

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 4

Доцент Трухин М.П.

4. Спектральные представления непериодических сигналов

Метод рядов Фурье допускает глубокое и плодотворное обобщение, позволяющее получать спектральные характеристики непериодических сигналов. Среди последних для радиотехники наибольший интерес представляют импульсные сигналы.

Периодическое продолжение импульса. Пусть $s(t)$ — одиночный импульсный сигнал конечной длительности. Дополнив его мысленно такими же сигналами, периодически следующими через некоторый интервал времени T , получим изученную ранее периодическую последовательность $s_{\text{пер}}(t)$, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье

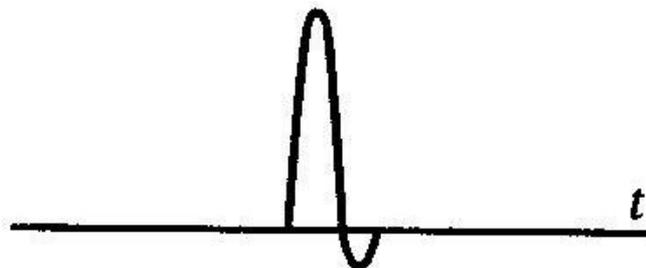
$$s_{\text{пер}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \leftrightarrow C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Для того чтобы вернуться к одиночному импульсному сигналу, устремим к бесконечности период повторения T . При этом, очевидно:

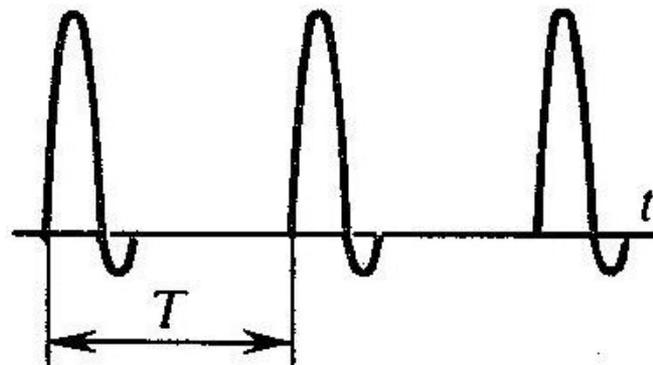
1. Частоты соседних гармоник $n\omega_1$ и $(n + 1)\omega_1$ окажутся сколь угодно близкими, так что в формулах дискретную переменную $n\omega_1$ можно заменить непрерывной переменной ω — текущей частотой.

2. Амплитудные коэффициенты C_n станут неограниченными малыми из-за наличия величины T в знаменателе.

Одиночный сигнал



**и периодическая
последовательность**



4.1. Спектральная плотность непериодического сигнала

Понятие спектральной плотности сигнала. Воспользуемся тем, что коэффициенты ряда Фурье образуют комплексно-сопряженные пары:

$$C_n = A_n e^{j\varphi_n}, \quad C_{-n} = A_n e^{-j\varphi_n}.$$

Каждой такой паре отвечает гармоническое колебание

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

с комплексной амплитудой $2A_n e^{j\varphi_n} = 2C_n$.

Рассмотрим малый интервал частот $\Delta\omega$, образующий окрестность некоторого выбранного значения частоты ω_0 . В пределах этого интервала будет содержаться $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$ отдельных пар спектральных составляющих, частоты которых отличаются сколь угодно мало. Поэтому

Спектральная плотность непериодического сигнала

составляющие можно складывать так, как будто все они имеют одну и ту же частоту и характеризуются одинаковыми комплексными амплитудами

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt.$$

В результате находим комплексную амплитуду эквивалентного гармонического сигнала, отображающего вклад всех спектральных составляющих, содержащихся внутри интервала $\Delta\omega$:

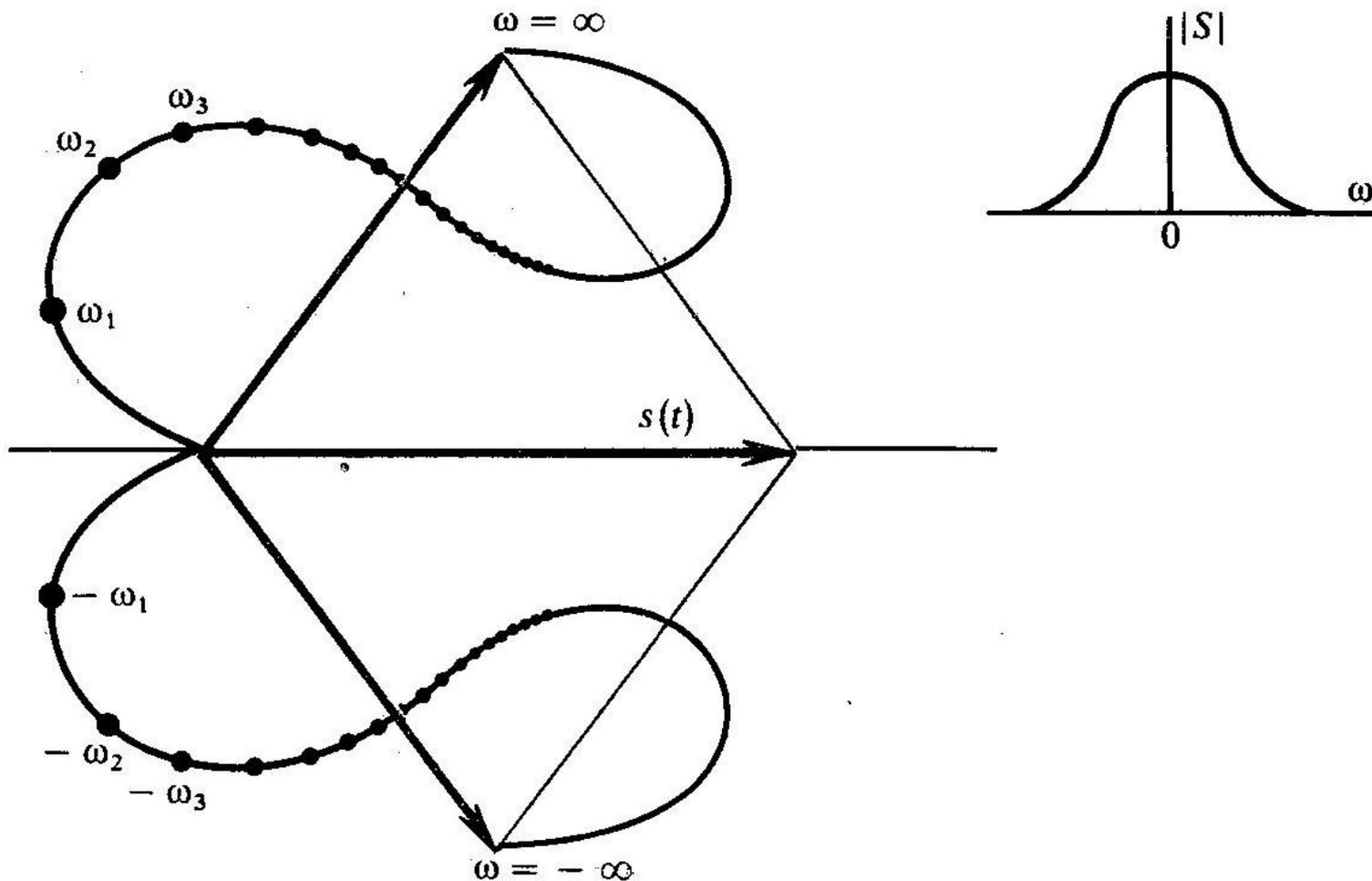
$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt.$$

Функция

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

носит название *спектральной плотности* сигнала $s(t)$.

