# РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

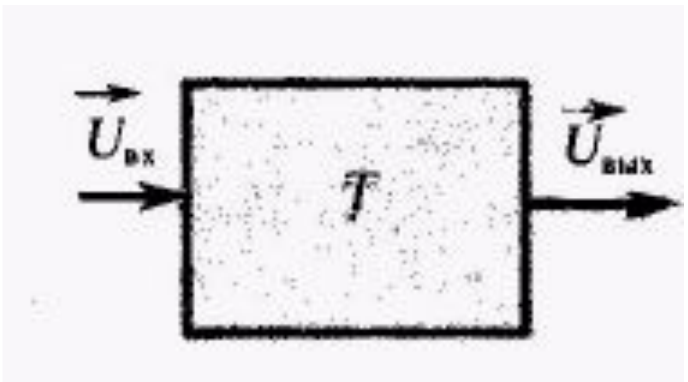
Лекционный курс

Лекция 14

Доцент Трухин М.П.

# Воздействие детерминированных сигналов на линейные стационарные системы

Радиотехническое устройство независимо от своего назначения и уровня сложности представляет собой *систему,* т. е. совокупность физических объектов, между которыми существуют определенные взаимодействия. В структуре системы можно выделить *вход,* на который подается исходный сигнал, и *выход,* откуда снимается преобразованный сигнал Если интересуются лишь связью между сигналами на входе и выходе и не описывают внутренние процессы в системе, то говорят, что система представляет собой «черный ящик».



# Системные операторы

В наиболее простом случае как входной сигнал $u_{ВХ}(t)$, так и выходной сигнал $u_{ВЫХ}(t)$, называемый также *откликом* или *выходной реакцией* системы, описываются одиночными функциями времени. В более общем случае входной сигнал представляется в виде *m*-мерного вектора

$$\vec{U}_{\text{вх}}(t) = \{u_{\text{вх}1}(t), u_{\text{вх}2}(t), \ldots, u_{\text{вх}m}(t)\},$$

а выходной сигнал — в виде n-мерного вектора

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \{u_{\text{вых}1}(t), u_{\text{вых}2}(t), \ldots, u_{\text{вых}n}(t)\}.$$

Закон связи между сигналами $\vec{U}_{\text{вых}}(t)$ и $\vec{U}_{\text{вх}}(t)$ задают системным оператором *T*, результатом воздействия которого на сигнал $\vec{U}_{\text{вх}}(t)$ служит сигнал $\vec{U}_{\text{вых}}(t)$:

$$\boxed{\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \mathrm{T}\vec{U}_{\text{вх}}(t).}$$

# Математическая модель системы

Чтобы полностью определить задачу, следует указать также область $D_{ВХ}$ некоторого функционального пространства, которая называется *областью допустимых входных воздействий.* Задание этой области описывает характер входных сигналов, которые могут быть непрерывными или дискретными, детерминированными или случайными. Подобным же образом должна быть указана область $D_{ВЫХ}$ *допустимых выходных сигналов.*

Здесь рассматриваются только системы, на которые воздействуют аналоговые сигналы. Преобразование дискретных и цифровых сигналов линейными системами будет изучаться позднее.

*Математической моделью системы* называют совокупность системного оператора *T* и двух областей допустимых сигналов $D_{ВХ}$, $D_{ВЫХ}$.

Классификацию систем проводят на основании существенных свойств их математических моделей.

# Стационарные и нестационарные системы

Принято говорить, что система *стационарна,* если ее выходная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал. Если *T* — оператор стационарной системы, то из равенства

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t \pm t_0) = \mathrm{T}\vec{U}_{\text{вх}}(t \pm t_0)$$

следует, что

$$\vec{U}_{\text{вых}}(t) = \mathrm{T}\vec{U}_{\text{вх}}(t)$$

при любом значении $t_0$.

Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени параметрами. Если же свойства системы не инвариантны относительно выбора начала отсчета времени, то такую систему называют *нестационарной* (системой с переменными во времени параметрами или *параметрической* системой).

Теоретическое изучение нестационарных систем, как правило, представляет гораздо более сложную задачу, чем исследование стационарных систем.

# Линейные и нелинейные системы

Важнейший принцип классификации систем основан на том, что различные системы по-разному ведут себя при подаче на вход суммы нескольких сигналов. Если оператор системы таков, что справедливы равенства

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{T}(\vec{U}_{\text{вх}1} + \vec{U}_{\text{вх}2}) = \mathrm{T}\vec{U}_{\text{вх}1} + \mathrm{T}\vec{U}_{\text{вх}2}, \\ &\mathrm{T}(\alpha\vec{U}_{\text{вх}}) = \alpha\mathrm{T}\vec{U}_{\text{вх}}, \end{aligned}}$$

где $\alpha$ — произвольное число, то данная система называется *линейной.* Эти равенства выражают фундаментальный *принцип суперпозиции.* Если они не выполняются, то говорят, что система является *нелинейной.*

Линейные системы замечательны тем, что, по крайней мере теоретически, можно решить любую задачу о преобразовании входного сигнала такой системой.

# Нелинейные системы

Строго говоря, все физические системы, с которыми имеет дело радиотехника, в той или иной степени нелинейны. Однако существует много систем, которые весьма точно описываются линейными моделями. Так, практически всегда можно пренебречь нелинейностью обычных резисторов, конденсаторов и некоторых индуктивных элементов.

Нелинейные радиотехнические устройства содержат в себе обычно такие элементы, как полупроводниковые диоды и транзисторы, имеющие вольт-амперные характеристики сложного вида.

Теория нелинейных систем оказывается, как правило, довольно сложной. Далеко не все результаты могут быть получены здесь аналитическим путем. Однако именно с помощью нелинейных элементов осуществляются важнейшие преобразования радиотехнических сигналов. Методы анализа и расчета некоторых нелинейных радиотехнических устройств рассмотрены позднее.

# Пример

1. Первая система производит обработку входного сигнала по закону

$$u_{вых}(t) = \left[\frac{d}{dt} + \alpha\right] u_{вх}(t).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенства суперпозиции выполняются. Таким образом, данная система линейна.

2. Некоторая система работает как идеальный квадратор в соответствии с алгоритмом

$$u_{вых}(t) = u^2_{вх}(t).$$

Подав на вход сумму двух сигналов $u_{ВХ1} + u_{ВХ2}$, на выходе получим

$$u_{вых} = u^2_{вх\,1} + 2u_{вх\,1}u_{вх\,2} + u^2_{вх\,2}.$$

Наличие перекрестного слагаемого $2u_{вх\,1}u_{вх\,2}$ указывает на то, что данная система нелинейна.

# Сосредоточенные и распределенные системы

Другой критерий классификации радиотехнических систем основан на сопоставлении физических размеров системы и рабочей длины волны. Если характерный размер системы (например, наибольшая длина соединительных проводников цепи) оказывается гораздо меньше длины волны, то получается *сосредоточенная система.*

В сосредоточенной электрической цепи всегда можно выделить физические области с преимущественной локализацией энергии электрического поля (конденсаторы) и магнитного поля (индуктивные элементы). Свойства сосредоточенных цепей слабо зависят от конфигурации соединительных проводников, поэтому для описания таких цепей принято использовать их абстрактные модели, называемые *принципиальными схемами.*

В радиотехнике сосредоточенные системы широко применяют вплоть до рабочих частот в несколько сотен мегагерц. Анализ и расчет сосредоточенных радиотехнических систем проводят с помощью известных законов Кирхгофа.

# Распределенные системы

На частотах в несколько тысяч мегагерц, в так называемом сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне, физические размеры большинства устройств оказываются сравнимыми с длиной волны передаваемых колебаний, так что становится необходимым учет конечного времени распространения сигнала. Обычные электрические цепи в столь высокочастотном диапазоне уже не могут использоваться и на смену им приходят *системы с распределенными параметрами* (распределенные или волновые системы).

Так, вместо соединительных проводников применяются отрезки металлических труб — волноводы, вместо колебательных *LC*-контуров — их распределенные аналоги, называемые объемными резонаторами. Теория, методы анализа и проектирования распределенных систем достаточно сложны и составляют содержание отдельных радиотехнических дисциплин.

# Линейные стационарные системы с сосредоточенными параметрами

При анализе прохождения сигналов через линейные цепи можно пользоваться методами, известными из курса «Основы теории цепей».

