

# РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 2

Доцент Трухин М.П.

## 2. Теория представления сигналов

В XX в. был создан функциональный анализ — раздел математики, обобщающий наши интуитивные представления о геометрической структуре пространства. Оказалось, что идеи функционального анализа дают возможность создать стройную теорию сигналов, в основе которой лежит концепция сигнала как вектора в специальном образом сконструированном бесконечномерном пространстве.

## 2.1. Линейное пространство сигналов

**Линейное пространство сигналов.** Пусть  $M = \{s_1(t), s_2(t), \dots\}$  — множество сигналов. Причина объединения этих объектов — наличие некоторых свойств, общих для всех элементов множества  $M$ .

*Пример.* Множество  $M$  образовано всевозможными аналоговыми сигналами, отличными от нуля на интервале времени  $(0, 15 \text{ мкс})$  и равными нулю вне этого интервала.

*Пример.* Множество  $M$  состоит из сигналов вида  $s_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$  — гармонических колебаний, отличающихся своими амплитудами, частотами и начальными фазами.

Исследование свойств сигналов, образующих такие множества, становится особенно плодотворным тогда, когда удастся выразить одни элементы множества через другие элементы. Принято говорить, что множество сигналов наделено при этом определенной *структурой*. Выбор той или иной структуры должен быть продиктован физическими соображениями.

## Структура линейного пространства

Множество сигналов  $M$  образует *вещественное линейное пространство*, если справедливы следующие аксиомы:

1. Любой сигнал  $u \in M$  при любых  $t$  принимает лишь вещественные значения.

2. Для любых  $u \in M$  и  $v \in M$  существует их сумма  $w = u + v$ , причем  $w$  также содержится в  $M$ . Операция суммирования коммутативна:  $u + v = v + u$  и ассоциативна:  $u + (v + x) = (u + v) + x$ .

3. Для любого сигнала  $s \in M$  и любого вещественного числа  $\alpha$  определен сигнал  $f = \alpha s \in M$ .

4. Множество  $M$  содержит особый нулевой элемент  $\emptyset$ , такой, что  $u + \emptyset = u$  для всех  $u \in M$ .

Если математические модели сигналов принимают комплексные значения, то, допуская в аксиоме 3 умножение на комплексное число, приходим к понятию *комплексного линейного пространства*.

## Структура линейного пространства

Введение структуры линейного пространства является первым шагом на пути к геометрической трактовке сигналов. Элементы линейных пространств часто называют *векторами*, подчеркивая аналогию свойств этих объектов и обычных трехмерных векторов.

Ограничения, налагаемые аксиомами линейного пространства, весьма жестки. Далеко не каждое множество сигналов оказывается линейным пространством.

**Пример.** Множество  $M$  состоит из всевозможных прямоугольных видеоимпульсов напряжения, существующих на интервале времени  $(0, 20 \text{ мкс})$ , причем амплитуды импульсов не превышают  $10 \text{ В}$ .

Сложив, например, импульсы с амплитудами  $6$  и  $8 \text{ В}$ , получаем импульс, не принадлежащий множеству  $M$ . Поэтому  $M$  не есть линейное пространство.

## Координатный базис

Говорят, что совокупность векторов  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ , принадлежащих  $M$ , является *линейно независимой*, если равенство

$$\sum_i \alpha_i e_i = \emptyset$$

возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов  $\alpha_i$ .

Система линейно независимых векторов образует *координатный базис* в линейном пространстве. Если дано разложение некоторого сигнала  $s(t)$  в виде

$$s(t) = \sum_i c_i e_i,$$

то числа  $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$  являются *проекциями* сигнала  $s(t)$  относительно выбранного базиса.

В задачах теории сигналов число базисных векторов, как правило, неограниченно велико. Такие линейные пространства называют *бесконечномерными*.

# Координатный базис

**Пример.** *Линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка:*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n$$

*(такие функции называются аналитическими).*

Координатным базисом в этом пространстве служит система одночленов  $\{e_0 = 1; e_1 = t; e_2 = t^2; \dots\}$ .

## Нормированное линейное пространство

Длину вектора в математике называют его *нормой*. Линейное пространство сигналов  $L$  является *нормированным*, если каждому вектору  $s(t) \in L$  однозначно сопоставлено число  $\|s\|$  — норма этого вектора, причем выполняются следующие аксиомы нормированного пространства:

1. Норма неотрицательна, т. е.  $\|s\| \geq 0$ . Норма  $\|s\| = 0$  тогда и только тогда, если  $s = \emptyset$ .