Спектральная плотность неперiodического сигнала



Векторная диаграмма неперiodического сигнала (справа изображена зависимость модуля спектральной плотности от частоты)

Спектральная плотность непериодического сигнала

Принципиально важно, что спектральная плотность — комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид. На векторной диаграмме непериодического сигнала длины элементарных векторов бесконечно малы, поэтому вместо ломаных линий (T конечно) получаются гладкие кривые ($T \rightarrow \infty$). Если на оси частот взять некоторую последовательность равноотстоящих точек $0 < \omega_1 < \omega_2 \dots$, то модуль спектральной плотности $|S(\omega)|$ установит линейный масштаб вдоль кривых: чем больше модуль спектральной плотности в заданной области частот, тем реже будут располагаться частотные точки на векторной диаграмме.

Спектральная плотность непериодического сигнала

Физический смысл понятия спектральной плотности. Интерпретацию полученных результатов удобно провести, перейдя от угловой частоты ω к циклической частоте $f = \omega/(2\pi)$. При этом формула приобретет вид

$$\Delta A_{f_0} = 2S(2\pi f_0) \Delta f.$$

Ее надо трактовать так: спектральная плотность $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$ есть коэффициент пропорциональности между длиной малого интервала частот Δf и отвечающей ему комплексной амплитудой ΔA_{f_0} гармонического сигнала с частотой f_0 . Коэффициент 2 означает, что вклад в амплитуду дают в равной мере и положительные и отрицательные частоты, образующие окрестности точек $\pm f_0$.

4.2. Восстановление сигнала. Обратное преобразование Фурье

Обратное преобразование Фурье. Решим обратную задачу спектральной теории сигналов: найдем сигнал по его спектральной плотности, которую будем считать заданной.

Положим вновь, что непериодический сигнал получается из периодической последовательности, когда ее период устремляется к бесконечности. Воспользовавшись формулами, запишем

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}.$$

Входящий сюда коэффициент $1/T$ пропорционален разности между частотами соседних гармоник:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1]$$

при любом целом n . Таким образом,

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

Обратное преобразование Фурье

Поскольку в пределе частотные интервалы между соседними гармониками неограниченно сокращаются, последнюю сумму следует заменить интегралом

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Эта важная формула называется *обратным преобразованием Фурье* для сигнала $s(t)$.

Сформулируем окончательно фундаментальный результат: сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ взаимнооднозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Условие существования спектральной плотности сигнала

В математике детально исследован вопрос о том, какими свойствами должна обладать функция $s(t)$ для того, чтобы ее преобразование Фурье действительно существовало.

Опуская доказательство, приведем окончательный результат: сигналу $s(t)$ можно сопоставить его спектральную плотность $S(\omega)$ в том случае, если этот сигнал *абсолютно интегрируем*, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Подобное условие значительно сужает класс допустимых сигналов. Так, в указанном классическом смысле невозможно говорить о спектральной плотности гармонического сигнала $u(t) = U_m \cos \omega_0 t$, существующего на всей бесконечной оси времени.

Спектральная плотность прямоугольного импульса

Пусть данный сигнал $s(t)$ имеет амплитуду U , длительность τ_H и располагается симметрично относительно начала отсчета времени. На основании формулы

$$\begin{aligned} S(\omega) &= U \int_{-\tau_H/2}^{\tau_H/2} e^{-j\omega t} dt = U \int_{-\tau_H/2}^{\tau_H/2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \\ &= 2U \int_0^{\tau_H/2} \cos \omega t dt = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_H}{2}. \end{aligned}$$

Спектральная плотность рассматриваемого сигнала есть вещественная функция частоты. Удобно ввести безразмерную переменную $\xi = \omega \tau_H / 2$ и окончательно представить результат так:

$$S(\xi) = U \tau_H \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Спектральная плотность прямоугольного импульса

Отметим, что значение спектральной плотности на нулевой частоте равно площади импульса: $S(0) = U\tau_{и}$.

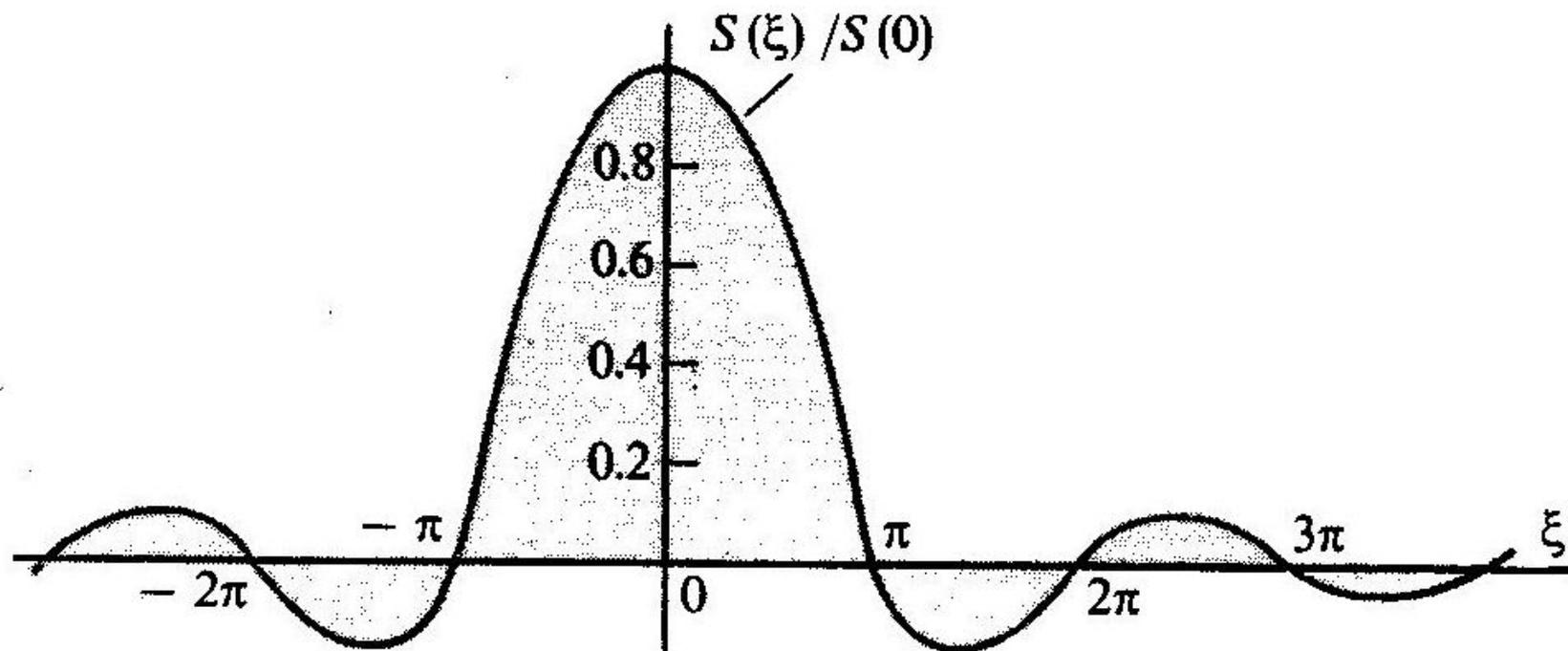


График нормированной спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса как функция параметра $\xi = \omega\tau_{и}/2$