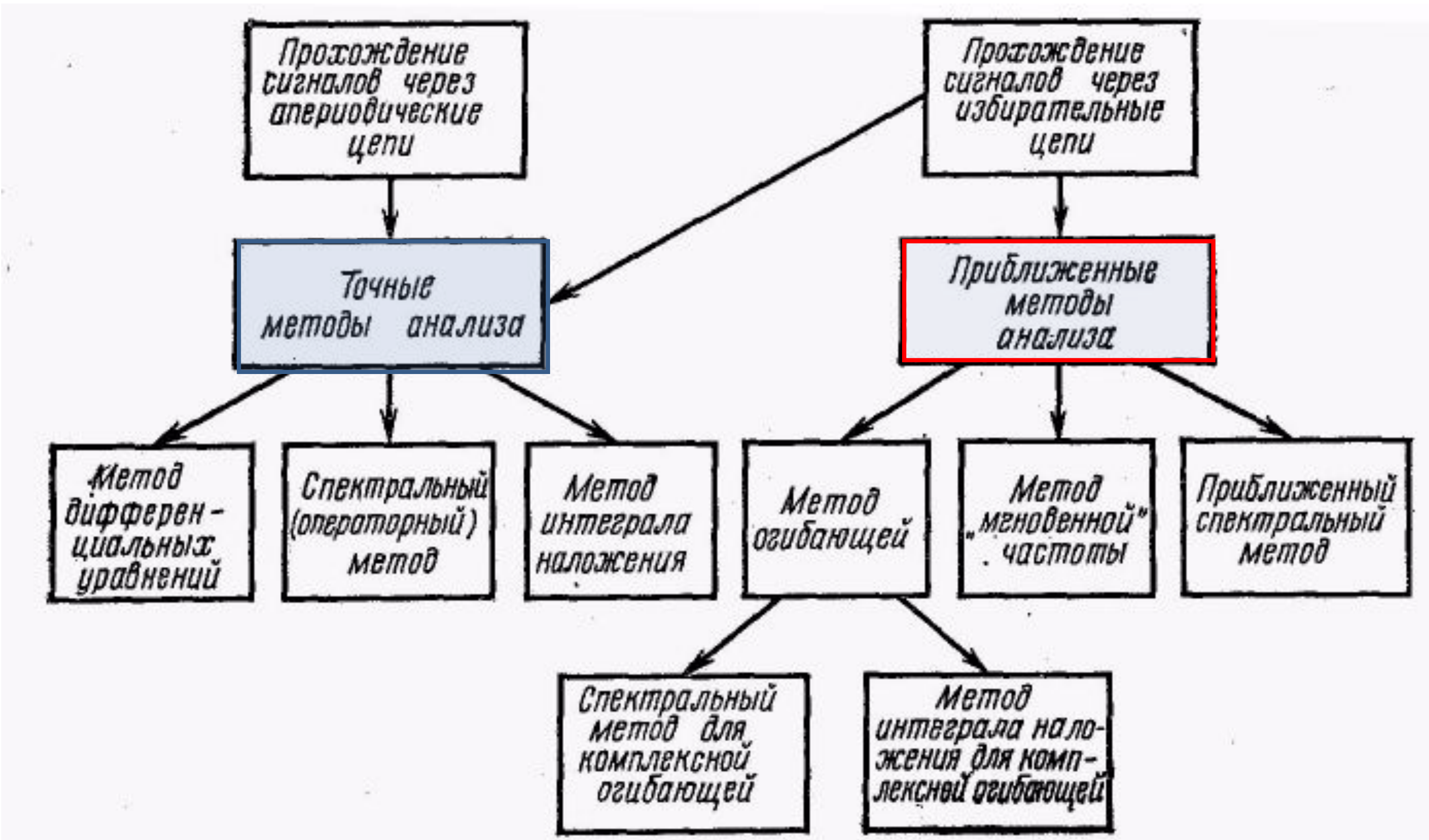
Выбор наиболее удобного метода анализа зависит от структуры цепи, вида воздействующего на нее сигнала, а также от того, в какой форме (частотной или временной) должен быть представлен выходной сигнал.

Например, анализ прохождения относительно простых сигналов (импульсов включения, гармонических колебаний и т. п.) через цепи, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка, достаточно просто выполняется классическим методом дифференциальных уравнений. В тех случаях, когда решение дифференциальных уравнений затрудняется (воздействие сложных сигналов на цепи со сложной структурой), целесообразно использовать такие методы, как *спектральный* (*операторный*) или *метод интеграла наложения*, основанные на принципе суперпозиции.

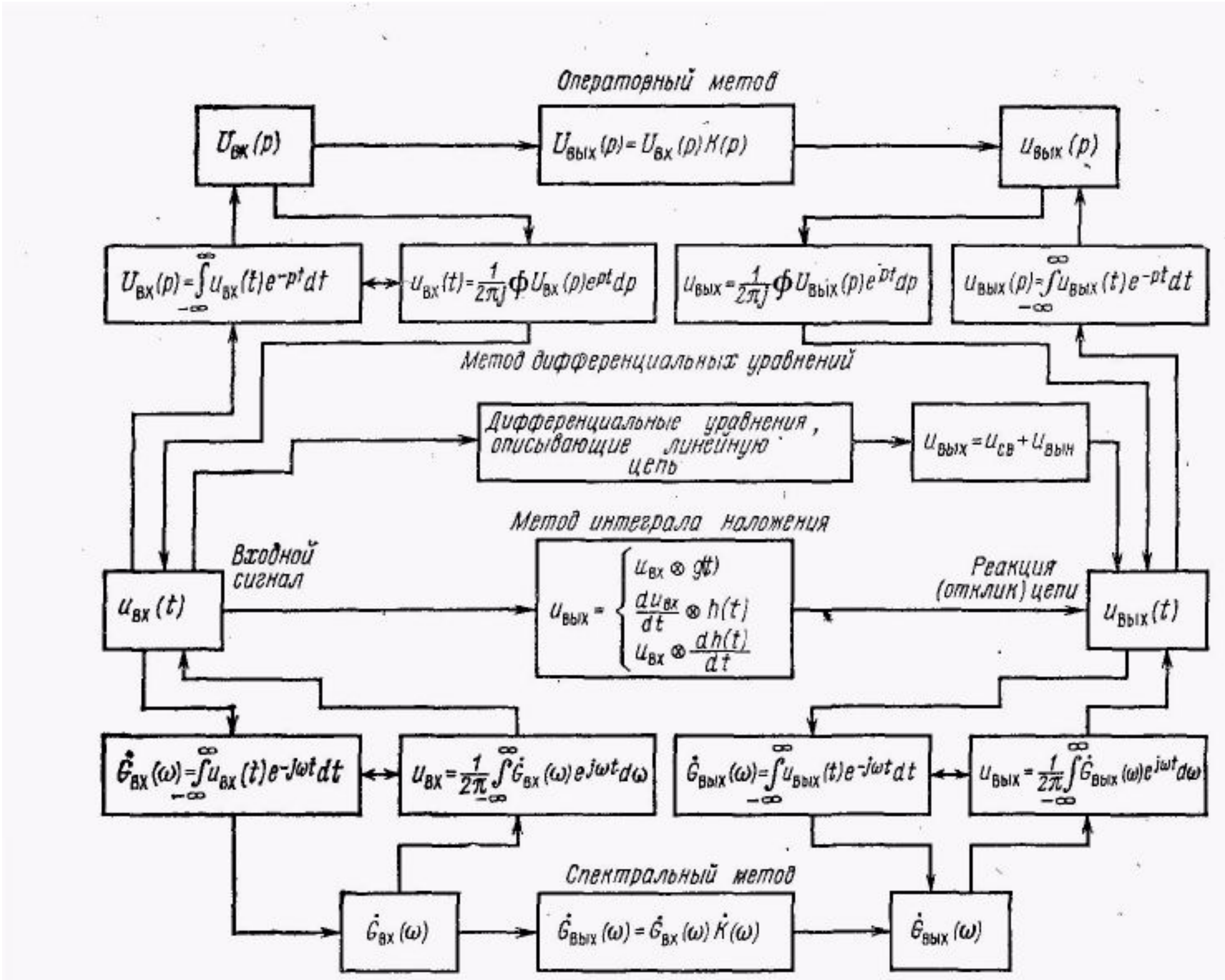
# Методы решения задач в линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами

При анализе прохождения сигналов через узкополосные системы, помимо перечисленных методов анализа, дающих точное решение, применяются приближенные методы, позволяющие для ряда задач получить решения, достаточно близкие к точным. Ниже на рисунке схематически представлена классификация методов анализа, которые рассматриваются в этой главе. Будут рассмотрены приближенные методы анализа (методы огибающей, «мгновенной» частоты, приближенный спектральный метод) и примеры их использования.