2. Для любого числа  $\alpha$  справедливо равенство  $\|\alpha s\| = |\alpha| \cdot \|s\|$ .

3. Если  $s(t)$  и  $p(t)$  — два вектора из  $L$ , то выполняется неравенство треугольника:  $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$ .



## Нормированное линейное пространство

Можно предложить разные способы введения нормы сигналов. В радиотехнике чаще всего полагают, что вещественные аналоговые сигналы имеют норму

$$\| s \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}$$

(из двух возможных значений корня выбирается положительное). Для комплексных сигналов норма

$$\| s \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t) dt},$$

где \* — символ комплексно-сопряженной величины.

Квадрат нормы носит название *энергии сигнала*

$$E_s = \| s \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

## Нормированное линейное пространство

**Пример.** Сигнал  $s(t)$  представляет собой треугольный импульс напряжения с амплитудой  $U$  и длительностью  $\tau_{\text{и}}$ . Вычислить энергию и норму такого сигнала.

На интервале времени  $(0, \tau_{\text{и}})$  сигнал описывается функцией

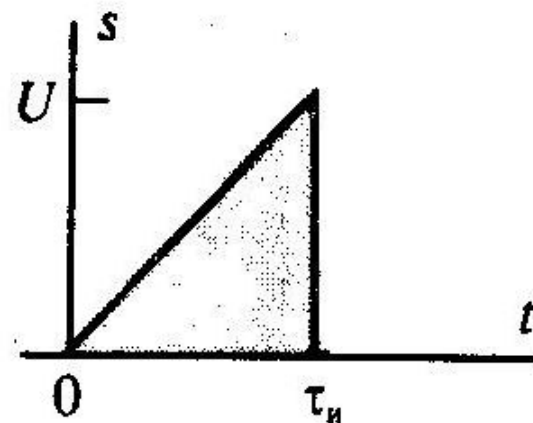
$$s(t) = Ut/\tau_{\text{и}}.$$

Энергия сигнала

$$E_s = (U^2/\tau_{\text{и}}^2) \int_0^{\tau_{\text{и}}} t^2 dt = U^2\tau_{\text{и}}/3.$$

Норма сигнала

$$\|s\| = \sqrt{E_s} = U\sqrt{\tau_{\text{и}}}/\sqrt{3}.$$



## Нормированное линейное пространство

**Пример.** Вычислить энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей. Импульс существует на интервале времени  $(0, \tau_{\text{и}})$  и описывается функцией  $s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

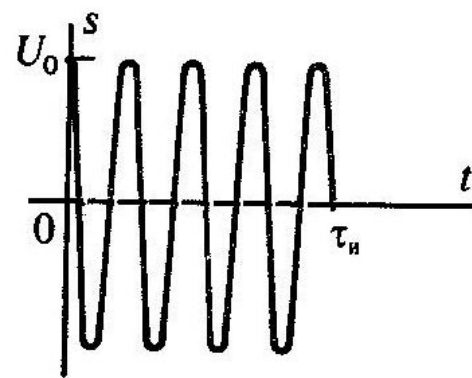
В соответствии с формулой (1.16)

$$E_s = U_0^2 \int_0^{\tau_{\text{и}}} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0 \tau_{\text{и}} + \varphi_0} \cos^2 x dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$E_s = \frac{U_0^2}{4\omega_0} [2(\omega_0 \tau_{\text{и}} + \varphi_0) + \sin 2(\omega_0 \tau_{\text{и}} + \varphi_0)].$$

Если внутри импульса содержится много периодов высокочастотного заполнения, так что  $\omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1$ , то  $E_s \approx U_0^2 \tau_{\text{и}} / 2$  независимо от выбора параметров  $\omega_0$  и  $\varphi_0$ .