Спектральная плотность экспоненциального импульса

Рассмотрим сигнал, описываемый функцией $s(t) = U \exp(-\alpha t) \sigma(t)$ при положительном вещественном значении параметра α .

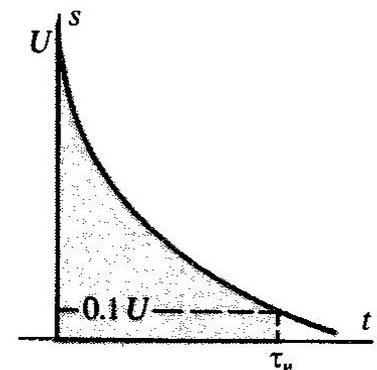
Такой сигнал, строго говоря, лишь условно можно назвать импульсом из-за его поведения при $t \rightarrow \infty$. Однако условие $\alpha > 0$ обеспечивает достаточно быстрое (экспоненциальное) уменьшение мгновенных значений сигнала с ростом времени. Эффективную длительность подобных импульсов в радиотехнике обычно определяют из условия десятикратного уменьшения уровня сигнала: $\exp(-\alpha \tau_{10}) = 0.1$, откуда $\tau_{10} = 2.303/\alpha$.

Спектральная плотность экспоненциального видеосигнала

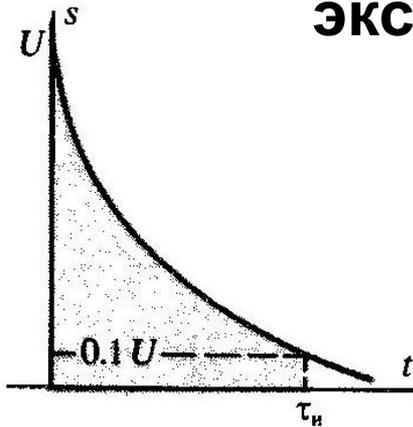
$$S(\omega) = U \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{U}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

Подставляя пределы, имеем

$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}$$



Спектральная плотность экспоненциального импульса

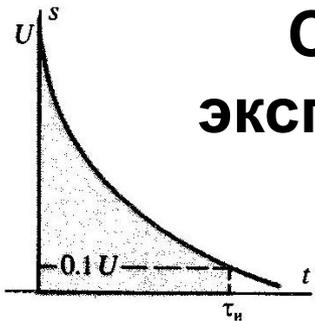


$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}$$

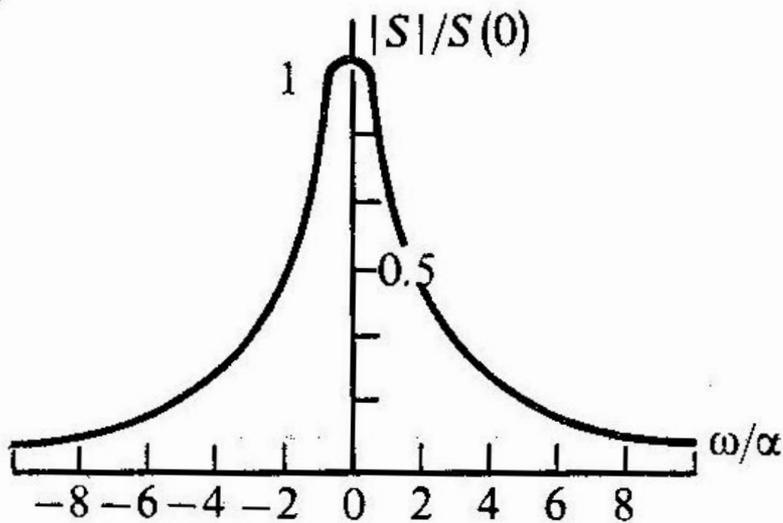
Можно отметить две принципиальные особенности, отличающие спектральную плотность экспоненциального колебания от спектра импульса прямоугольной формы:

1. В соответствии с формулой величина $S(\omega)$ не обращается в нуль ни при каком конечном значении частоты.
2. Спектральная плотность экспоненциального импульса есть комплекснозначная функция $S(\omega) = |S(\omega)| \exp[j\psi(\omega)]$, имеющая модуль (амплитудный спектр) $|S(\omega)| = U/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ и аргумент (фазовый спектр) $\psi(\omega) = -\arctg(\omega/\alpha)$.

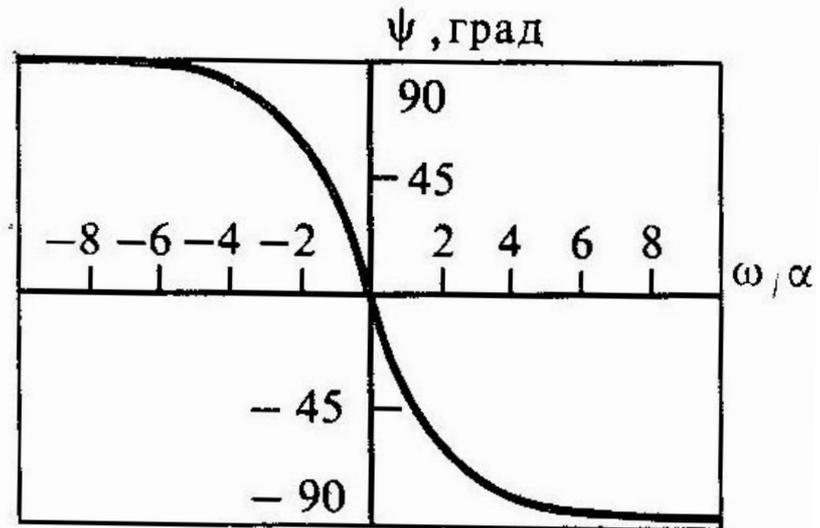
Спектральная плотность экспоненциального импульса



$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}$$



а



б

Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса:

