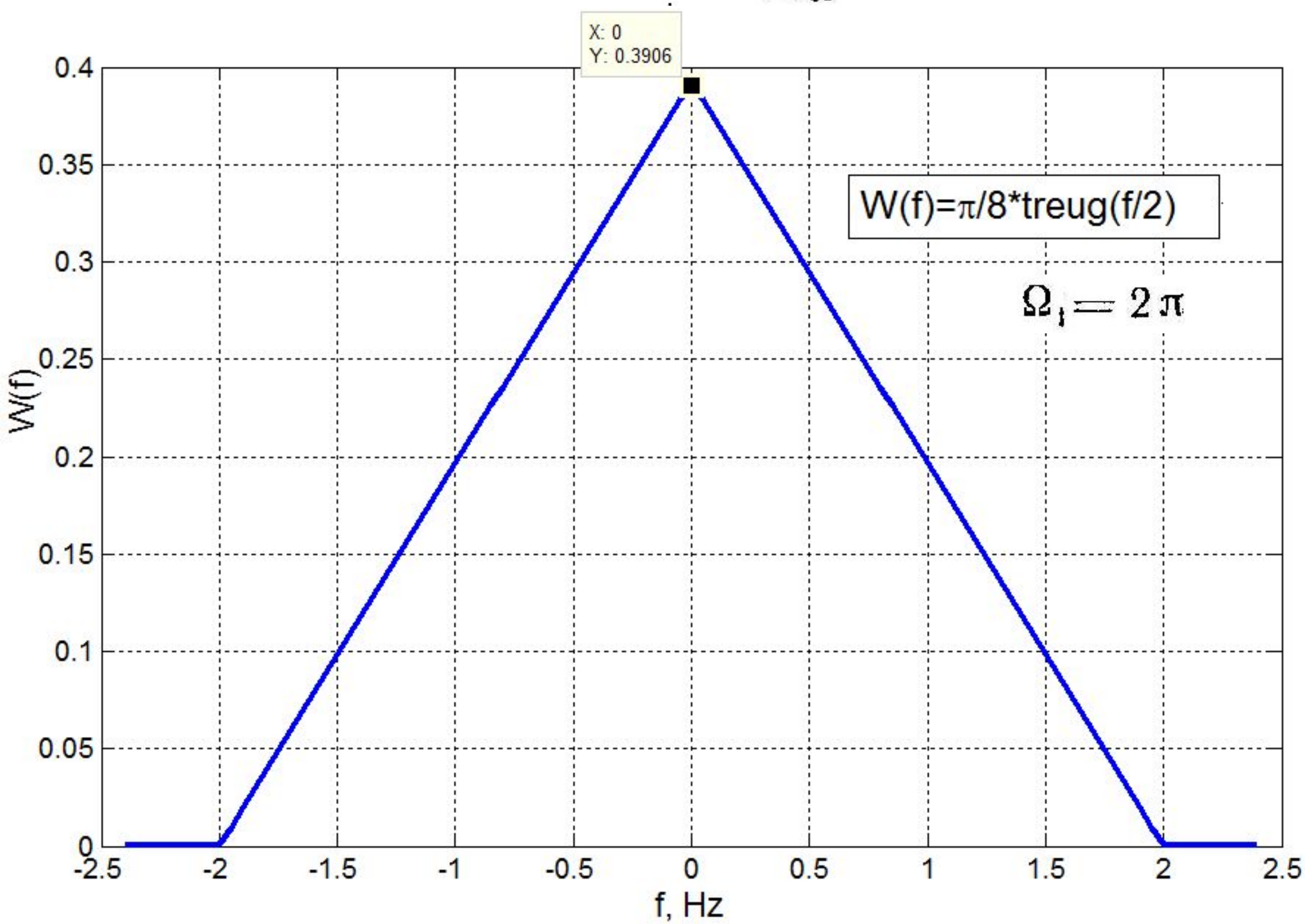
Спектральная плотность мощности флуктуационной составляющей АКФ

$$\widetilde{W}_A(\Omega) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau$$

Продолжение примера: спектр огибающей СП

Прямое преобразование Фурье от флуктуационной части АКФ

$$\widetilde{W}_A(\Omega) = \frac{\pi\sigma_x^2}{2}\,\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau)\,e^{-i\Omega\tau}\,d\tau$$



7.5. Фаза узкополосного случайного процесса

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int_0^\infty A\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)dA =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\int_0^\infty \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)d(A^2) = \frac{1}{2\pi},$$

$$-\pi < \theta \leqslant \pi$$

Равномерно распределена на интервале от $-\pi$ до π

Корреляционная функция фазы узкополосного случайного процесса

Математическое ожидание фазы СП равно нулю.