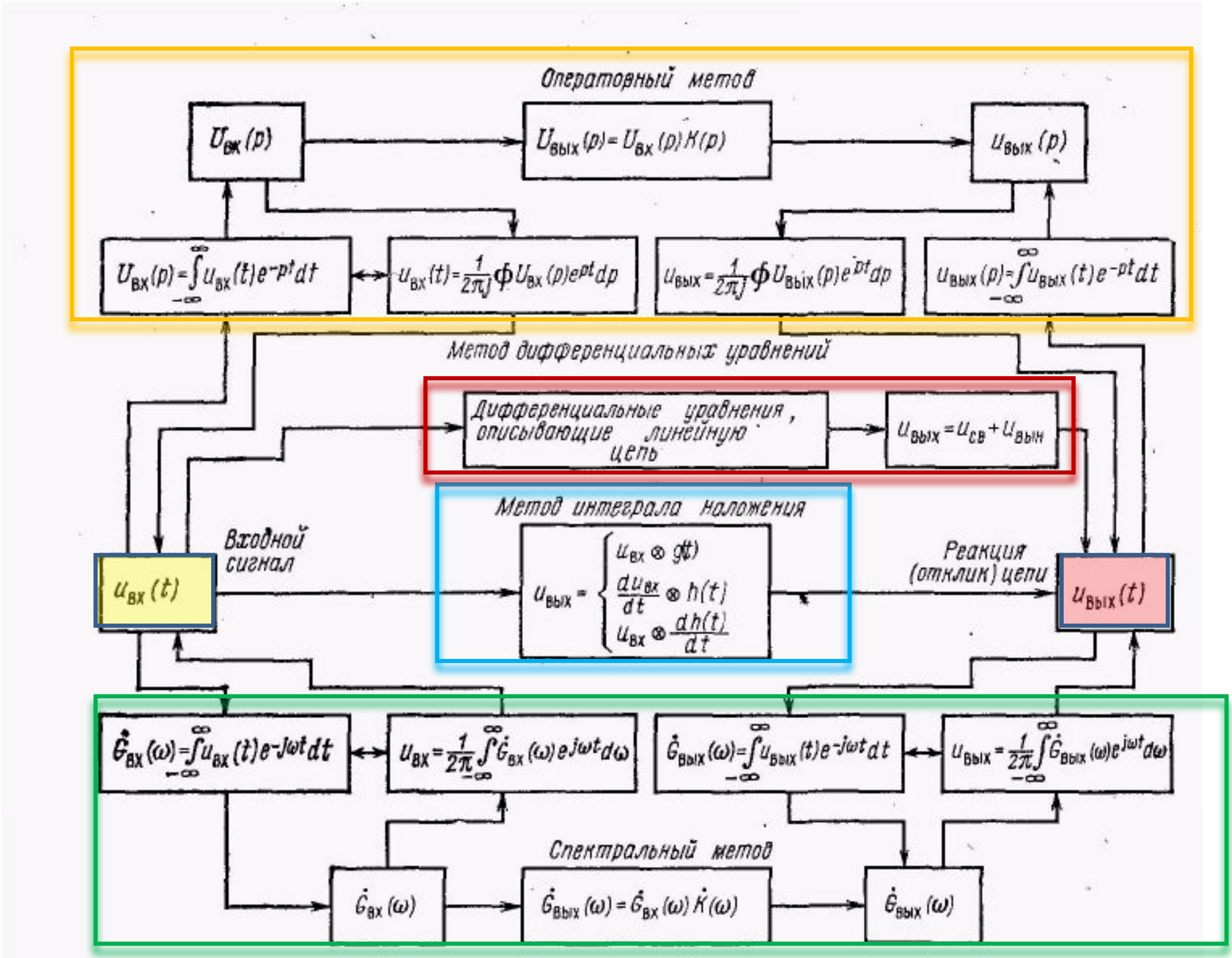
# Методы решения задач в линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами



# Точные методы решения задач в линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами



# Точные методы решения задач в линейных стационарных системах с сосредоточенными параметрами



# Спектральный метод

Метод основан на спектральном представлении сигнала $\dot{G}_x(\omega)$ и использовании передаточной функции цепи $\dot{K}(\omega)$.

Пусть на входе линейного четырехполюсника с заданной передаточной функцией $\dot{K}(\omega)$ действует произвольный сигнал *x(t)*, обладающий спектральной плотностью $\dot{G}_x(\omega)$ :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_x(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Согласно спектральному методу анализа спектральная плотность сигнала *y*(*t*) на выходе четырехполюсника равна произведению спектральной плотности входного сигнала $\dot{G}_x(\omega)$ на передаточную функцию цепи $\dot{K}(\omega)$, т. е.

$$\dot{G}_y(\omega) = \dot{G}_x(\omega)\,\dot{K}(\omega).$$

Применяя обратное преобразование Фурье, определяем выходной сигнал как функцию времени

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty} \dot{G}_x(\omega)\,\dot{K}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

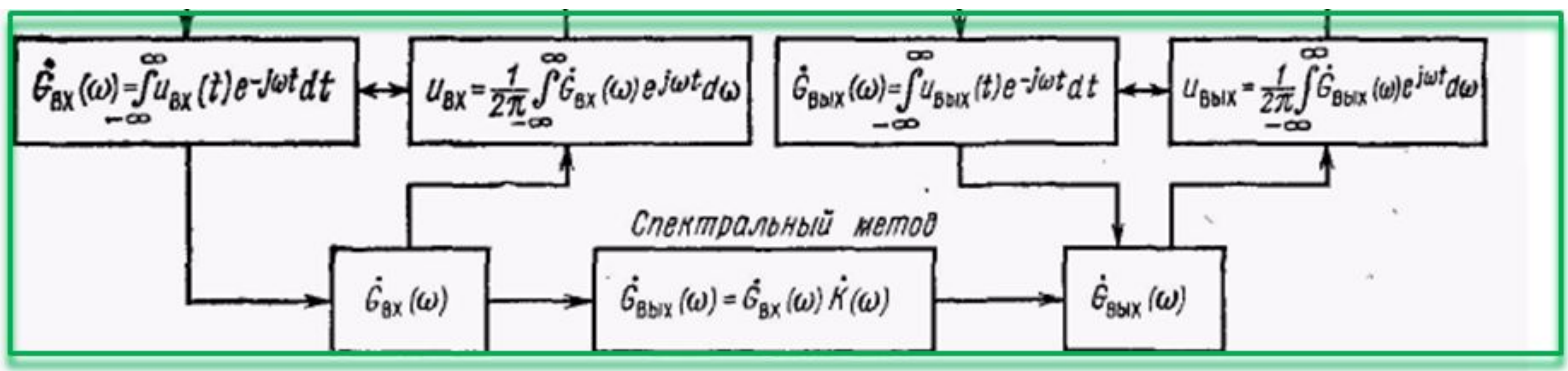
# Спектральный метод

Из сравнения (5.16) с (5.14) следует, что сигнал на выходе линейного четырехполюсника можно получить суммированием *элементарных спектральных составляющих входного сигнала*

$$\frac{1}{2\pi}\ \dot{G}_x(\omega)\, d\omega\, e^{j\omega t}$$

с комплексными амплитудами, умноженными на функцию $\dot{K}(\omega)$ .

Передаточная функция цепи $\dot{K}(\omega)$, определяющая относительный вклад составляющих спектра входного сигнала в сигнал *y*(*t*)*,* имеет смысл *весовой функции.*



# Условия неискаженной передачи сигнала линейным четырехполюсником

Сигнал проходит через линейную цепь без искажений, если его форма не изменяется, а происходит только изменение масштаба и сдвиг во времени.

При прохождении через линейный четырехполюсник сигнала $x(t)$ спектральная плотность выходного сигнала $y(t)$, равная

$$\dot{G}_y(\omega) = \dot{G}_x(\omega)\,\dot{K}(\omega)$$

может отличаться от спектральной плотности сигнала на входе $\dot{G}_x(\omega)$. При этом форма выходного сигнала отлична от входного.

Искажения, вызванные частотной зависимостью передаточной функции линейного четырехполюсника называют *линейными* (или *частотными)* искажениями. О характере и величине этих искажений можно судить по амплитудно- и фазочастотным характеристикам цепи, т. е. по модулю и аргументу функции $\dot{K}(\omega)$.

При прохождении сигнала $x(t)$ через неискажающий четырехполюсник реакцию $y(t)$ можно записать в виде

$$y(t) = K\,x(t - t_з),$$

где $K$ = const — коэффициент пропорциональности, $t_з$ — время задержки.

# Условия неискаженной передачи сигнала линейным четырехполюсником

Учитывая свойство линейности и временного сдвига, спектральную плотность реакции цепи можно записать как

$$\dot{G}_y(\omega) = \dot{G}_x(\omega)\,\dot{K}(\omega) = K\,\dot{G}_x(\omega)\,e^{-j\omega t_з}.$$

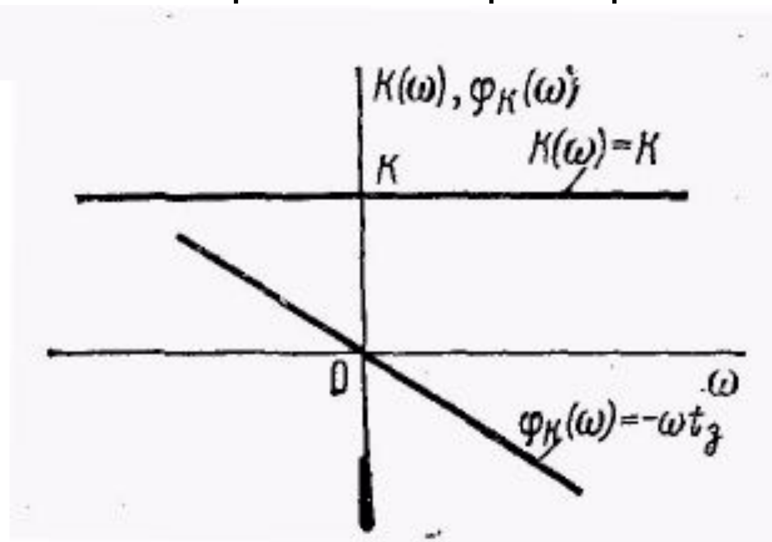
Следовательно, неискажающий четырехполюсник должен иметь передаточную функцию вида