а – нормированный амплитудный спектр; б – фазовый спектр

Спектральная плотность дельта-импульса

Математическую модель $s(t) = A\delta(t)$. Спектральная плотность этого сигнала

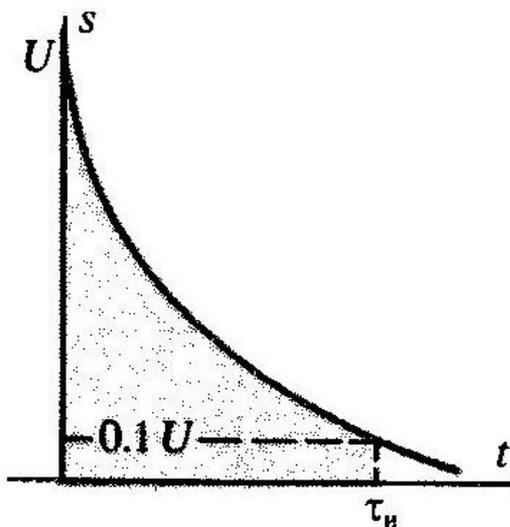
$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \delta(t) dt.$$

На основании фильтрующего свойства дельта-функции (см. л. 2) входящий сюда интеграл численно равен значению классической функции в точке, где сосредоточена обобщенная функция. Поэтому

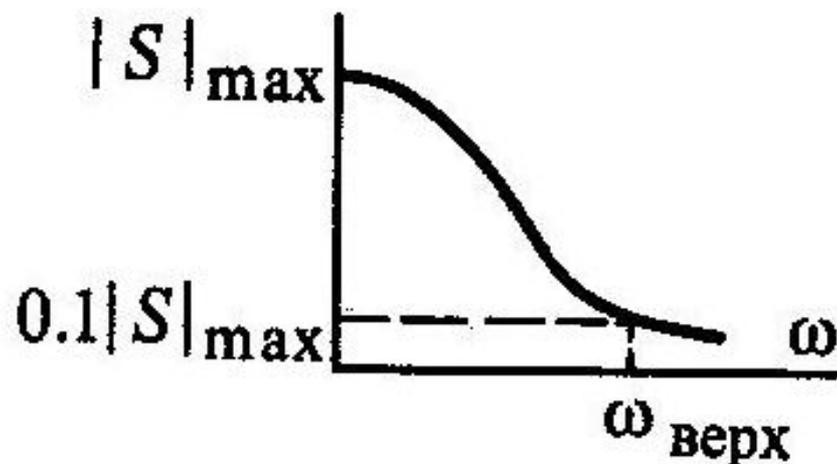
$$S(\omega) = A = \text{const}$$

Итак, дельта-импульс имеет равномерный спектр на всех частотах.

4.3. Связь между длительностью импульса и шириной его спектра



Сигнал



Модуль спектральной плотности

Связь между длительностью импульса и шириной его спектра

Если проанализировать частные случаи, изученные выше, то можно сделать очень важный вывод: *чем меньше длительность импульса, тем шире его спектр.*

Под шириной спектра здесь и в дальнейшем будем понимать частотный интервал, в пределах которого модуль спектральной плотности не меньше некоторого наперед заданного уровня, например изменяется в пределах от $|S|_{\max}$ до $0.1 |S|_{\max}$.

Рассмотрим прямоугольный видеоимпульс, полагая при этом, что верхняя граничная частота спектра ω_B — это частота, соответствующая первому нулю спектральной плотности. Нетрудно видеть, что

$$\omega_B \tau_{\text{и}} / 2 = \pi \quad \text{или} \quad f_B \tau_{\text{и}} = 1.$$

у экспоненциального импульса

$$f_B \tau_{\text{и}} = 3.647.$$

Связь между длительностью импульса и шириной его спектра

Итак, произведение ширины спектра импульса на его длительность есть постоянное число, зависящее только от формы импульса и, как правило, имеющее порядок единицы:

$$f_{\text{в}} \tau_{\text{и}} = O(1).$$

Это соотношение имеет первостепенное значение для радиотехники. Оно определяет требования к ширине полосы пропускания радиотехнического устройства. Например, чем короче длительность импульса, тем шире должна быть полоса пропускания соответствующего усилителя. Короткие импульсные помехи имеют широкий спектр и поэтому могут ухудшать условия радиоприема в значительной полосе частот.

4.4. Свойства преобразований Фурье

1. Сумма (разность) сигналов

Линейность преобразования Фурье. Это важнейшее свойство формулируется так: если имеется некоторая совокупность сигналов $s_1(t), s_2(t), \dots$, причем $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega), s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega), \dots$, то взвешенная сумма сигналов преобразуется по Фурье следующим образом:

$$\sum_i a_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(\omega).$$

Здесь a_i — произвольные числовые коэффициенты.

Свойства преобразований Фурье

2. Чётность сигнала

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности. Пусть $s(t)$ — сигнал, принимающий вещественные значения. Его спектральная плотность в общем случае является комплексной:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega).$$

Подставим это выражение в формулу обратного преобразования Фурье :

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega.$$

Для того чтобы сигнал, полученный путем такого двукратного преобразования, оставался вещественным, необходимо потребовать, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = 0.$$

Свойства преобразований Фурье

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности.

Это возможно лишь в том случае, если вещественная часть $A(\omega)$ спектральной плотности сигнала есть четная, а мнимая часть $B(\omega)$ – нечетная функция частоты:

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega).$$

Свойства преобразований Фурье

3. Сдвиг сигнала

Спектральная плотность сигнала, смещенного во времени. Предположим, что для сигнала $s(t)$ известно соответствие $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$. Рассмотрим такой же сигнал, но возникающий на t_0 секунд позднее. Принимая точку t_0 за новое начало отсчета времени, обозначим этот смещенный сигнал как $s(t - t_0)$. Покажем, что

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Доказательство очень простое. Действительно,

$$\begin{aligned} s(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega t_0} e^{-j\omega x} dx = S(\omega) e^{-j\omega t_0}. \end{aligned}$$

Свойства преобразований Фурье

4. Сжатие (растяжение) сигнала

Зависимость спектральной плотности сигнала от выбора масштаба измерения времени. Предположим, что исходный сигнал $s(t)$ подвергнут изменению масштаба времени. Это означает, что роль времени t играет новая независимая переменная kt (k – некоторое вещественное число). Если $k > 1$, то происходит «сжатие» исходного сигнала; если же $0 < k < 1$, то сигнал «растягивается» во времени.

Оказывается, что если $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то

$$s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

Действительно,

$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{\omega}{k}x} dx$$

Свойства преобразований Фурье

5. Производная (интеграл) от сигнала

Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла. Пусть сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(\omega)$ заданы. Будем изучать новый сигнал $f(t) = ds/dt$ и поставим цель найти его спектральную плотность $F(\omega)$.

По определению,

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - \tau)}{\tau}.$$

Преобразование Фурье – линейная операция, значит, равенство справедливо и по отношению к спектральным плотностям. Учитывая, получаем

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-j\omega\tau)}{\tau} S(\omega).$$

Представляя экспоненциальную функцию рядом Тейлора: $\exp(-j\omega\tau) = 1 - j\omega\tau - (\omega\tau)^2/2 - \dots$, подставляя этот ряд в и ограничиваясь первыми двумя членами, находим

$$F(\omega) = j\omega S(\omega).$$

Свойства преобразований Фурье

Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла.