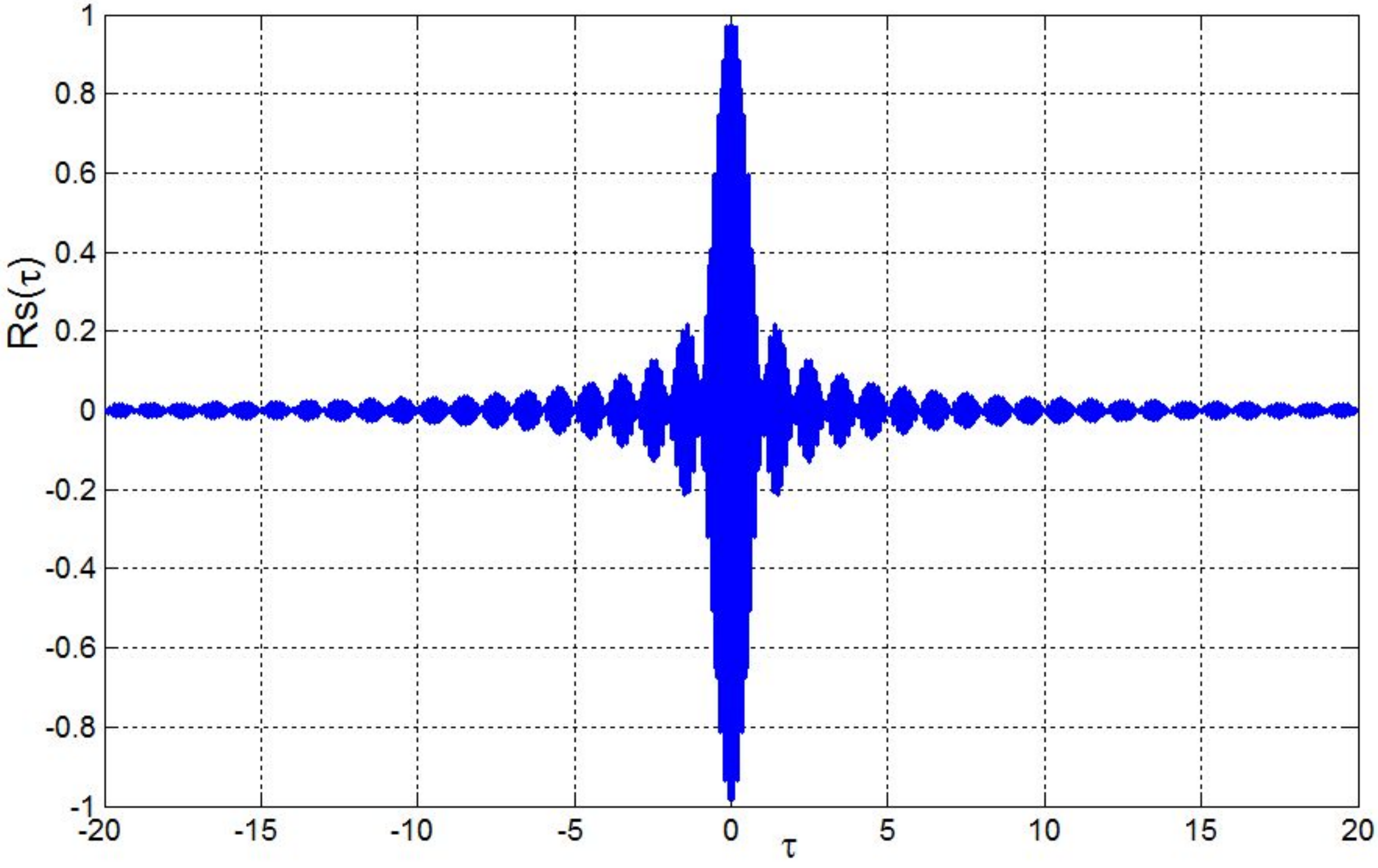
Дисперсия фазы СП

$$D_\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 p_\theta(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\theta^3}{3}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