$$\dot{K}(\omega) = K e^{-j\omega t_з},$$

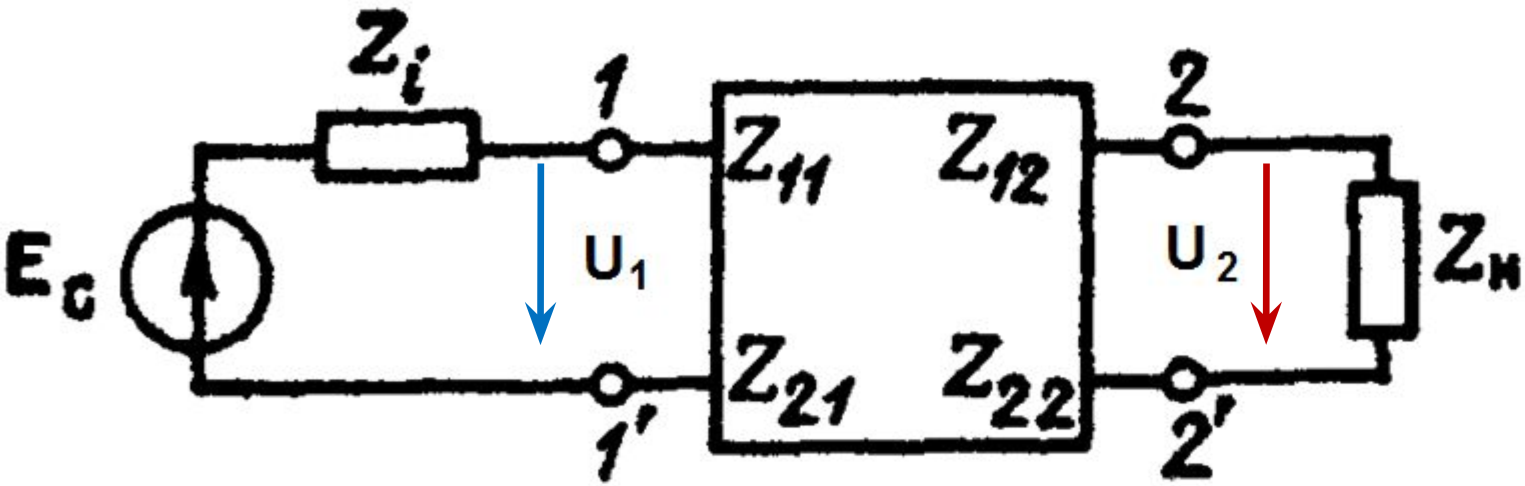
т. е. равномерную частотную характеристику $\dot{K}(\omega) = \dot{K}_0$ и линейную фазовую характеристику $\varphi_K(\omega) = -t_з\,\omega$, показанные на рисунке. Задержка сигнала $t_з$, создаваемая такой цепью, определяется наклоном её фазовой характеристики

$$t_з = |d\varphi_K(\omega)/d\omega|.$$

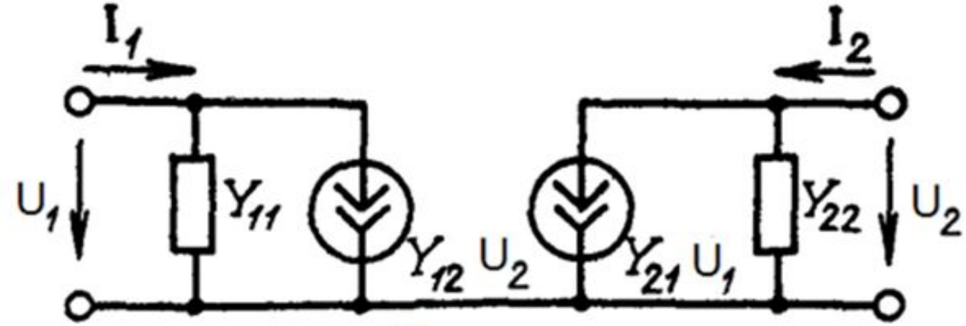
Частотные характеристики реальных четырехполюсников могут приближаться к характеристикам неискажающего четырехполюсника только в ограниченном диапазоне частот.



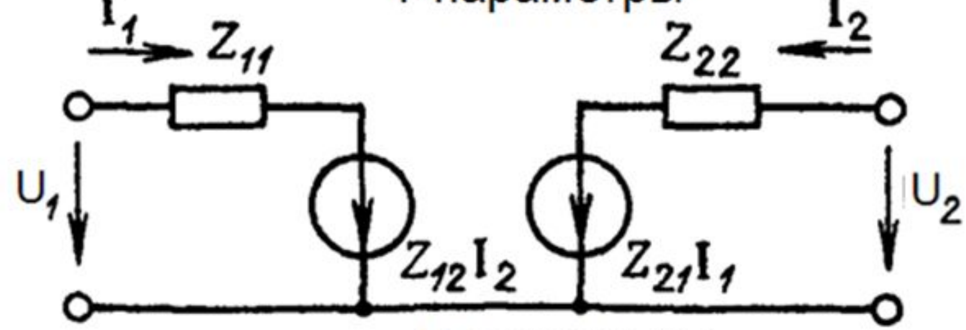
# Обобщенная схема активного 4-хполюсника с учетом параметров источника сигнала и нагрузки



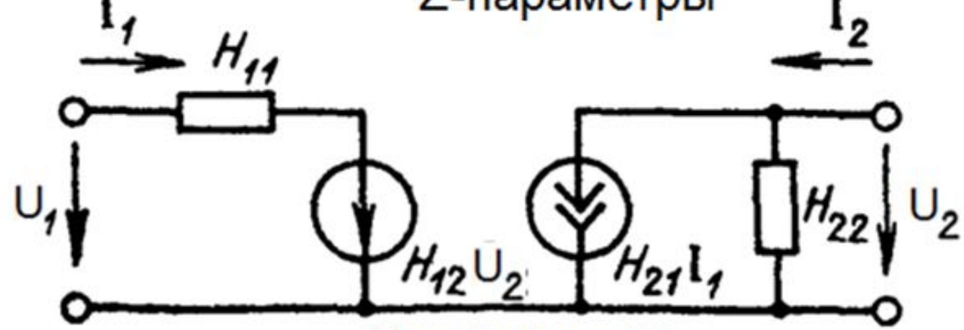
# Схемы замещения линейного активного четырехполюсника


