РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 5

Доцент Трухин М.П.

Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала

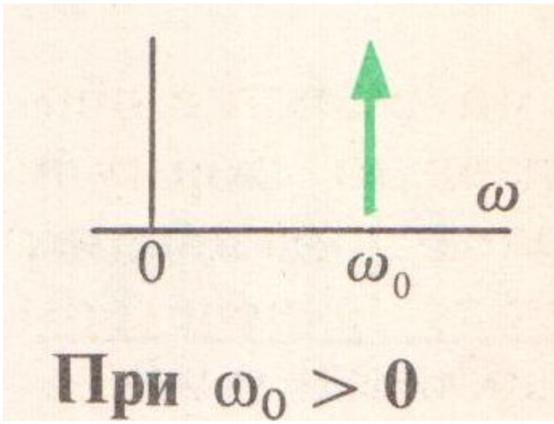
Пусть $s(t) = \exp(j\omega_o t)$ — комплексный экспоненциальный сигнал с заданной вещественной частотой ω_o.
Этот сигнал не является абсолютно интегрируемым, поскольку при t □ $+\infty$ функция $s(t)$ не стремится ни к какому пределу.
Преобразование Фурье $S(\omega)$ этого сигнала, рассматриваемое в обобщенном смысле, должно удовлетворять соотношению

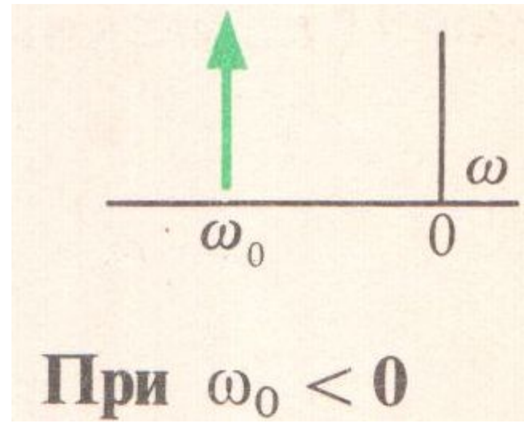
$$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt = 2\pi V(\omega_0).$$

Отсюда искомая спектральная плотность $S(\omega)$ выражается таким образом:

$$\boxed{S(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).}$$

Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала





1. Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала равна нулю всюду, кроме точки $\omega = \omega_o$, где она имеет дельта-особенность.

2. Спектр данного сигнала несимметричен относительно точки $\omega = 0$ и сосредоточивается в области либо положительных, либо отрицательных частот.

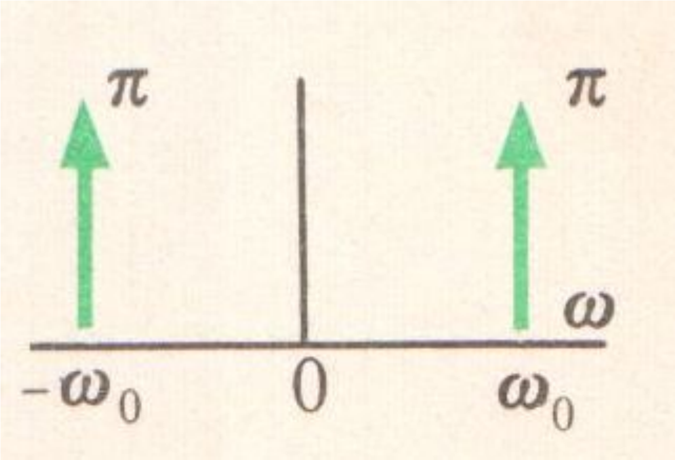
Спектральная плотность гармонических колебаний

Пусть s(t) = cos($j\omega_o t$) – гармоническое колебание с заданной вещественной частотой ω_o.
По формуле Эйлера

$$s(t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2.$$

Отсюда искомая спектральная плотность $S(\omega)$ выражается таким образом (использовано свойство линейности преобразования Фурье):

$$\boxed{\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right].}$$



Спектральная плотность произвольного периодического сигнала

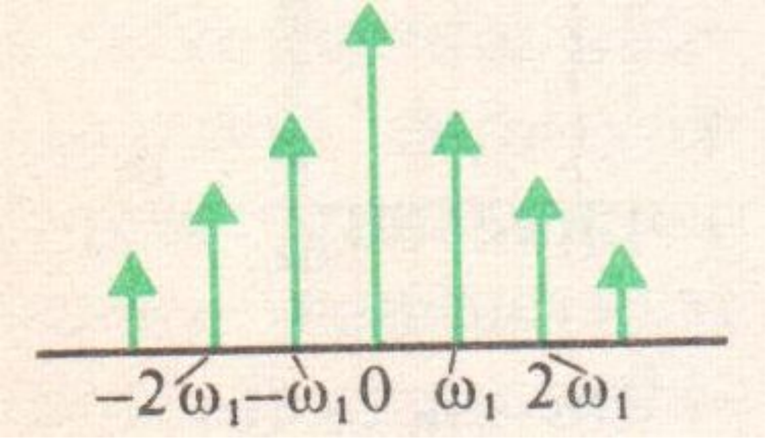
Пусть s(*t*) периодический сигнал, заданный своим рядом Фурье в комплексной форме.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

Отсюда искомая спектральная плотность *S*(ω) выражается таким образом (использовано свойство линейности преобразования Фурье):

$$\boxed{S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1).}$$

График образован дельта-импульсами в частотной области.