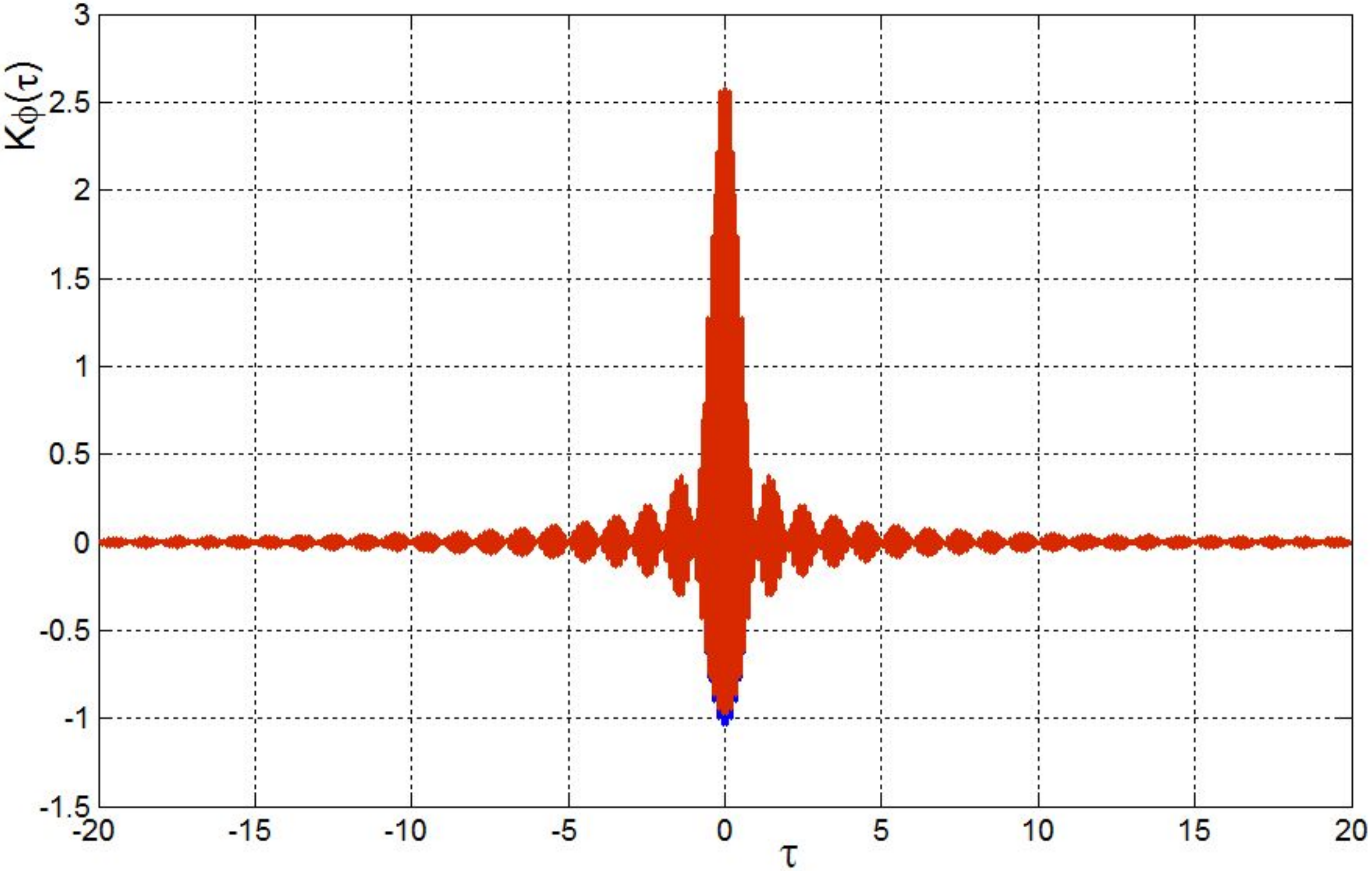
Автокорреляционная функция фазы СП

$$R_\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} r_0(\tau) + \frac{\pi}{4} r_0^2(\tau) + \frac{\pi}{12} r_0^3(\tau) + \ldots$$

Продолжение примера: Корреляционная функция узкополосного случайного процесса



Продолжение примера: Корреляционная функция фазы узкополосного случайного процесса



7.6.Частота узкополосного случайного процесса

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0 + \dot{\theta}(t)$$

$$p(\dot{\theta}) = \left[2\Delta\omega_{эк}\left(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{(\Delta\omega_{эк})^2}\right)^{3/2}\right]^{-1}$$