При дифференцировании скорость изменения сигнала во времени возрастает. Как следствие модуль спектра производной имеет большие значения в области высоких частот по сравнению с модулем спектра исходного сигнала.

Формула обобщается на случай спектра производной n -го порядка. Легко доказать, что если $g(t) = d^n s/dt^n$, то

$$G(\omega) = (j\omega)^n S(\omega).$$

Итак, дифференцирование сигнала по времени эквивалентно простой алгебраической операции умножения спектральной плотности на множитель $j\omega$. Поэтому принято говорить, что мнимое число $j\omega$ является *оператором дифференцирования, действующим в частотной области.*

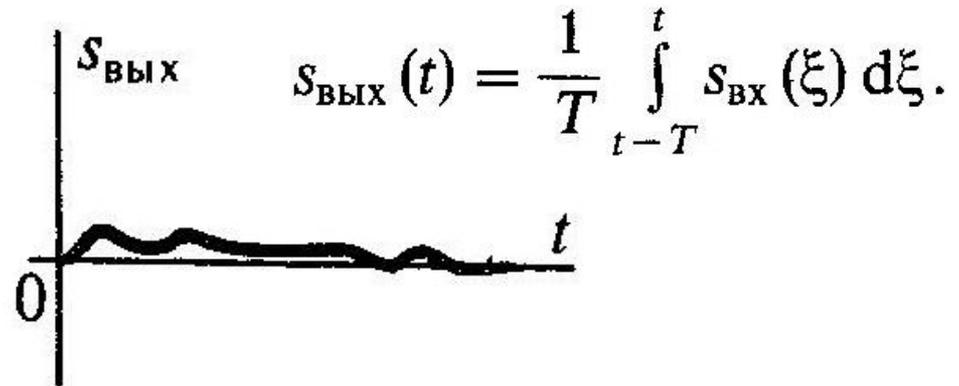
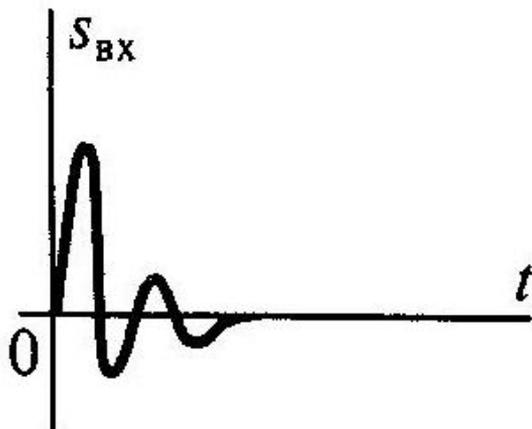
Свойства преобразований Фурье

Спектральная плотность производной и неопределенного интеграла.

Рассмотренная функция $s(t) = \int f(t) dt$ является первообразной (неопределенным интегралом) по отношению к функции $f(t)$. Формально следует, что спектр первообразной

$$S(\omega) = F(\omega)/(j\omega).$$

Таким образом, множитель $1/(j\omega)$ служит оператором интегрирования в частотной области.



Свойства преобразований Фурье

6. Произведение сигналов

Спектральная плотность произведения сигналов. Как известно, при суммировании сигналов их спектры складываются. Однако спектр произведения сигналов не равен произведению спектров, а выражается некоторым специальным интегральным соотношением между спектрами сомножителей.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ — два сигнала, для которых известны соответствия $u(t) \leftrightarrow U(\omega)$, $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$. образуем произведение этих сигналов: $s(t) = u(t)v(t)$ и вычислим его спектральную плотность. По общему правилу

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Применив обратное преобразование Фурье, выразим сигнал $v(t)$ через его спектральную плотность и подставим результат в :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Изменив порядок интегрирования, будем иметь

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j(\omega - \xi)t} dt \right] d\xi,$$

Свойства преобразований Фурье

откуда

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi.$$

Интеграл, стоящий в правой части, называют *сверткой* функций V и U . В дальнейшем будем символически обозначать операцию свертки так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi = V(\omega) * U(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до постоянного числового множителя равна свертке спектральных плотностей сомножителей:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} V(\omega) * U(\omega).$$

Свойства преобразований Фурье

7. Произведение спектров

Доказанная выше теорема о свертке может быть обращена: если спектральная плотность некоторого сигнала представляется в виде произведения $S(\omega) = S_1(\omega) S_2(\omega)$, причем $S_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$ и $S_2(\omega) \leftrightarrow s_2(t)$, то сигнал $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ является сверткой сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, но уже не в частотной, а во временной области:

$$S(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \xi) s_2(\xi) d\xi.$$

Нетрудно убедиться, что операция свертки коммутативна, т. е. допускает изменение порядка следования преобразуемых функций:

$$V(\omega) * U(\omega) = U(\omega) * V(\omega).$$

4.5. Обобщённая формула Релея

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Найдем скалярное произведение этих сигналов, выразив один из них, например $v(t)$, через его спектральную плотность:

$$\begin{aligned}(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.\end{aligned}$$

Обобщённая формула Релея

Здесь внутренний интеграл представляет собой, очевидно, спектральную плотность $U(\omega)$ сигнала $u(t)$. Поэтому

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V).$$

Полученное соотношение представляет собой *обобщенную формулу Рэля*. Легко запоминающаяся трактовка этой формулы такова: *скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей*.

Обобщение понятия спектральной плотности.

Для этого в соответствии с обобщенной формулой Рэля достаточно положить, что $U(\omega)$ — функционал, который, действуя на известную функцию $V(\omega)$, дает следующий результат:

$$(U, V) = 2\pi (u, v).$$

4.6. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

1. Постоянный сигнал

Простейший неинтегрируемый сигнал — это постоянная величина $u(t) = A = \text{const}$. Предположим, что $v(t)$ — произвольный вещественный абсолютно интегрируемый сигнал с известной спектральной плотностью $V(\omega)$. Имеем

$$(U, V) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt.$$

Но, как легко заметить,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j0t} dt = V(0).$$