Спектральная плотность радиоимпульса

Радиоимпульс $s_p(t)$ задается в виде произведения некоторого видеоимпульса $s_В(t)$, играющего роль огибающей, и неинтегрируемого гармонического колебания:

$$s_\text{р}(t) = s_\text{в}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Спектр косинусоидального сигнала с произвольной начальной фазой:

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_0)\,e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0)\,e^{-j\varphi_0}\right]$$

Спектр радиоимпульса есть свертка

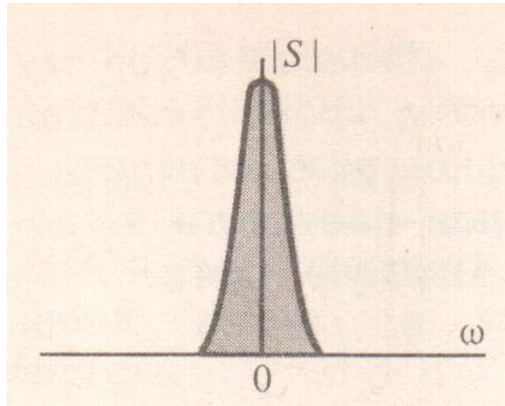
$$S_\text{р}(\omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\text{в}(\omega - \xi)\left[\delta(\xi - \omega_0)\,e^{\,j\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0)\,e^{-j\varphi_0}\right]d\xi.$$

Приняв во внимание фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$\boxed{S_\text{р}(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}S_\text{в}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}S_\text{в}(\omega + \omega_0).}$$

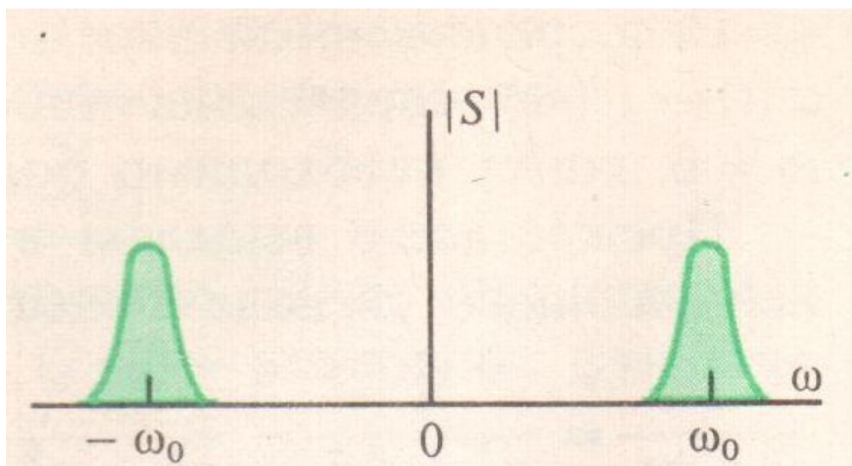
Спектральная плотность радиоимпульса

Частотные зависимости модуля спектральной плотности видеоимпульса



$S_{в}(\omega)$

Частотные зависимости модуля спектральной плотности радиоимпульса



$$\boxed{S_{р}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S_{в}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S_{в}(\omega + \omega_0).}$$

Спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса

$$s_{\text{р}}(t) = U\left[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_{\text{и}})\right]\cos\omega_0 t$$

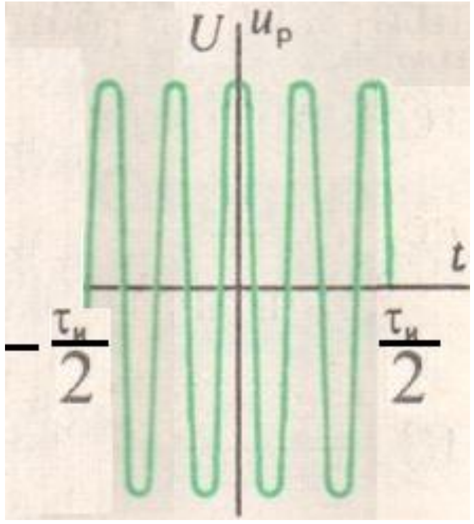
Приняв во внимание спектр прямоугольного видеоимпульса и формулу