Y-параметры

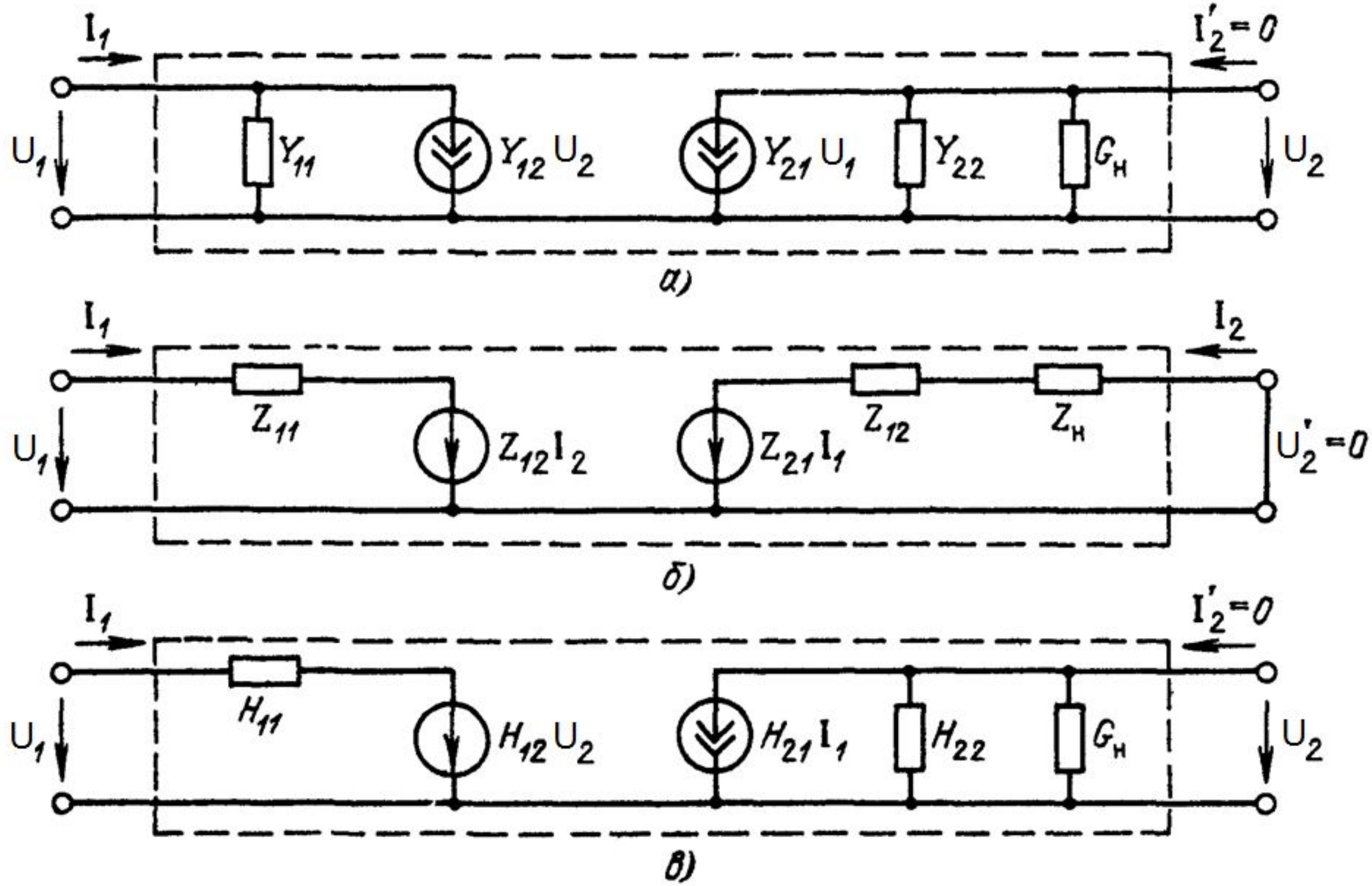



Z-параметры

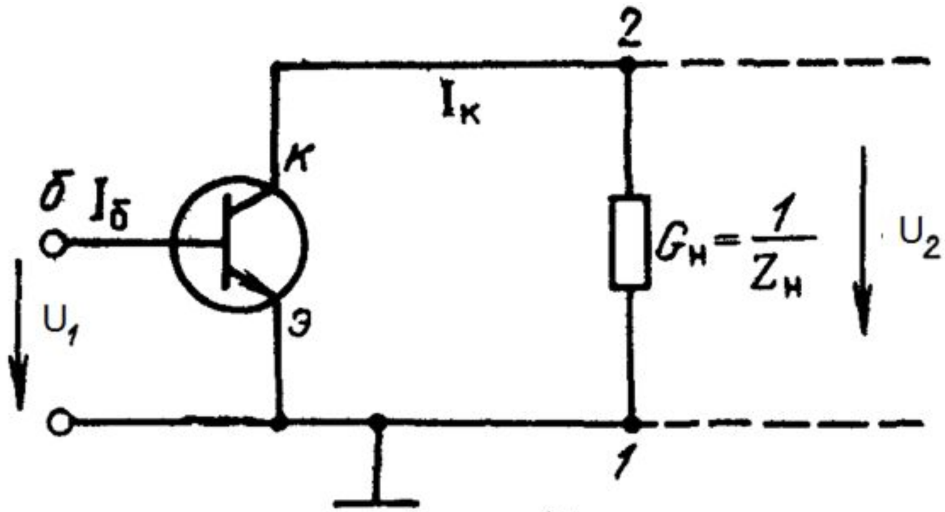



H-параметры

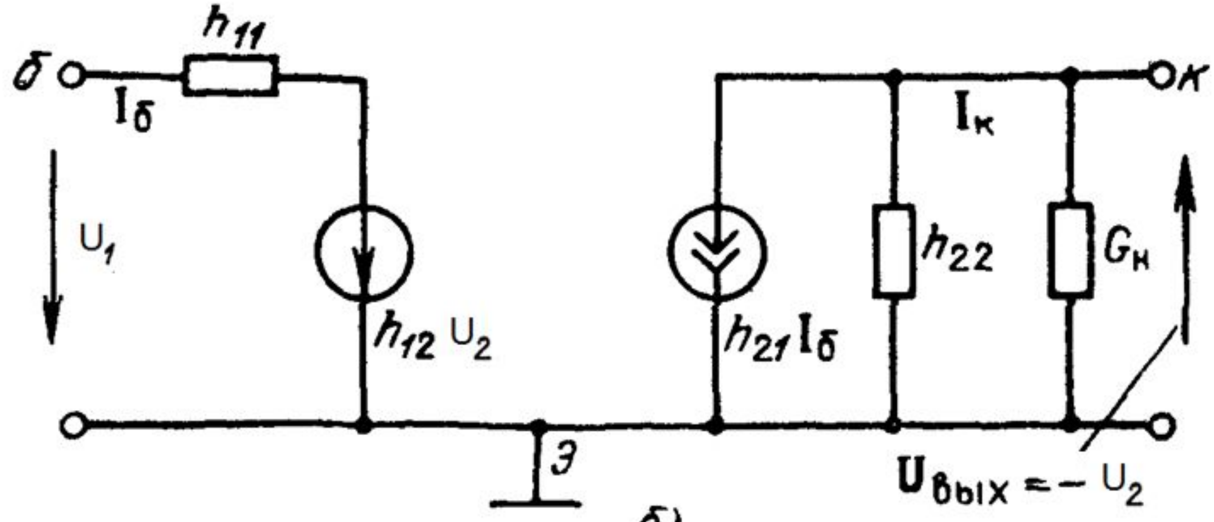
# Введение нагрузочного элемента в состав четырехполюсника



# Транзисторный усилитель (а)
# и его схема замещения (б)

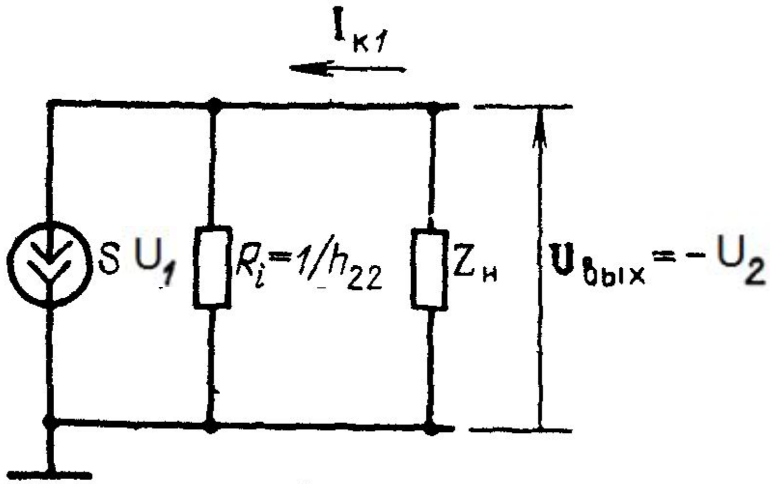



а)

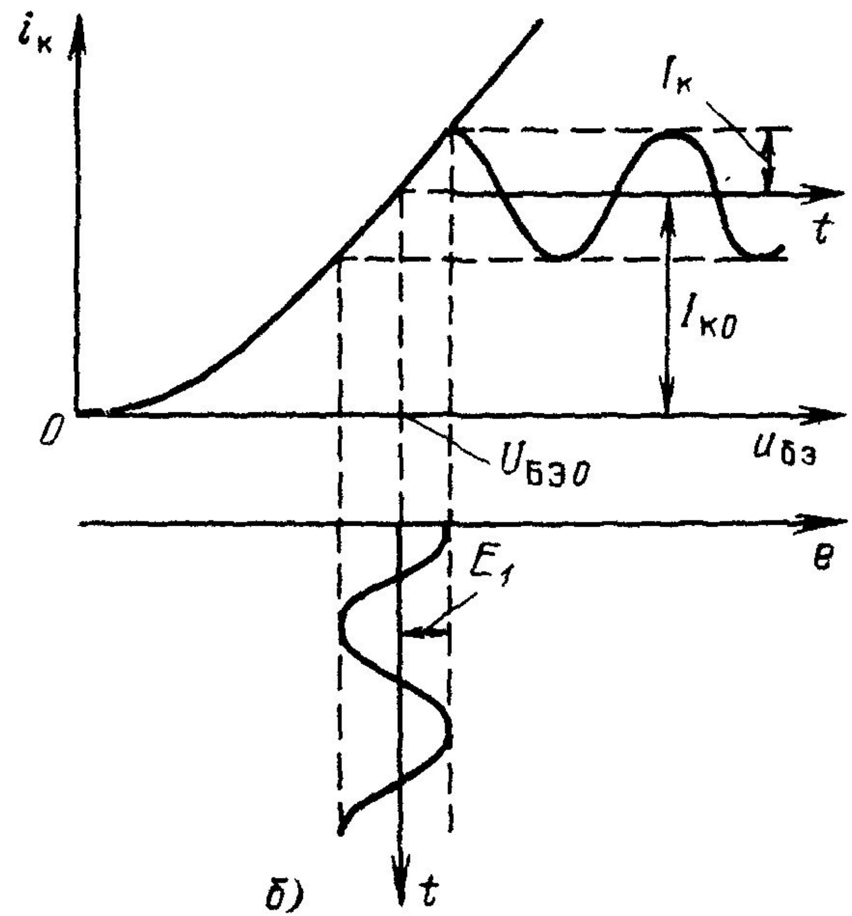



б)