$\Delta\omega_{эк}$ — эквивалентная ширина спектра

Частота узкополосного случайного процесса

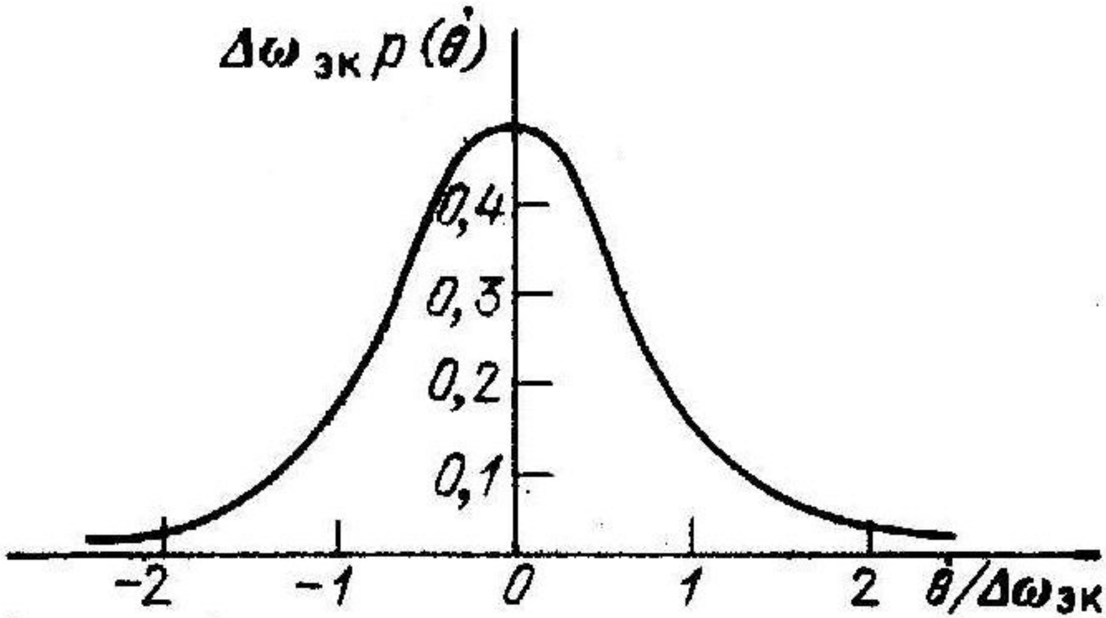
$\Delta\omega_{эк}$ — эквивалентная ширина спектра

$$(\Delta\omega_{эк})^2 = \int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 \, W(\omega)\, d\omega \Bigg/ \int_0^\infty W(\omega)\, d\omega$$

$$(\Delta\omega_{эк})^2 = -\left.\frac{d^2 r_0(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}$$