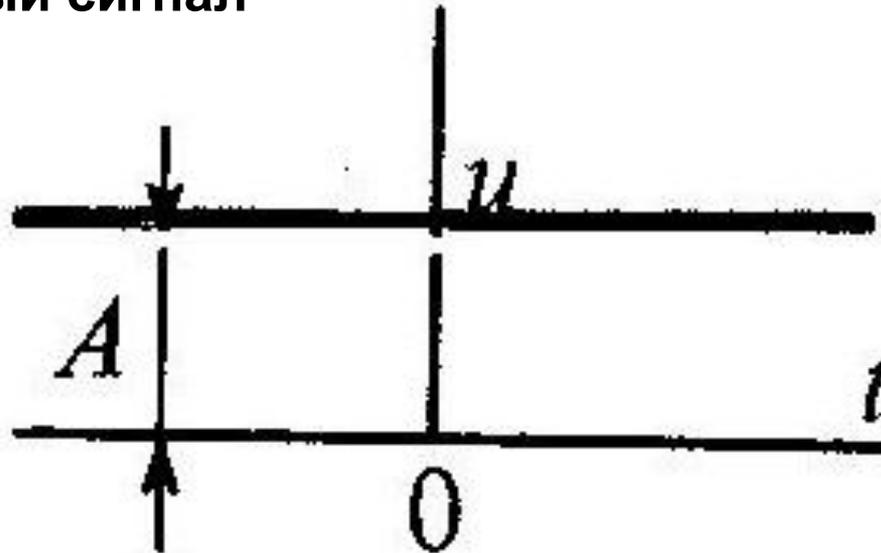
Отсюда на основании фильтрующего свойства дельта-функции приходим к выводу

$$U(\omega) = 2\pi A \delta(\omega).$$

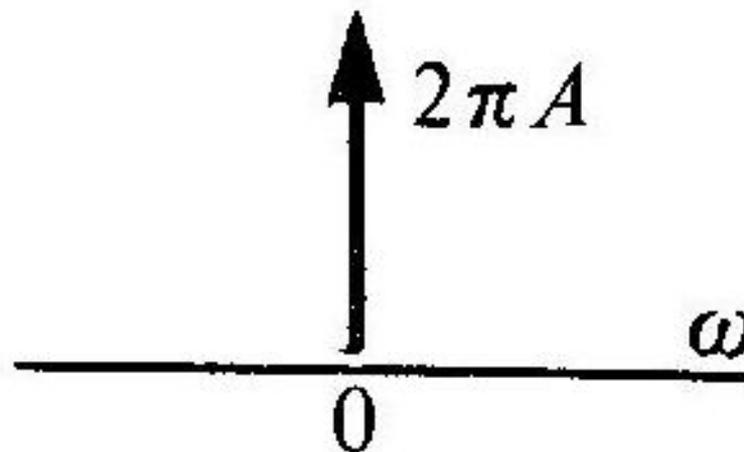
Физический смысл полученного результата нагляден — неизменный во времени сигнал имеет спектральную составляющую только на нулевой частоте.

Графические представления

Постоянный сигнал



Спектральная плотность
постоянного сигнала



2. Комплексный экспоненциальный сигнал

Пусть $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$ – комплексный экспоненциальный сигнал с заданной вещественной частотой ω_0 . Этот сигнал не является абсолютно интегрируемым, поскольку при $t \rightarrow \pm\infty$ функция $s(t)$ не стремится ни к какому пределу. Преобразование Фурье $S(\omega)$ этого сигнала, рассматриваемое в обобщенном смысле, должно удовлетворять соотношению

$$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega_0 t} dt = 2\pi V(\omega_0).$$

Отсюда искомая спектральная плотность $S(\omega)$ выражается таким образом:

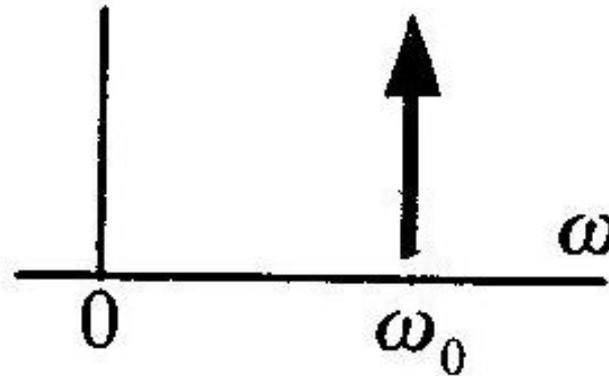
$$S(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

1. Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала равна нулю всюду, кроме точки $\omega = \omega_0$, где она имеет дельта-особенность.

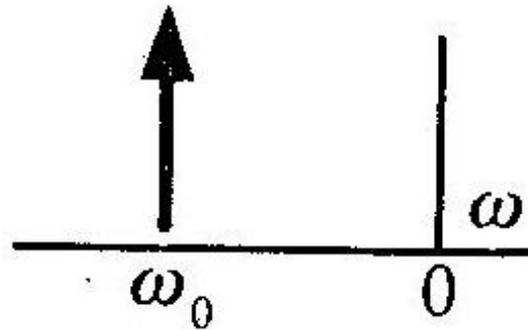
2. Спектр данного сигнала несимметричен относительно точки $\omega = 0$ и сосредоточивается в области либо положительных, либо отрицательных частот.

Графические представления спектральной плотности комплексного экспоненциального сигнала

При $\omega_0 > 0$



При $\omega_0 < 0$



3. Гармонические колебания

Пусть $s(t) = \cos \omega_0 t$. По формуле Эйлера

$$s(t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2.$$

Найденный выше спектр комплексного экспоненциального сигнала, а также свойство линейности преобразования Фурье позволяют сразу записать выражение спектральной плотности косинусоидального сигнала:

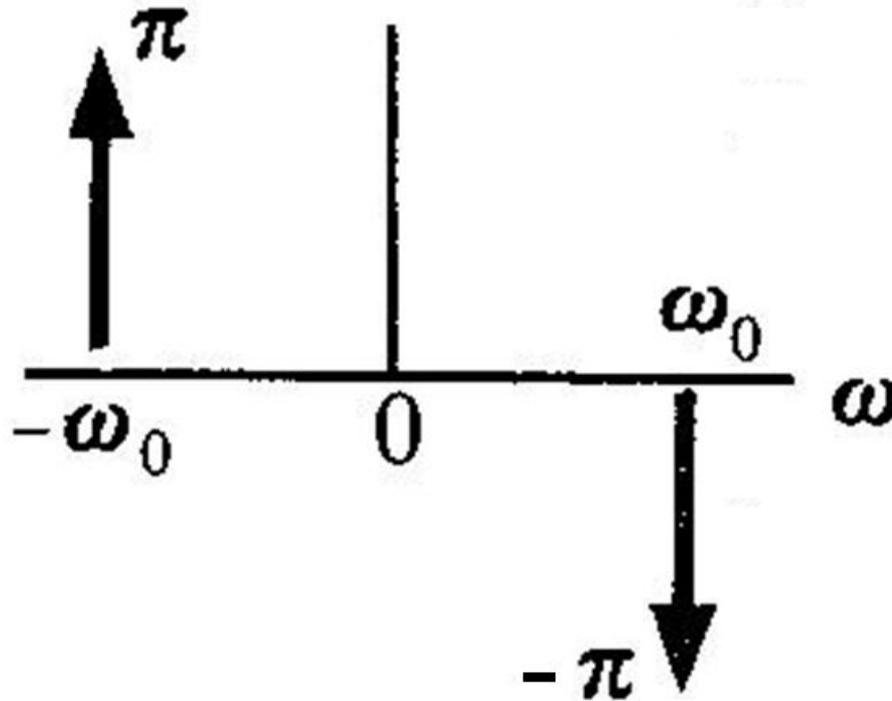
$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$



Гармонические колебания (синусоида)