## Нормированное линейное пространство

**Пример.** Вычислить энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей. Импульс существует на интервале времени  $(0, \tau_{\text{и}})$  и описывается функцией  $s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

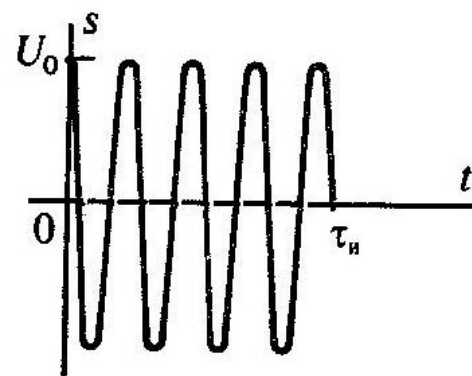
В соответствии с формулой (1.16)

$$E_s = U_0^2 \int_0^{\tau_{\text{и}}} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0 \tau_{\text{и}} + \varphi_0} \cos^2 x dx.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$E_s = \frac{U_0^2}{4\omega_0} [2(\omega_0 \tau_{\text{и}} + \varphi_0) + \sin 2(\omega_0 \tau_{\text{и}} + \varphi_0)].$$

Если внутри импульса содержится много периодов высокочастотного заполнения, так что  $\omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1$ , то  $E_s \approx U_0^2 \tau_{\text{и}} / 2$  независимо от выбора параметров  $\omega_0$  и  $\varphi_0$ .



Определять норму сигнала с помощью формулы целесообразно по следующим причинам:

1. В радиотехнике о величине сигнала часто судят, исходя из суммарного энергетического эффекта, например количества теплоты, выделяемой в резисторе.

2. Энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, может быть, и значительным, но происходящим на коротких отрезках времени.

Линейное нормированное пространство с конечной величиной нормы вида

$$E_s = \| s \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

носит название *пространства функций с интегрируемым квадратом* и кратко обозначается  $L_2$ .

## Метрическое пространство

**Метрическое пространство.** Теперь необходимо ввести еще одно фундаментальное понятие, которое обобщало бы наше обычное представление о расстоянии между точками в пространстве.

Говорят, что линейное пространство  $L$  становится *метрическим пространством*, если каждой паре элементов  $u, v \in L$  сопоставлено неотрицательное число  $\rho(u, v)$ , называемое *метрикой*, или *расстоянием* между этими элементами. Метрика, независимо от способа ее определения, должна подчиняться аксиомам метрического пространства:

1.  $\rho(u, v) = \rho(v, u)$  (рефлексивность метрики).
2.  $\rho(u, u) = 0$  при любых  $u \in L$ .
3. Каков бы ни был элемент  $w \in L$ , всегда  $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ .

## Метрическое пространство

Обычно метрику определяют как норму разности двух сигналов:

$$\rho(u, v) = \|u - v\|.$$

Норму, в свою очередь, можно понимать как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом:  $\|u\| = \rho(u, \emptyset)$ .

Зная метрику, можно судить, например, о том, насколько хорошо один из сигналов аппроксимирует другой.

**Пример.** Сигнал  $u(t)$  представляет собой отрезок синусоиды, обращаемой в нуль на концах отрезка  $[0, T]$ . Высота импульса  $U$  известна. Выбрать амплитуду  $A$  прямоугольного импульса  $v(t)$  той же длительности так, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным.

Сигнал  $u(t)$  представляется формулой

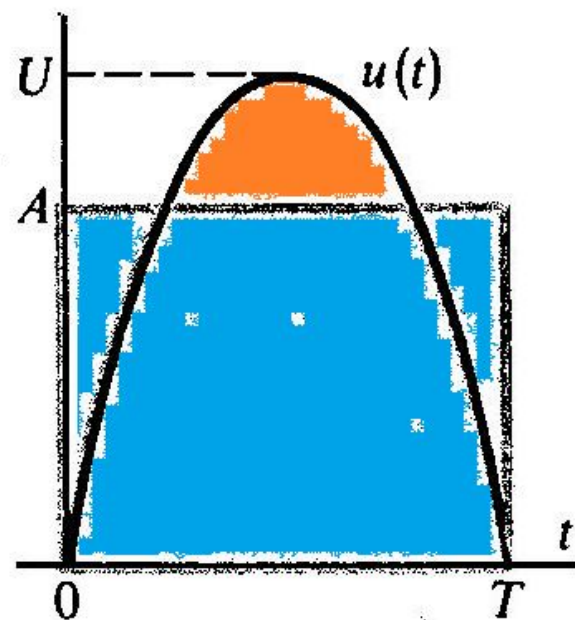
$$u(t) = U \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Квадрат расстояния между сигналами