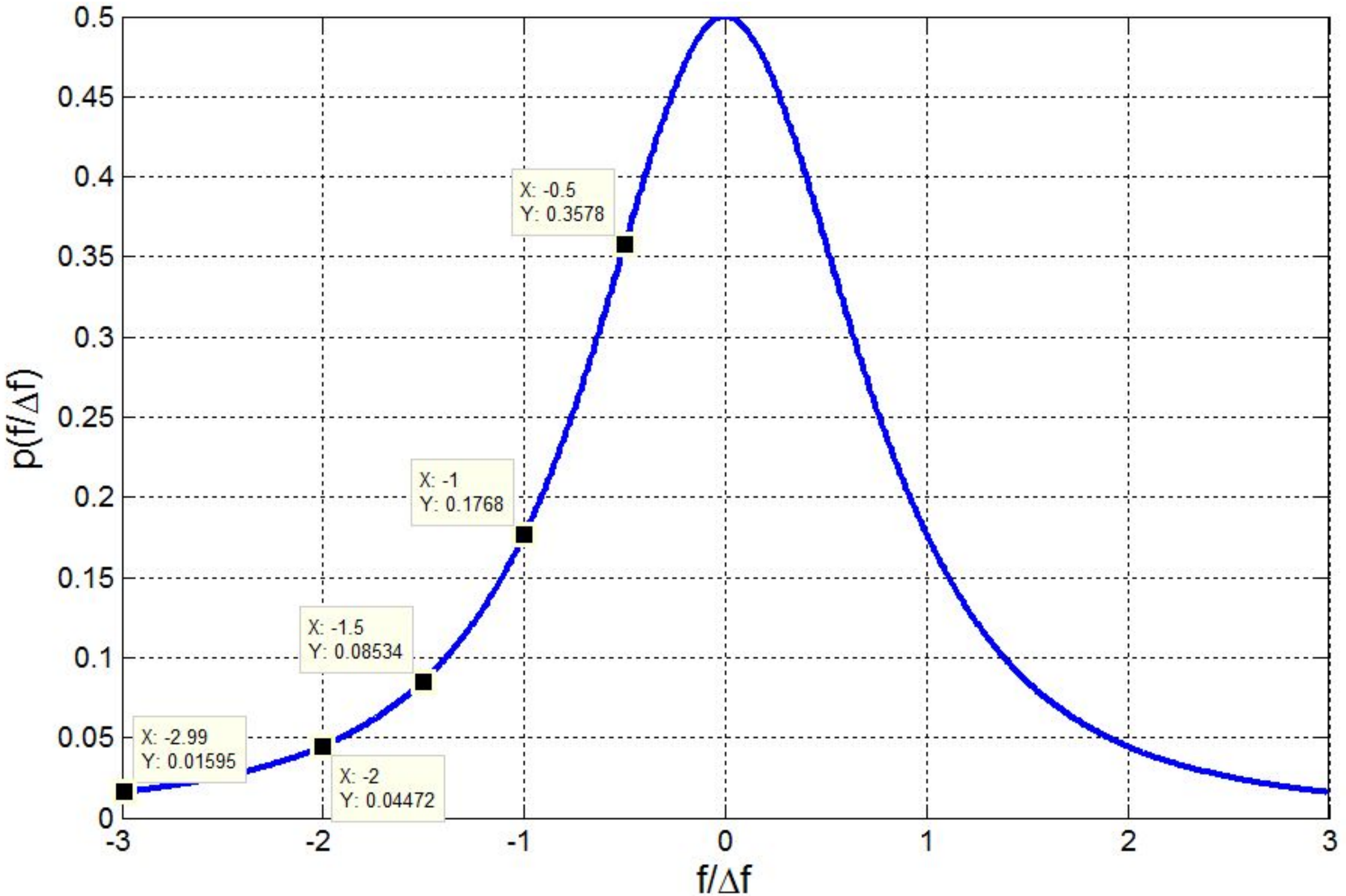
$r_0(\tau)$ — огибающая нормированной корреляционной функции со спектром $W(\omega)$

Распределение частоты узкополосного СП



$$p(\dot\theta) = \left[2\Delta\omega_{эк} \left(1 + \frac{\dot\theta^2}{(\Delta\omega_{эк})^2} \right)^{3/2} \right]^{-1}$$

Плотность вероятности частоты узкополосного СП



7.7. Узкополосный СП с равномерным полосовым спектром

$W(\omega)$ равномерен в полосе частот $\pm\Delta\omega$ при центральной частоте ω_0

$$r_x(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_0\tau}{\Delta\omega_0\tau}\cos\omega_0\tau, \quad \text{а} \quad r_0(\tau) = \frac{\sin \Delta\omega_0\tau}{\Delta\omega_0\tau} = \frac{\sin y}{y}$$

$$r_0''(\tau) = (\Delta\omega_0)^2 \frac{-y^3\sin y - 2y^2\cos y + 2y\sin y}{y^4}$$

При $\tau \to 0$ и $y \to 0$

$$r_0''(0) = -\frac{1}{3}(\Delta\omega_0)^2,$$

$$\Delta\omega_{\text{эк}} = \sqrt{-r_0''(0)} = \Delta\omega_0/\sqrt{3}$$

Продолжение примера: Узкополосный СП с равномерным полосовым спектром

$W(\omega)$ равномерен в полосе частот $\pm\Delta\omega = \pm\pi$ при центральной частоте $\omega_0 = 30\pi$

Вторая производная от коэффициента корреляции СП при нулевой задержке

$$r_0''(0) = -\frac{1}{3}(\Delta\omega_0)^2 = -\frac{\pi^2}{3}$$

Эффективная полоса частот, занимаемая узкополосным СП

$$\Delta\omega_{эк} = \sqrt{-r_0''(0)} = \Delta\omega_0/\sqrt{3} =$$

$$= \pi/\sqrt{3} = 1.8138$$

или

$$\boxed{\Delta f_{эк} = 0.5774\ \text{Гц}}$$

7.8. Комплексный случайный процесс

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_x(\omega)\, d\omega < \infty$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