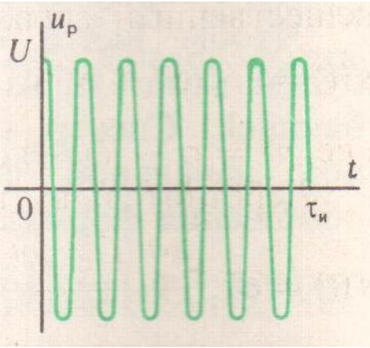
$$\boxed{S_{\text{р}}(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}S_{\text{в}}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}S_{\text{в}}(\omega + \omega_0).}$$

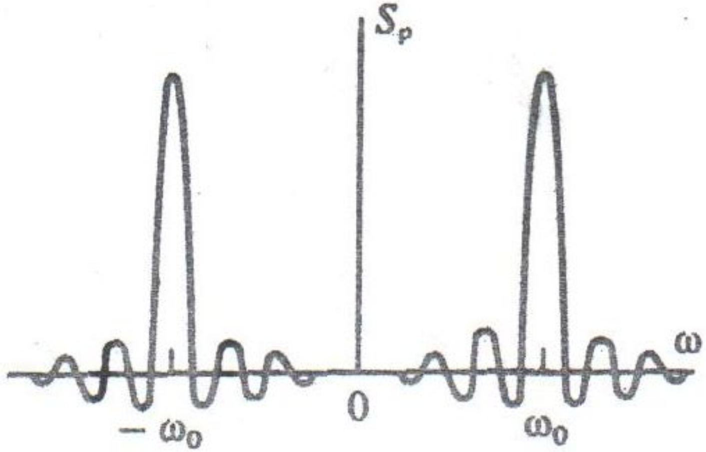
получим (при симметричном положении видеоимпульса относительно начала координат)

$$S_{\text{р}}(\omega) = \frac{U\tau_{\text{и}}}{2}\left[\frac{\sin\dfrac{(\omega - \omega_0)\tau_{\text{и}}}{2}}{\dfrac{(\omega - \omega_0)\tau_{\text{и}}}{2}} + \frac{\sin\dfrac{(\omega + \omega_0)\tau_{\text{и}}}{2}}{\dfrac{(\omega + \omega_0)\tau_{\text{и}}}{2}}\right]$$

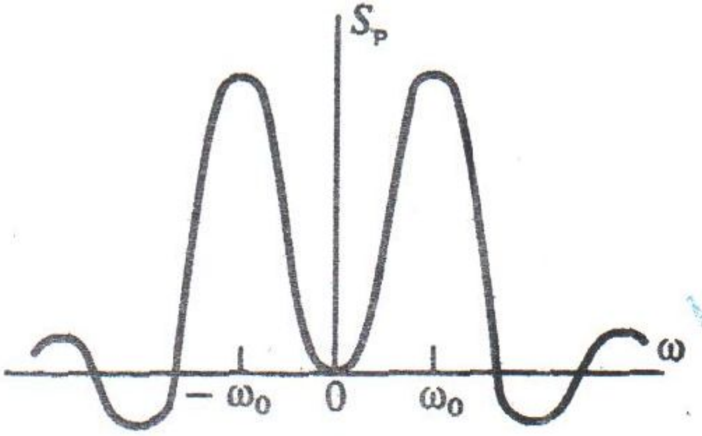
Спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса







при $\omega_0\tau_и = 20\pi$



при $\omega_0\tau_и = 2\pi$

Взаимная спектральная плотность сигналов

Скалярное произведение двух вещественных сигналов *u*(*t*) и *v*(*t*)

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t$$

Если сигналы тождественно совпадают, то скалярное произведение становится равным энергии

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\, \mathrm{d}t$$

Обобщенная формула Рэлея

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\, V^*(\omega)\, \mathrm{d}\omega$$

Взаимная спектральная плотность сигналов

Назовем *взаимным энергетическим спектром* вещественных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ функцию

$$W_{uv}(\omega) = U(\omega)\, V^*(\omega)$$

такую, что

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega)\, d\omega$$

причем

$$W_{vu}(\omega) = W_{uv}^*(\omega)$$

Представив спектральные плотности сигналов *u(t)* и *v(t)* в виде

$$U(\omega) = A_u(\omega) + jB_u(\omega), \quad V(\omega) = A_v(\omega) + jB_v(\omega)$$

получим, что взаимный энергетический спектр W_m — функция, принимающая, в общем случае, комплексные значения

$$W_{uv}(\omega) = A_u A_v + B_u B_v + j(B_u A_v - A_u B_v) =$$
$$= \mathrm{Re}\, W_{uv}(\omega) + j\,\mathrm{Im}\, W_{uv}(\omega).$$