# Схема замещения коллекторной цепи (а) и режим линейного усиления колебания в усилителе с ОЭ (б)

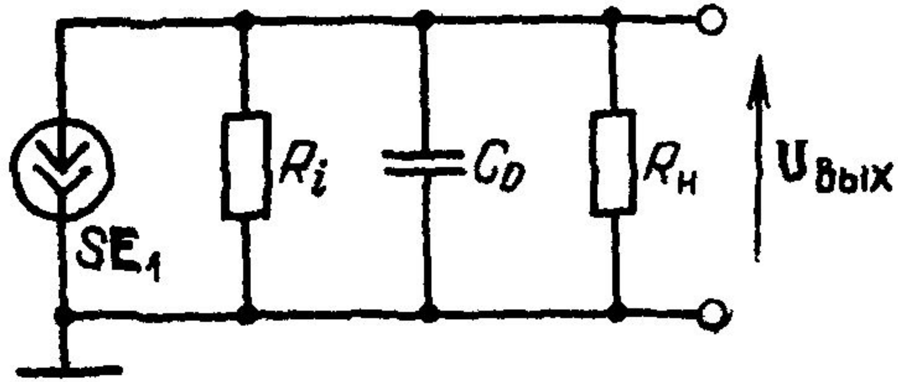


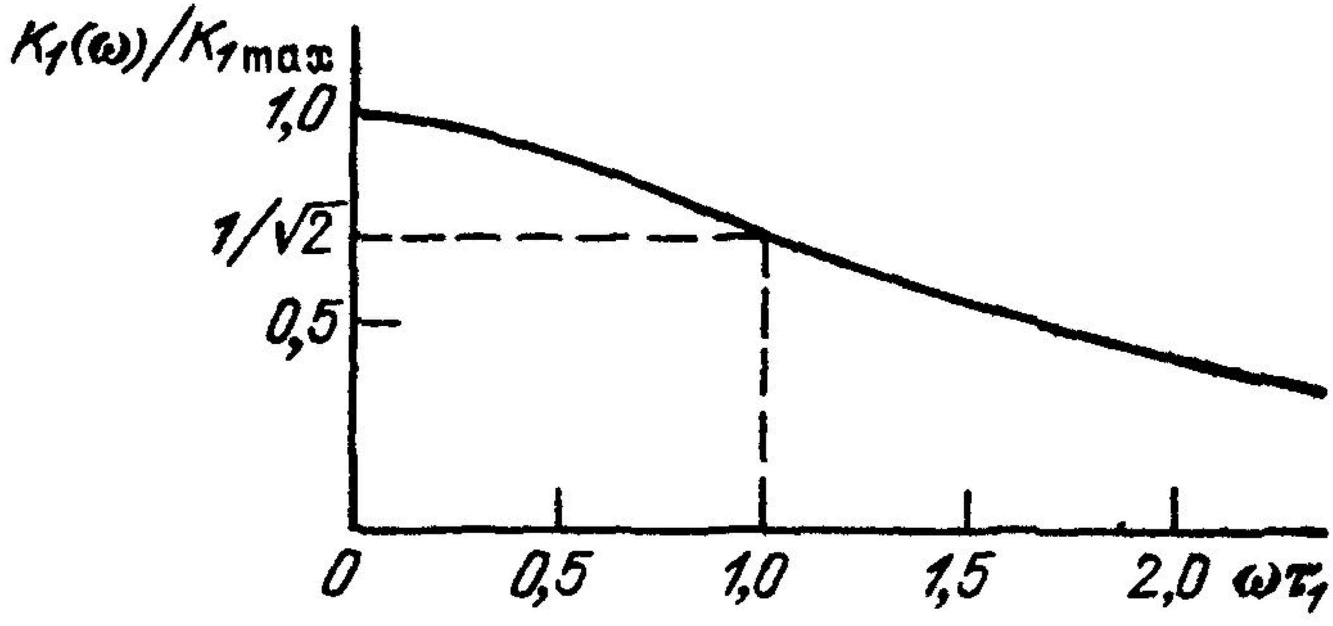
а)



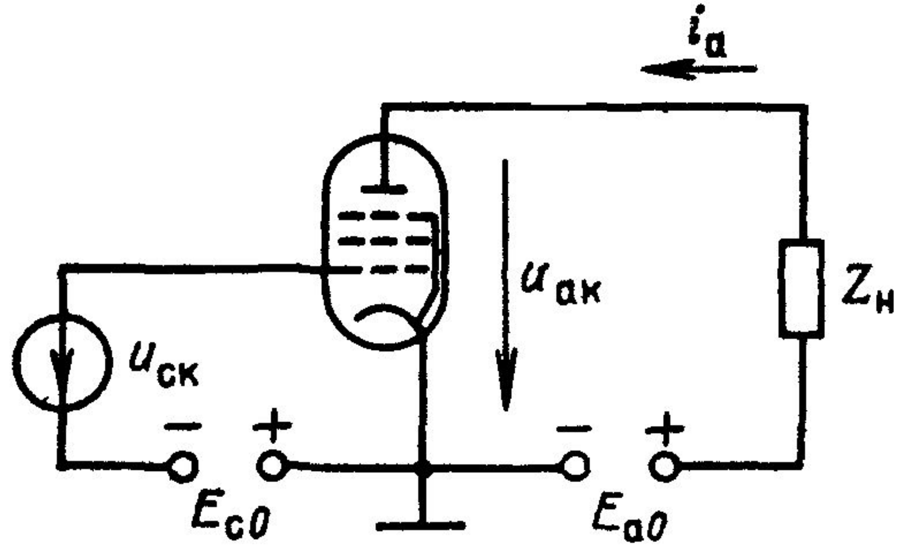
б)

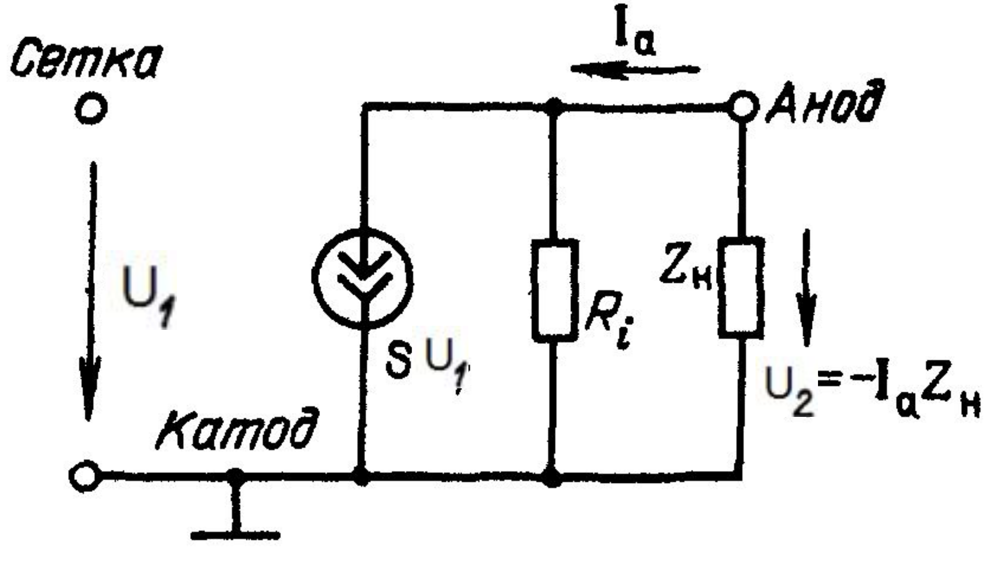
# Схема замещения апериодического усилителя и его амплитудно-частотная характеристика



# Простейший усилитель на пентоде и схема замещения анодной цепи



# Прохождение малых сигналов через резистивный усилитель на транзисторе

Проведем приближенный анализ прохождения сигналов через инерционные цепи на примере наиболее распространенной схемы резистивного усилителя малых сигналов на транзисторе с общим эмиттером. Этот усилитель, относящийся к классу активных четырехполюсников с постоянными параметрами, обеспечивает усиление и по напряжению, и по току.

Схема замещения усилителя по переменной составляющей изображена ниже на рисунке, где приняты следующие обозначения:

*V*вх*, R*ВХ - комплексная амплитуда напряжения и внутреннее сопротивление источника входного сигнала;