$$\rho^2(u, v) = \int_0^T \left( U \sin \frac{\pi t}{T} - A \right)^2 dt.$$

Проведя интегрирование, имеем

$$\rho^2(u, v) = U^2 T / 2 - 4AUT / \pi + A^2 T.$$





Исследуя это выражение на экстремум, убеждаемся, что минимум расстояния будет достигнут, если  $A = 2U/\pi \approx 0.637U$ . При этом

$$\rho_{\min}^2 = U^2 T (1/2 - 4/\pi^2) \approx 0.095 U^2 T,$$

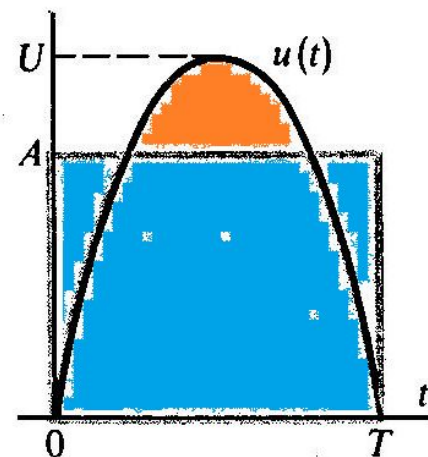
$$\rho_{\min} \approx 0.308 U \sqrt{T}.$$

Заметим, что энергия синусоидального импульса

$$E_u = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt = \frac{U^2 T}{2},$$

его норма  $\|u\| = 0.707 U \sqrt{T}$ .

Итак, при выбранной метрике минимально достижимое расстояние между рассматриваемыми сигналами составляет 44% от нормы синусоидального импульса.



## 2.2. Теория ортогональных сигналов

### Угол между сигналами

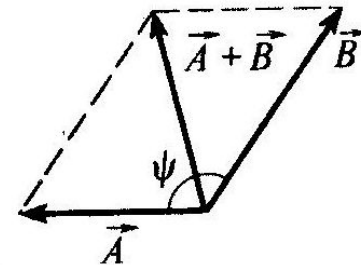
**Скалярное произведение сигналов.** Напомним, что если в обычном трехмерном пространстве известны два вектора  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , то квадрат модуля их суммы

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A}, \vec{B}),$$

где  $(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \psi$  — скалярное произведение этих векторов, зависящее от угла  $\psi$  между ними.

Действуя по аналогии, вычислим энергию суммы двух сигналов  $u$  и  $v$ :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u + v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt.$$



В отличие от самих сигналов их энергии неаддитивны — энергия суммарного сигнала содержит в себе так называемую *взаимную энергию*

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt.$$

## Скалярное произведение сигналов

Скалярное произведение вещественных сигналов  $u$  и  $v$ :

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt,$$

а также косинус угла между ними:

$$\cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1.  $(u, u) \geq 0$ ;
2.  $(u, v) = (v, u)$ ;
3.  $(\lambda u, v) = \lambda (u, v)$ , где  $\lambda$  — вещественное число;
4.  $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ .

## Гильбертово пространство сигналов

Линейное пространство с таким скалярным произведением, полное в том смысле, что оно содержит в себе все предельные точки любых сходящихся последовательностей векторов из этого пространства, называется *вещественным гильбертовым пространством*  $H$ .

Справедливо фундаментальное неравенство Коши – Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Если сигналы принимают комплексные значения, то можно определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в нем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt,$$

такое, что  $(u, v) = (v, u)^*$ .

**Пример.** Имеются два смещенных во времени экспоненциальных импульса (В):

$$u_1(t) = 5 \exp(-10^5 t) \sigma(t),$$

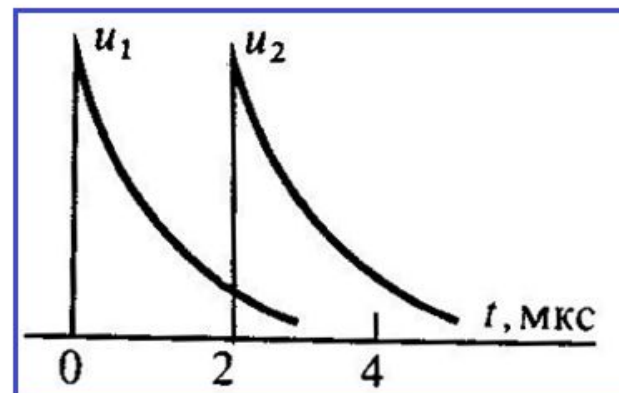
$$u_2(t) = 5 \exp[-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6})] \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}).$$

Найти скалярное произведение данных сигналов, а также угол  $\psi$  между ними.