Для синусоидального сигнала справедливо соотношение

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$



4. Периодический сигнал

Пусть

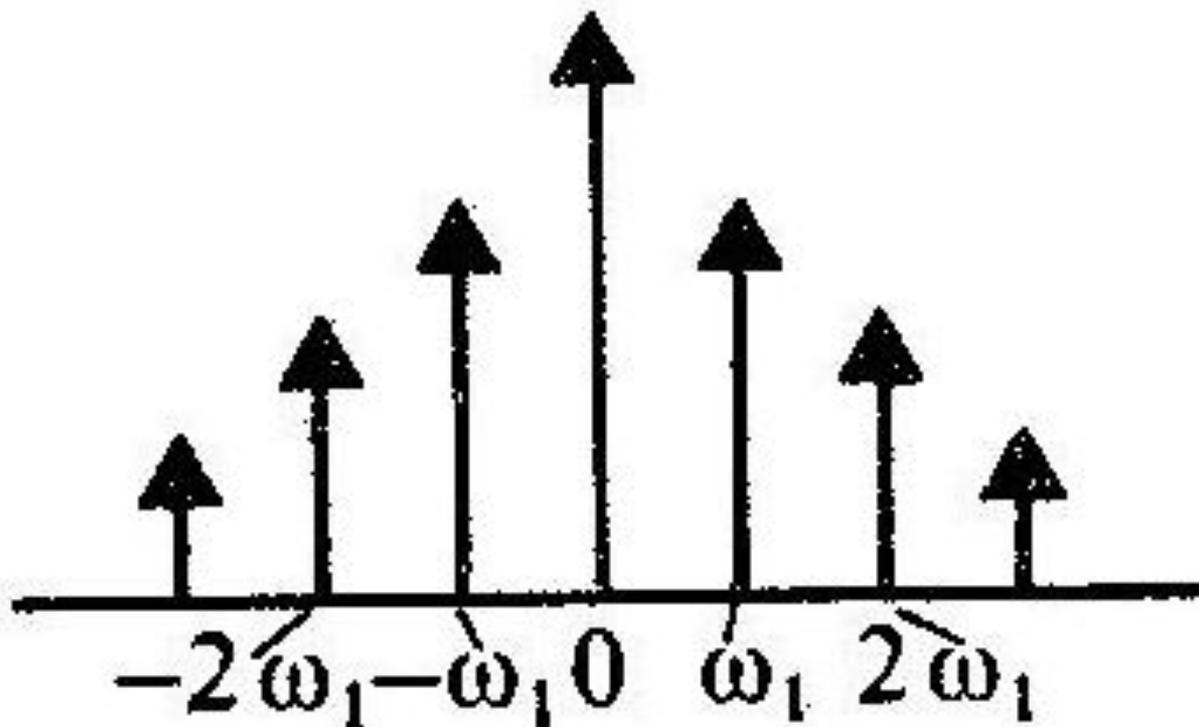
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

– периодический сигнал, заданный своим рядом Фурье в комплексной форме. На основании формулы п.2, принимая во внимание свойство линейности преобразования Фурье, сразу получаем выражение спектральной плотности такого сигнала:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1).$$

Соответствующий график спектральной плотности своей конфигурацией повторяет обычную спектральную диаграмму периодического сигнала. График образован дельта-импульсами в частотной области, которые располагаются в точках с координатами $\pm n\omega_1$.

Графическое представление спектральной плотности периодического сигнала



5. Единичная ступенька

Заметим прежде всего, что функция включения получается путем предельного перехода из экспоненциального видеоимпульса:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp(-\alpha t), & t > 0. \end{cases}$$

Поэтому можно попытаться получить спектральную плотность функции включения, выполнив предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ в формуле спектральной плотности экспоненциального колебания:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Единичная ступенька

Прежде всего выделим в спектральной плотности экспоненциального сигнала вещественную и мнимую части:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Можно убедиться в том, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega).$$

Действительно, предельное значение этой дроби при любых $\omega \neq 0$ обращается в нуль, и в то же время

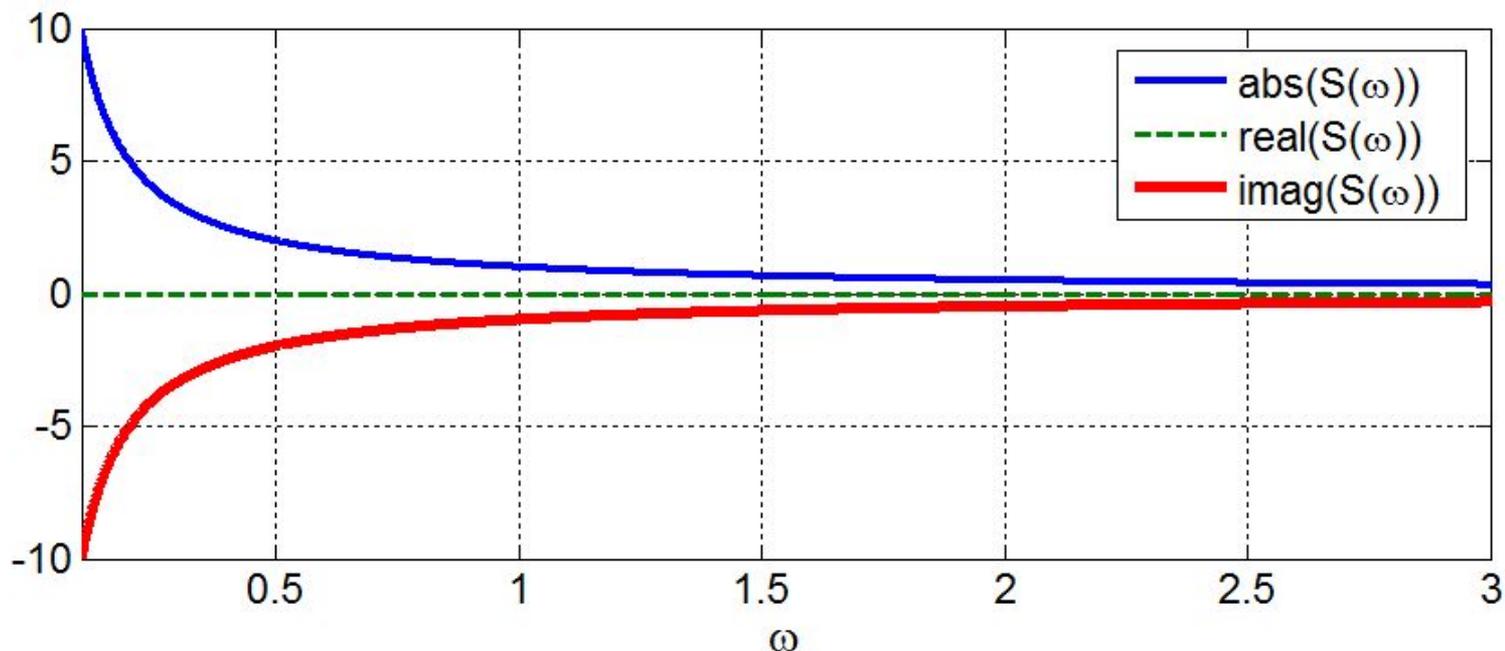
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi$$

независимо от величины α , откуда и следует сделанное утверждение.