$x(t)$ является сопряженным (по Гильберту)

$$z(t) = x(t) + i x_1(t)$$

является *комплексным случайным процессом*

Комплексный случайный процесс

$$x(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

$$x_1(t) = A(t)\sin[\omega_0 t + \theta(t)]$$

$$\boxed{z(t) = A(t)\,e^{i[\omega_0 t + \theta(t)]}}$$

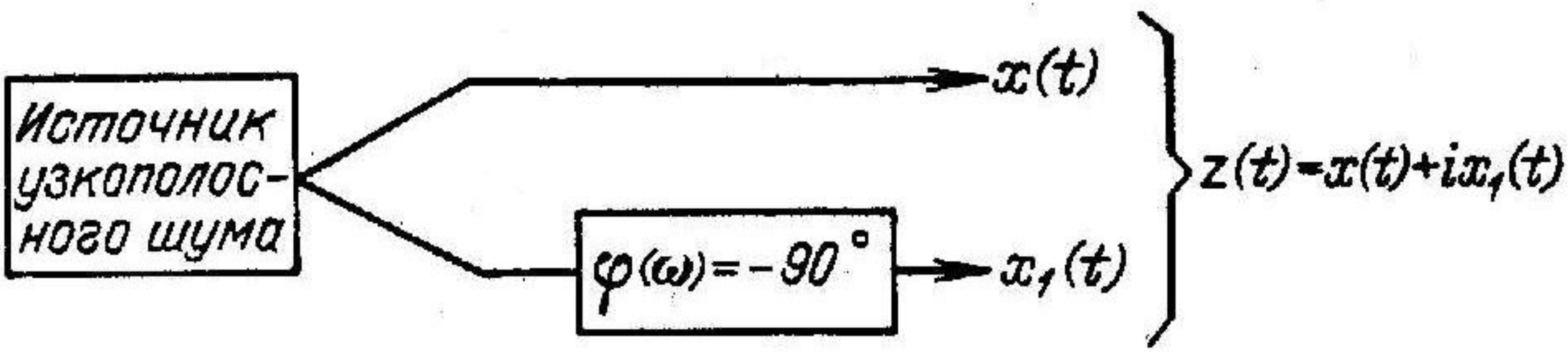
$$W_{x1}(\omega) = W_x(\omega)$$

$$R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega)\,d\omega$$

Формирование комплексного случайного процесса

$$z_{kT}(t) = x_{kT}(t) + i x_{1kT}(t)$$



Спектр комплексного случайного процесса

при $\omega > 0$

$$\mathbf{Z}_{kT}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega) + i\,[-i\mathbf{X}_{kT}(\omega)] = 2\mathbf{X}_{kT}(\omega);$$

при $\omega < 0$

$$\mathbf{Z}_{kT}(\omega) = \mathbf{X}_{kT}(\omega) + i\,[i\mathbf{X}_{kT}(\omega)] = 0$$

$$W_z(\omega) = \begin{cases} 4W_x(\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0 \end{cases}$$

7.9. Корреляционная функция комплексного случайного процесса

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 4W_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega =$$

$$= 4\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega + i4\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\sin\omega\tau\, d\omega$$

$$R_z(\tau) = 2R_x(\tau) + i2R_{x_1x}(\tau),$$

где

$$R_{x_1x}(\tau) = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty W_x(\omega)\sin\omega\tau\, d\tau$$

Корреляционная функция комплексного случайного процесса

$$\text{При } \tau = 0 \quad R_{x_1 x}(0) = 0$$

$$D_z = \sigma_z^2 = R_z(0) = 2R_x(0) = 2D_x$$

$$D_x = D_{x_1}$$

СП с равномерным узкополосным спектром

$$R_{x_1 x}(\tau) = 2\frac{W_1 \Omega_1}{2\pi} \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \sin \omega_0 \tau$$

$$= D_x \frac{\sin(\Omega_1 \tau/2)}{\Omega_1 \tau/2} \sin \omega_0 \tau \qquad D_x = W_1 2F_1$$

Корреляционная функция комплексного случайного процесса

Процессы $x_1(t)$ и $x(t)$ в один и тот же момент времени некоррелированны.

Однако при $\omega_0\tau = \pi/2$ $\tau = \pi/2\omega_0 = 1/4f_0$ функция $R_{x_1 x}(\tau) = 1/4f_0 = D_x \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\,\frac{F_1}{f_0}\right)$

При $F_1/f_0 \ll 1$ эта функция достигает максимального значения, близкого к $D_x = \sigma_x^2$

Благодарю за внимание!