Энергии этих сигналов одинаковы:

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2 &= \|u_2\|^2 = 25 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = \\ &= 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Скалярное произведение



$$(u_1, u_2) = 25 \int_0^{\infty} e^{-10^5 t} e^{-10^5 (t + 2 \cdot 10^{-6})} dt = 1.023 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2 \cdot \text{с}.$$

Отсюда  $\cos \psi = 0.819$  и  $\psi = 35^\circ$ .

## 2.3. Обобщённый ряд Фурье

**Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье.** Два сигнала  $u$  и  $v$  называются *ортогональными*, если их скалярное произведение, а значит, и взаимная энергия равны нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt = 0.$$

Пусть  $H$  – гильбертово пространство сигналов с конечным значением энергии. Эти сигналы определены на отрезке времени  $[t_1, t_2]$ , конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же отрезке задана бесконечная система функций  $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ , ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

## Обобщённый ряд Фурье

Разложим произвольный сигнал  $s(t) \in H$  в ряд:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t).$$

Это представление называется *обобщенным рядом Фурье* сигнала  $s(t)$  в выбранном базисе.

Коэффициенты данного ряда находят следующим образом. Возьмем базисную функцию  $u_k$  с произвольным номером  $k$ , умножим на нее обе части равенства и затем проинтегрируем результаты по времени:

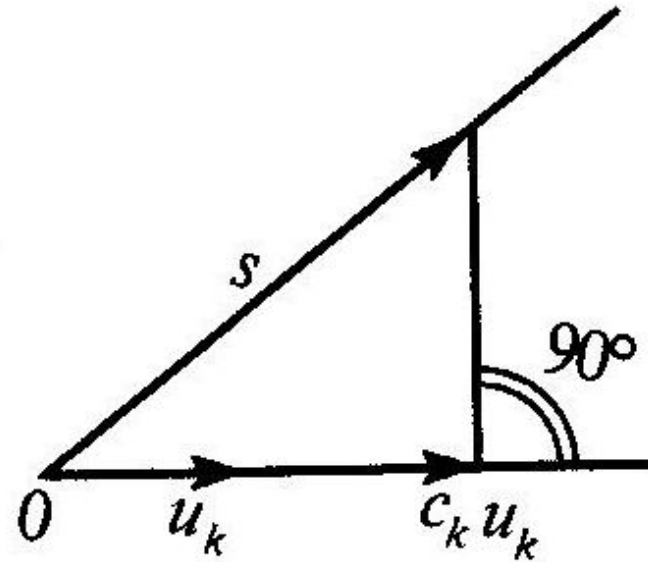
$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k dt.$$

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k).$$

## Обобщённый ряд Фурье

Возможность представления сигналов посредством обобщенных рядов Фурье является фактом большого принципиального значения. Вместо того чтобы изучать функциональную зависимость в несчетном множестве точек, мы получаем возможность характеризовать эти сигналы счетной (но, вообще говоря, бесконечной) системой коэффициентов обобщенного ряда Фурье  $c_k$ .

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k).$$





## Примеры ортонормированных базисов

Ортонормированная система гармонических функций. на отрезке  $[0, T]$  система тригонометрических функций с кратными частотами, дополненная постоянным сигналом.