Итак, получено взаимно однозначное соответствие функции включения и ее спектральной плотности:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Дельта-особенность при $\omega = 0$ свидетельствует о том, что функция включения имеет постоянную составляющую, равную $1/2$.



6. Радиоимпульс

Радиоимпульс $s_p(t)$ задается в виде произведения некоторого видеоимпульса $s_B(t)$, играющего роль огибающей, и неинтегрируемого гармонического колебания: $s_p(t) = s_B(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Чтобы найти спектральную плотность радиоимпульса, будем полагать известной функцию $S_B(\omega)$ — спектр его огибающей. Спектр косинусоидального сигнала с произвольной начальной фазой получается путем элементарного обобщения формулы:

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_0}].$$

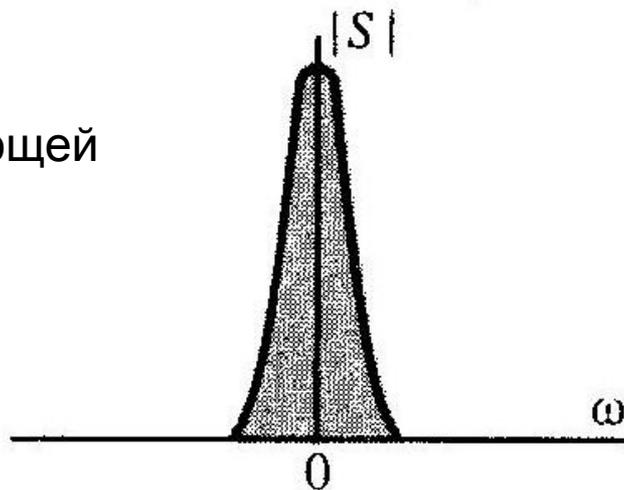
Спектр радиоимпульса есть свертка

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_B(\omega - \xi) [\delta(\xi - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0) e^{-j\varphi_0}] d\xi.$$

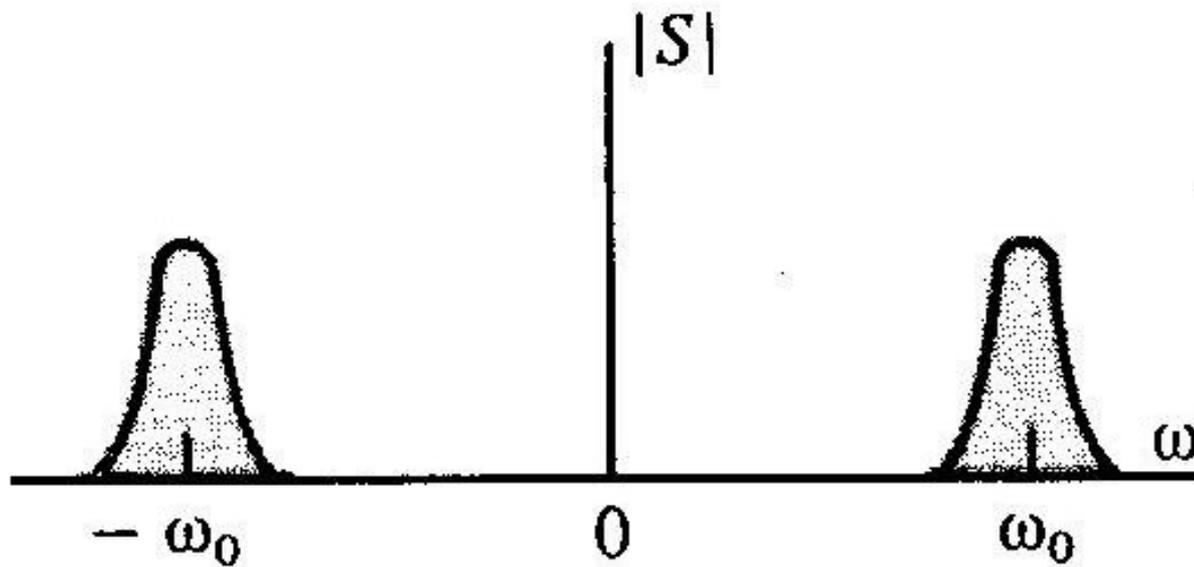
Приняв во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, получаем важный результат:

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S_B(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S_B(\omega + \omega_0).$$

Спектр огибающей



Спектр радиоимпульса



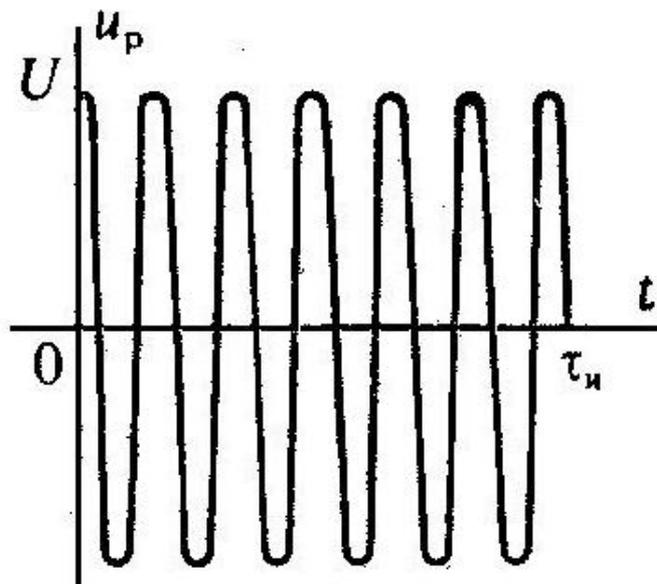
Видно, что переход от видеоимпульса к радиоимпульсу при спектральном подходе означает *перенос спектра видеоимпульса в область высоких частот* — вместо единственного максимума спектральной плотности при $\omega = 0$ наблюдаются два максимума при $\omega = \pm \omega_0$; абсолютные значения максимумов сокращаются вдвое.

Отметим, что графики отвечают ситуации, когда частота ω_0 значительно превышает эффективную ширину спектра видеоимпульса (именно такой случай обычно и реализуется на практике). При этом не наблюдается ощутимого «перекрывтия» спектров, отвечающих положительным и отрицательным частотам. Однако может оказаться, что ширина спектра видеоимпульса велика настолько (при коротком импульсе), что выбранное значение частоты ω_0 не устраняет эффект «перекрывтия». Как следствие, профили спектров видеоимпульса и радиоимпульса перестают быть подобными.

Спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса

$$S_p(\omega) = \frac{U\tau_{\text{И}}}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \tau_{\text{И}}}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \tau_{\text{И}}}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \tau_{\text{И}}}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \tau_{\text{И}}}{2}} \right].$$

Спектр прямоугольного радиоимпульса



Благодарю за внимание!