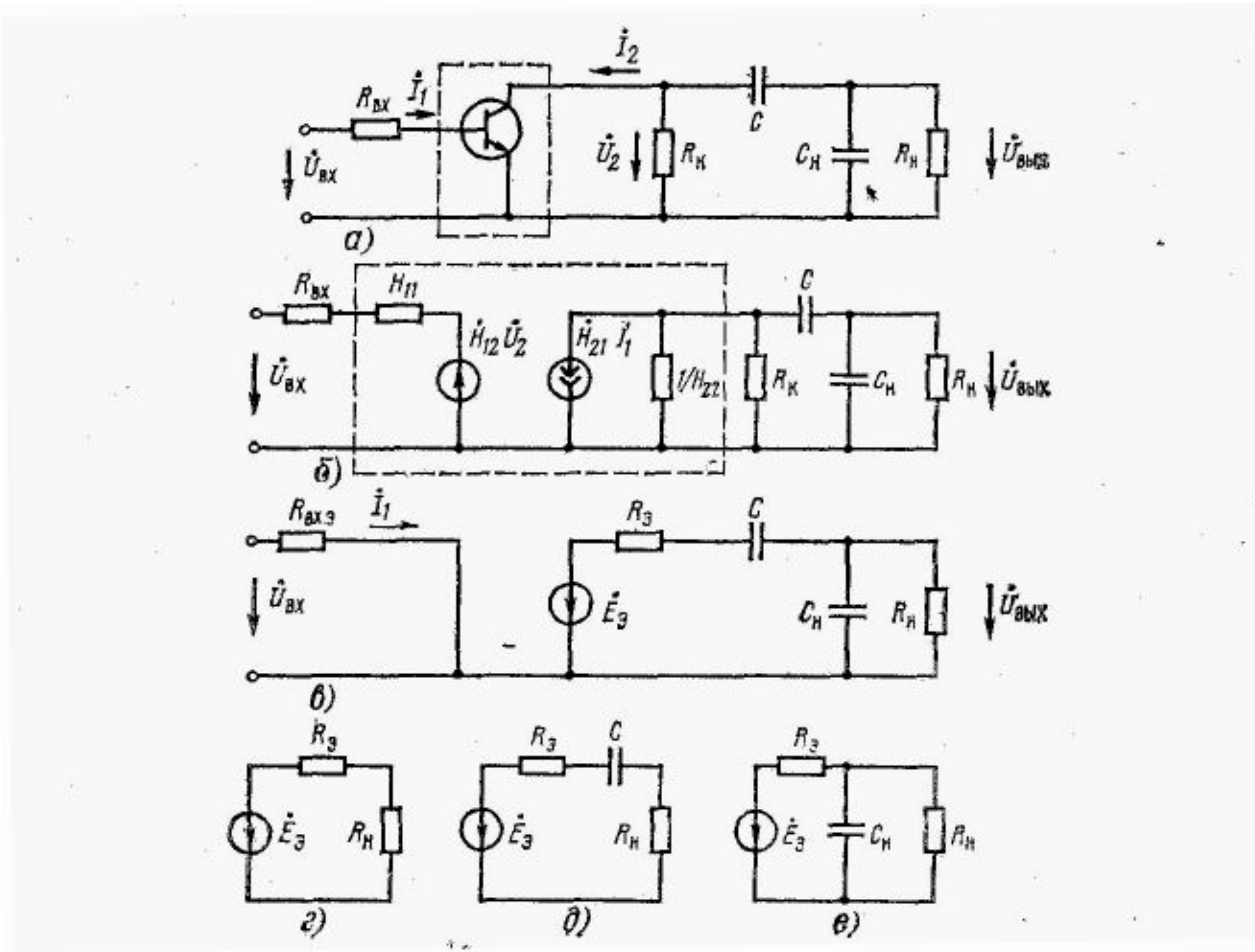
$R_K$, $R_B$ - сопротивление в цепи коллектора и нагрузки соответственно;

$C_н$ - емкость нагрузки с учетом паразитной емкости выходной цепи на землю;

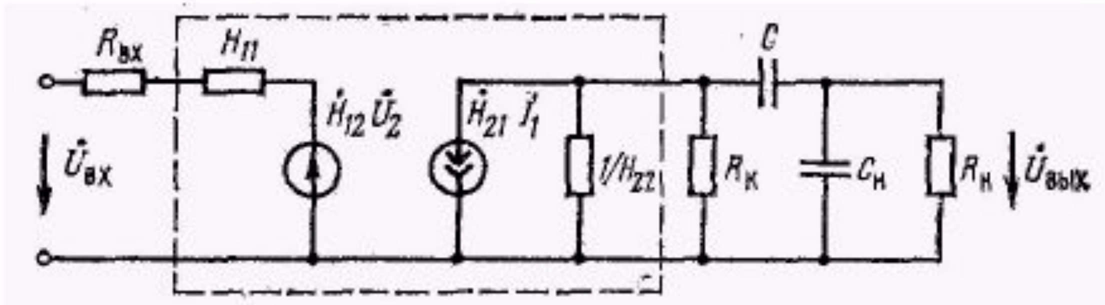
*C* - разделительная емкость;

$\omega_0$ - предельная угловая частота передачи тока базы в схеме с общим эмиттером, на которой $|\dot{H}_{21}(\omega_\beta)| = H_{21}(0)/\sqrt{2}.$

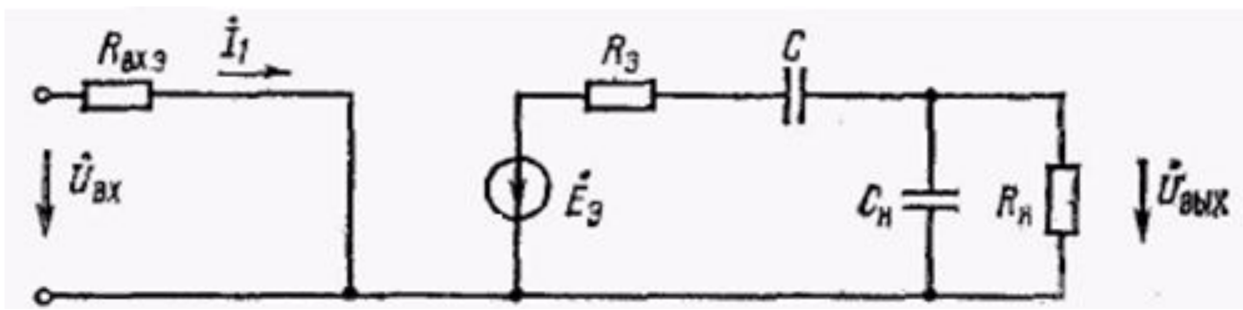
# Эквивалентные схемы резистивного усилителя малых сигналов на транзисторе



# Прохождение малых сигналов через резистивный усилитель на транзисторе




Применив к коллекторной цепи теорему об эквивалентном генераторе, получим схему замещения усилителя




где

$$R_{вх.э} = R_{вх} + H_{11},\ R_э = \left(\frac{1}{H_{22}} \,\middle\|\, R_к\right),$$

$$\dot{E}_э = \dot{H}_{21}\dot{I}_1 R_э.$$

# Прохождение малых сигналов через резистивный усилитель на транзисторе

Определим передаточную функцию усилителя

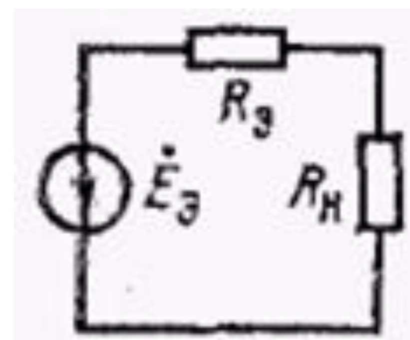
$$\dot{K}(\omega) = \dot{U}_{вых}/\dot{U}_{вх}$$

отдельно для средних, нижних и верхних частот.

1. Областью средних частот $\omega_{ср}$ считают интервал частот, в котором можно пренебречь как емкостью нагрузки $C_н$, так и разделительной емкостью $C$, т. е.

$$1/\omega C_н \approx \infty, \; 1/\omega C \approx 0.$$

В этой области можно также пренебречь инерционностью транзистора, полагая $H21(j\omega) = H21$.
Схема замещения выходной цепи на средних частотах




Комплексная амплитуда напряжения на выходе устройства равна

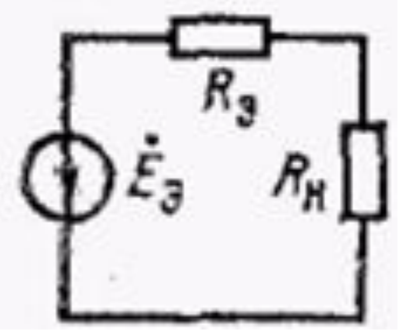
$$\dot{U}_{вых} = -\frac{\dot{E}_э}{R_э + R_н} R_н.$$

# Средние частоты

Коэффициент усиления $\dot{K}(\omega_{ср})$ при этом определяется выражением

$$\dot{K}(\omega_{ср}) = \frac{\dot{U}_{вых}(\omega_{ср})}{\dot{U}_{вх}} = \frac{-H_{21}}{R_{вх.э}} \frac{R_н R_э}{(R_н + R_э)} = K_{ср}$$

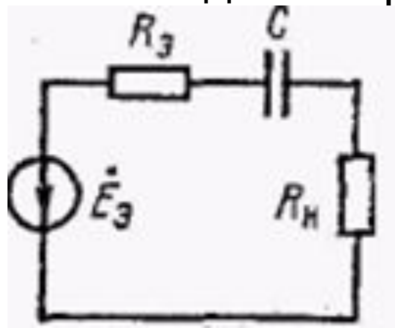
и является величиной действительной и постоянной.
Знак минус указывает на противофазность входного и выходного напряжений.




$$\dot{U}_{вых} = -\frac{\dot{E}_э}{R_э + R_н} R_н.$$

# Нижние частоты

2. В области нижних частот $\omega_н$ следует дополнительно учесть влияние емкости *C* разделительного конденсатора. Схема замещения выходной цепи принимает вид




Запишем комплексную амплитуду напряжения на выходе схемы

$$\dot{U}_{вых}(\omega_н) = \frac{-\dot{E}_э R_н}{(R_э + R_н) + 1/j\,\omega C}.$$