$$u_0 = 1/\sqrt{T},$$

$$u_1 = \sqrt{2/T} \sin 2\pi t/T,$$

$$u_2 = \sqrt{2/T} \cos 2\pi t/T,$$

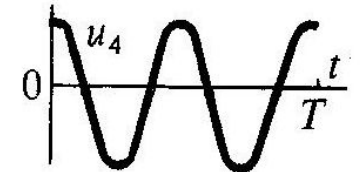
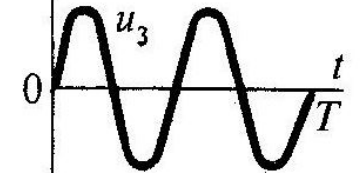
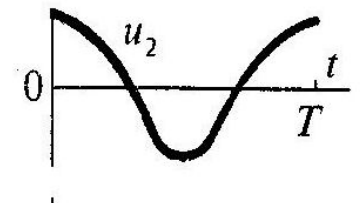
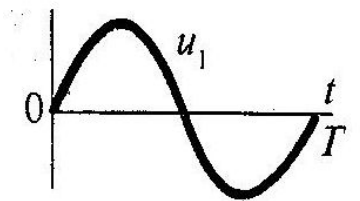
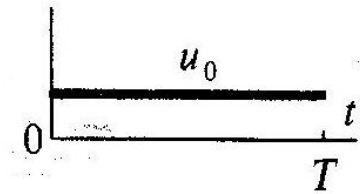
• • • • •

$$u_{2m-1} = \sqrt{2/T} \sin 2\pi m t/T,$$

$$u_{2m} = \sqrt{2/T} \cos 2\pi m t/T,$$

• • • • •

образует ортонормированный базис.



## Примеры ортонормированных базисов

*Ортонормированная система функций Уолша.* В последнее время под влиянием методов обработки дискретных сигналов большое внимание уделяют ортонормированной системе функций Уолша, которые на отрезке своего существования  $[-T/2, T/2]$  принимают лишь значения  $\pm 1$ .

Введем безразмерное время  $\vartheta = t/T$  и будем обозначать  $k$ -ю функцию Уолша, как это принято, символом  $\text{wal}(k, \vartheta)$ . Аналитическое описание данных функций довольно сложно

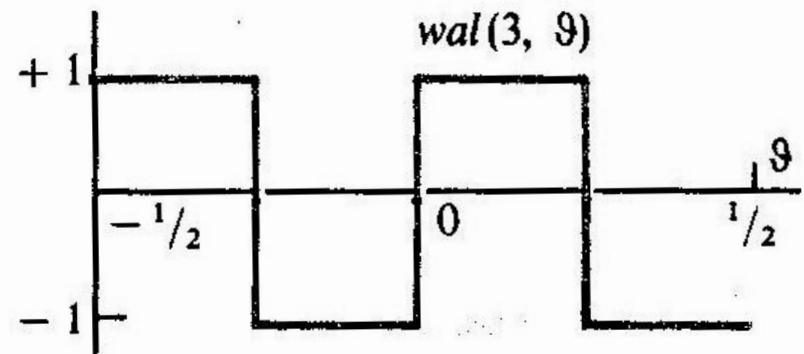
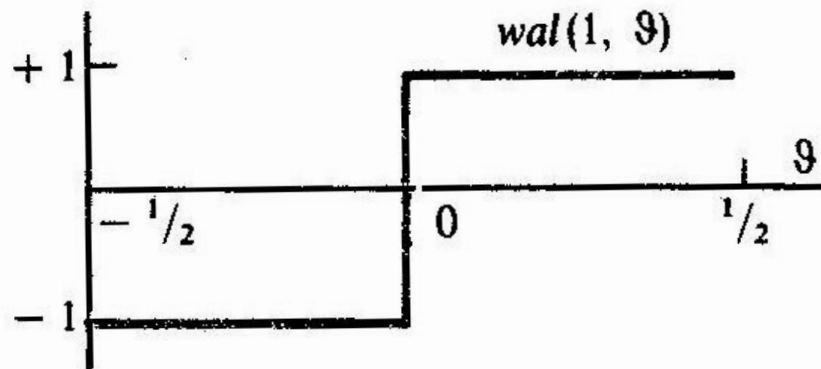
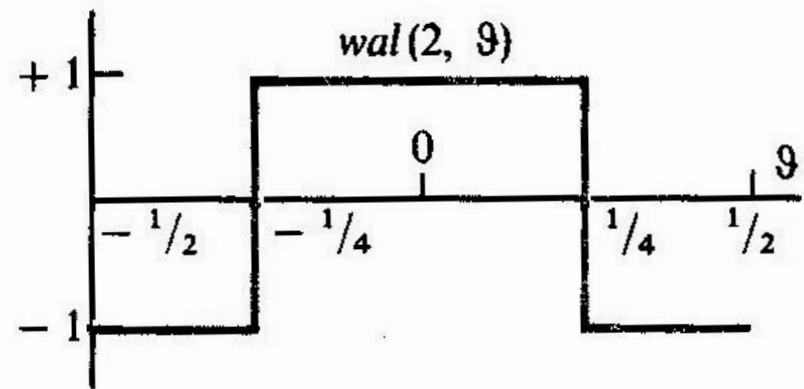
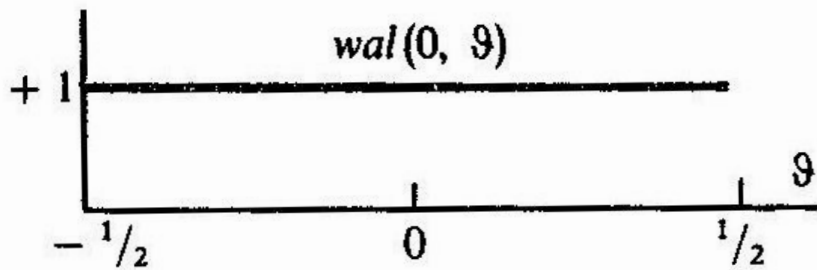
Разложение сигнала с конечной энергией, заданного на отрезке времени  $[-T/2, T/2]$ , в обобщенный ряд Фурье по функциям Уолша имеет вид