При этом коэффициент усиления в области нижних частот определяется выражением

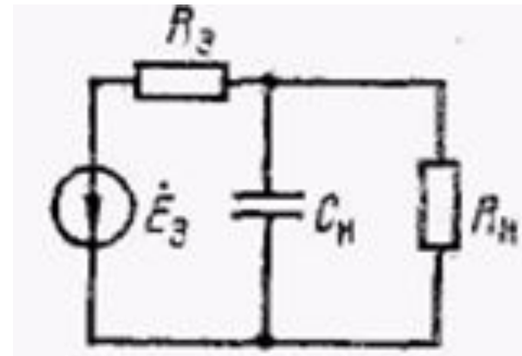
$$\dot{K}(\omega_н) = \frac{\dot{U}_{вых}(\omega_н)}{\dot{U}_{вх}} = \frac{K_{ср}}{1 + 1/j\,\omega\tau_н},$$

где

$$\tau_н = (R_э + R_н)\,C.$$

# Высокие частоты

3. В области верхних частот $\omega_в$ следует учитывать шунтирующее действие емкости нагрузки $C_н$ и инерционность транзистора. Схема замещения выходной цепи усилителя на верхних частотах




Запишем для этой схемы комплексную амплитуду выходного напряжения

$$\dot{U}_{вых}(\omega_в) = \frac{-\dot{E}_э\left(\dfrac{R_н / j\omega C_н}{R_н + 1/j\omega C_н}\right)}{R_э + \left(\dfrac{R_н / j\omega C_н}{R_н + 1/j\omega C_н}\right)}.$$

Коэффициент усиления в области высоких частот определяется выражением

$$\dot{K}(\omega_в) = \frac{\dot{U}_{вых}(\omega_в)}{\dot{U}_{вх}} = \frac{K_{ср}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_\beta}\right)(1 + j\omega\tau_в)} =$$

$$= \frac{K_{ср}}{\left(1 - \dfrac{\omega^2 \tau_в}{\omega_\beta}\right) + j\omega\left(\dfrac{1}{\omega} + \tau_в\right)},$$

где

$$\tau_в = C_н (R_э R_н)/(R_э + R_н).$$

# Коэффициент передачи резистивного усилителя с апериодической нагрузкой

1. **Средние частоты**

В области средних частот модуль и аргумент коэффициента усиления не зависят от частоты

$$K_{\text{ср}} = -\frac{H_{21} R_{э} R_{н}}{R_{\text{вх.э}} (R_{э} + R_{н})},$$

$$\varphi_K(\omega_{\text{ср}}) = 0.$$

2. **Нижние частоты**

С понижением частоты из-за падения напряжения на разделительном конденсаторе коэффициент усиления уменьшается

$$K(\omega_{н}) = \frac{K_{\text{ср}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau_{н}}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_K(\omega_{н}) = 1/\omega\tau_{н}.$$

3. **Верхние частоты**

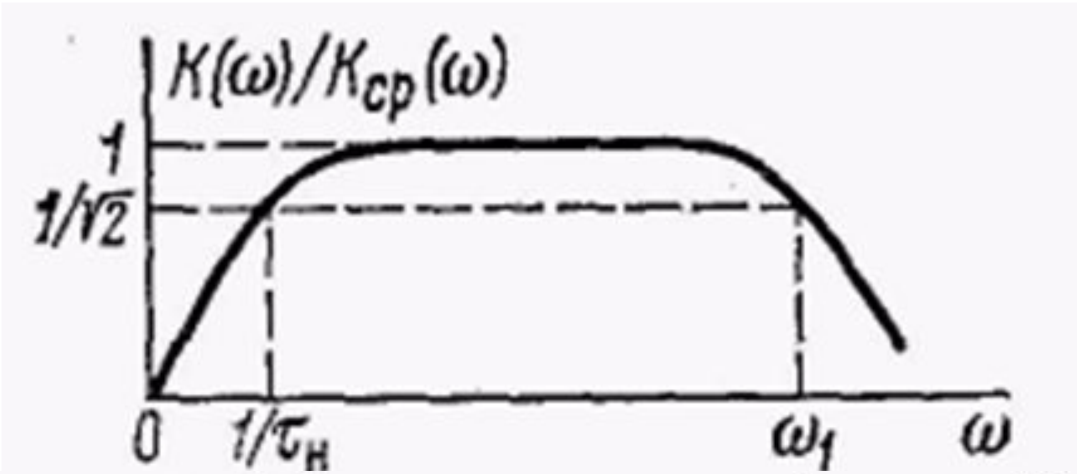
С повышением частоты возрастает шунтирующее действие емкости $C_{н}$,

в результате чего коэффициент усиления снижается

$$K(\omega_{в}) = \frac{K_{\text{ср}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 \tau_{в}}{\omega_{\beta}}\right)^2 + \left[\omega\left(\frac{1}{\omega_{\beta}} + \tau_{в}\right)\right]^2}},$$

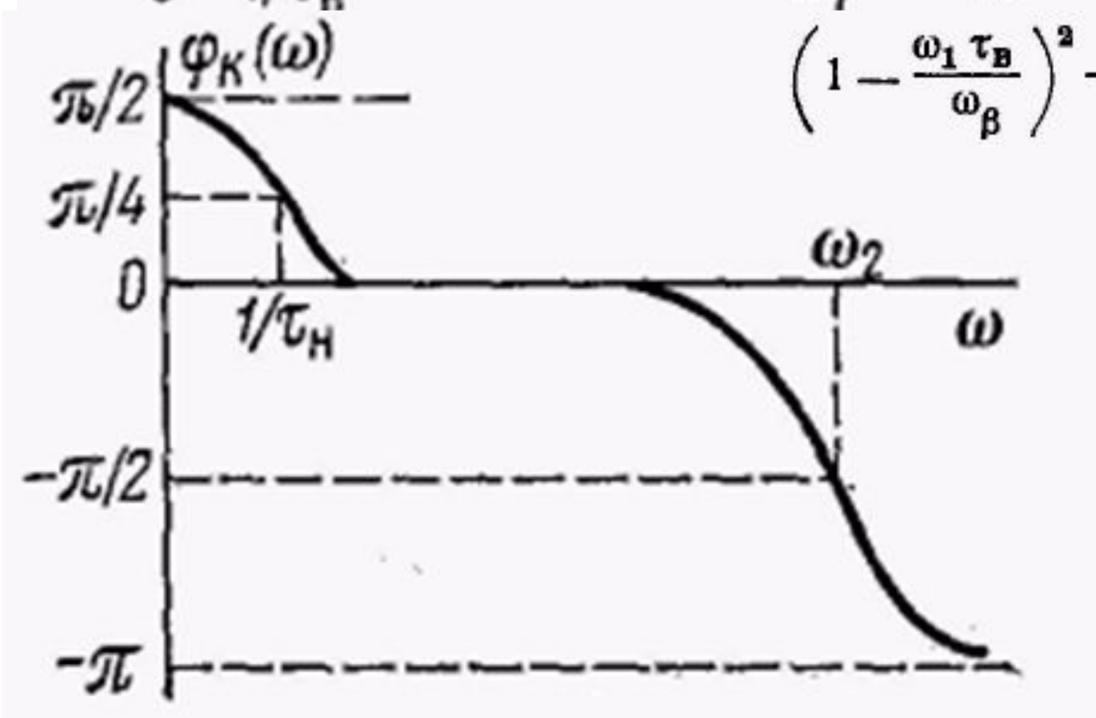
$$\operatorname{tg}\varphi_K(\omega_{в}) = -\frac{\omega\left(\frac{1}{\omega_{\beta}} + \tau_{в}\right)}{\left(1 + \frac{\omega^2 \tau_{в}}{\omega_{\beta}}\right)}.$$

# Коэффициент передачи резистивного усилителя с апериодической нагрузкой




Амплитудно-частотная характеристика усилителя

$$\left(1-\frac{\omega_1\tau_{\text{в}}}{\omega_\beta}\right)^2+\left[\omega_1\left(\frac{1}{\omega_\beta}+\tau_{\text{в}}\right)\right]^2=2.$$




Фазо-частотная характеристика усилителя

$$\omega_2=\sqrt{\omega_\beta/\tau_{\text{в}}}.$$

# Коэффициент передачи резистивного усилителя с апериодической нагрузкой по току

Коэффициент усиления по току

$$\dot{K}_i(\omega) = \dot{I}_2(\omega) / \dot{I}_1(\omega).$$

Комплексные амплитуды токов на входе и выходе усилителя находятся по его схеме замещения:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_{\text{вх}} / R_{\text{вх.э}}, \qquad \dot{I}_2 = \dot{U}_{\text{вых}} / R_{\text{н}}.$$

При этом выражение для коэффициента усиления по току примет вид:

$$\dot{K}_i(\omega) = \dot{U}_{\text{вых}} R_{\text{вх.э}} / R_{\text{н}} \dot{U}_{\text{вх}} = \dot{K}(\omega) R_{\text{вх.э}} / R_{\text{н}}.$$

Коэффициент усиления по току с точностью до коэффициента $R_{\text{вх.э}}/R_{\text{н}}$ повторяет коэффициент усиления по напряжению.