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{wal}(k, t/T).$$

## Примеры ортонормированных базисов

Очевидна нормированность функций Уолша при любом значении  $k$ :

$$\|wal(k, \vartheta)\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} wal^2(k, \vartheta) d\vartheta = 1.$$



Графики нескольких первых функций Уолша

## Энергия сигнала (формула Пифагора)

Энергия сигнала, представленного в форме обобщенного ряда Фурье. Рассмотрим некоторый сигнал  $s(t)$ , разложенный в ряд по ортонормированной базисной системе:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(t),$$

и вычислим его энергию, непосредственно подставив этот ряд в соответствующий интеграл:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j u_i u_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j \int_{t_1}^{t_2} u_i u_j dt.$$

Поскольку базисная система функций ортонормирована, в сумме (1.32) отличными от нуля окажутся только члены с номерами  $i = j$ . Отсюда получается замечательный результат:

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2.$$

## Оптимальность разложения по Фурье

Оптимальность разложения сигнала по ортогональному базису. Для сигнала  $s(t)$  введем конечномерную аппроксимацию:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^N c_k u_k(t)$$

с не известными пока коэффициентами  $c_k$  и выберем эти коэффициенты так, чтобы минимизировать энергию ошибки аппроксимации:

$$\mu = \|s - \tilde{s}\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (s - \sum_k c_k u_k)^2 dt = \min.$$

Необходимое условие минимума состоит в том, что коэффициенты должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\frac{\partial \mu}{\partial c_m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N.$$

## Оптимальность разложения по Фурье

В развернутой форме энергия ошибки аппроксимации

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} \left[ s^2 - 2s \sum_{k=0}^N c_k u_k + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i c_j u_i u_j \right] dt.$$

Поскольку рассматриваемая базисная система функций ортогональна, отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \int_{t_1}^{t_2} (c_m^2 u_m^2 - 2s c_m u_m) dt = 0.$$

Приняв во внимание единичную норму базисных функций, приходим к выводу, что равенства будут выполняться, если

$$c_m = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_m(t) dt,$$

что полностью совпадает с выражением для коэффициентов обобщенного ряда Фурье.

## Аппаратурная реализация анализа сигналов

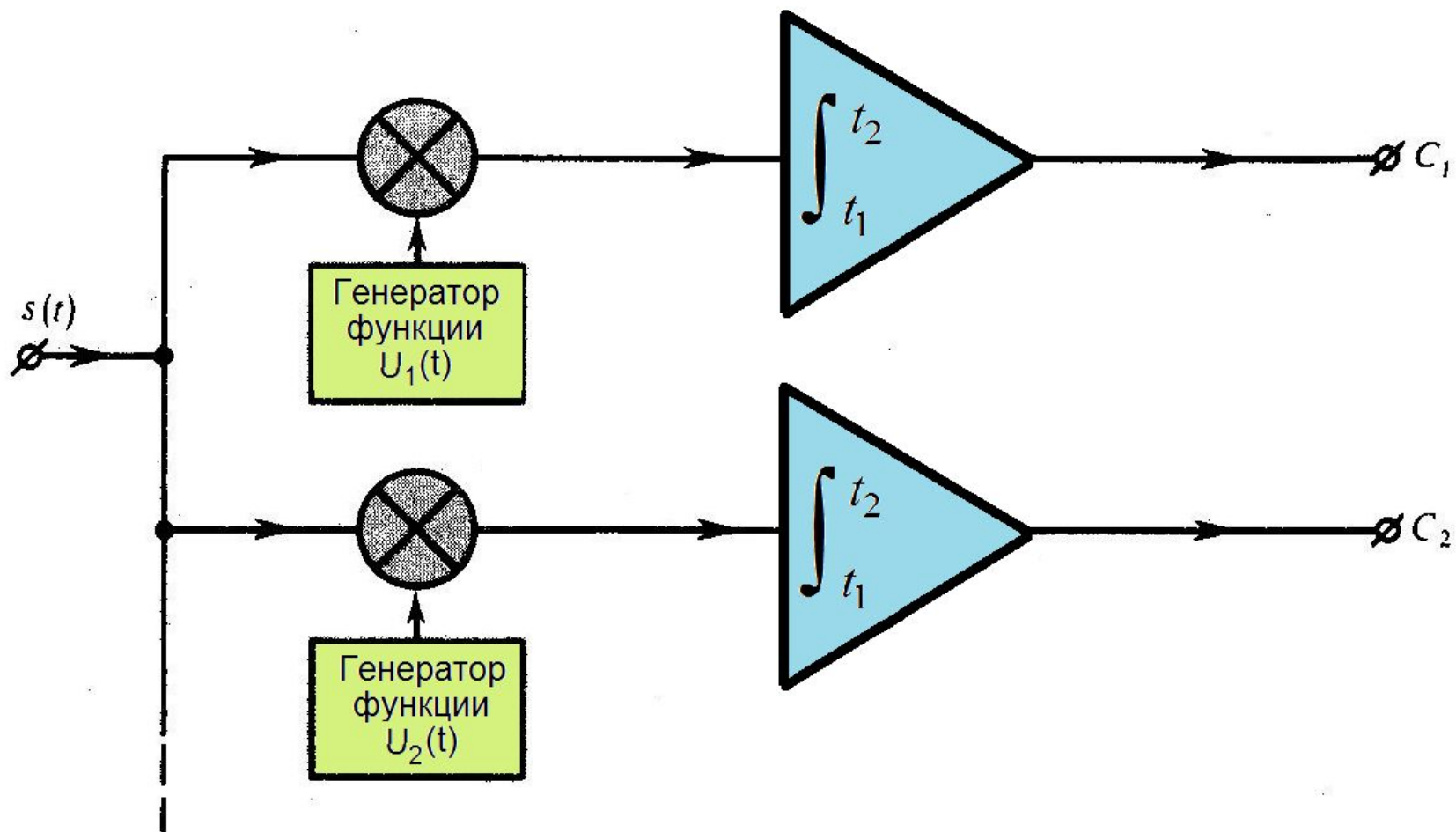
Рассмотрим структурную схему устройства для экспериментального определения коэффициентов разложения аналогового сигнала в обобщенный ряд Фурье по заданной системе ортонормированных базисных функций.

Основными элементами здесь являются генераторы тех базисных функций, по которым проводится разложение. Анализируемый сигнал одновременно подается на совокупность множительных звеньев, осуществляющих перемножение этого сигнала и соответствующей базисной функции. С выходов перемножителей сигналы поступают на интеграторы. При таком методе обработки сигнала в конце промежутка времени интегрирования на выходе каждого интегратора возникает неизменный во времени уровень, величина которого в соответствии с формулой

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k)$$

в точности равна тому или

иному коэффициенту обобщенного ряда Фурье.



Структурная схема устройства для аппаратного анализа сигналов



Ясно, что работоспособность системы в целом будет зависеть от того, насколько точно удастся воссоздать базисные функции, а также от совершенства функционирования перемножителей и интеграторов.

Система, изображенная на рисунке, важна и в прикладном, и в теоретическом смысле. Анализируя ее, еще раз убеждаемся, что вся информация, заключенная в сигнале, может быть представлена в виде хотя и бесконечной, но все же счетной совокупности чисел.

**Благодарю за внимание!**