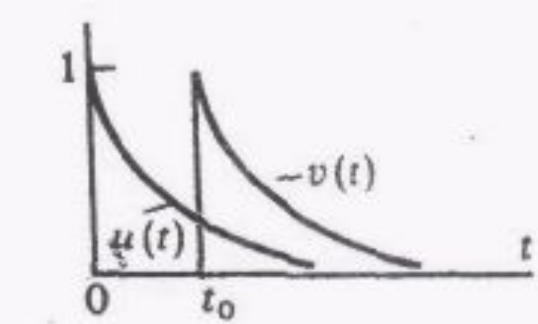
Re W_m — четная, а Im W_{uv} — нечетная функция частоты. Вклад в интеграл дает только вещественная часть, поэтому

$$\boxed{(u, v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\, W_{uv}(\omega)\, d\omega.}$$

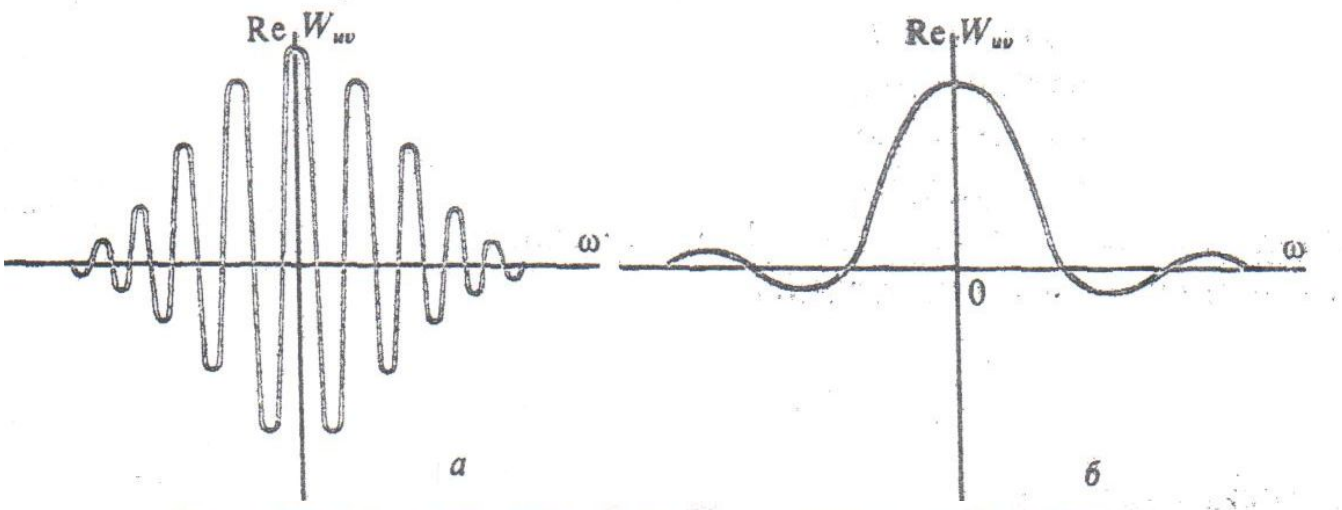
Взаимный энергетический спектр двух экспоненциальных видеоимпульсов одинаковой формы, следующих друг за другом с интервалом времени t_0

$$u(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t) \leftrightarrow U(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega},$$

$$v(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}\sigma(t-t_0) \leftrightarrow V(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha + j\omega}.$$



$$\operatorname{Re} W_{uv}(\omega) = \cos \omega t_0 / (\alpha^2 + \omega^2)$$



а – при $\alpha t_0 \gg 1$; *б* – при $\alpha t_0 \ll 1$

Энергетический **спектр сигнала**

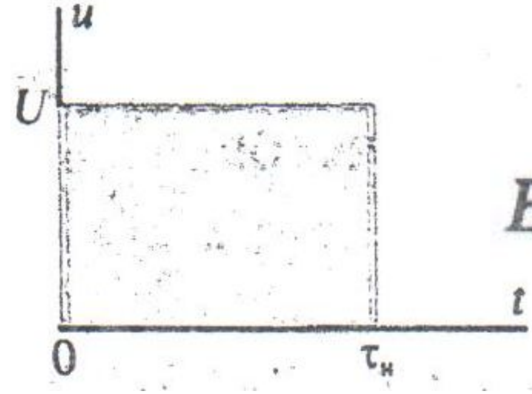
Спектральное представление энергии сигнала легко получить из обобщенной формулы Рэлея

$$W_u(\omega) = U(\omega)\, U^*(\omega) = |U(\omega)|^2.$$

Величина $W_u(\omega)$ носит название *спектральной плотности энергии* сигнала *u(t),* или, короче, его *энергетического спектра.*

$$\boxed{E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega)\, \mathrm{d}\omega.}$$

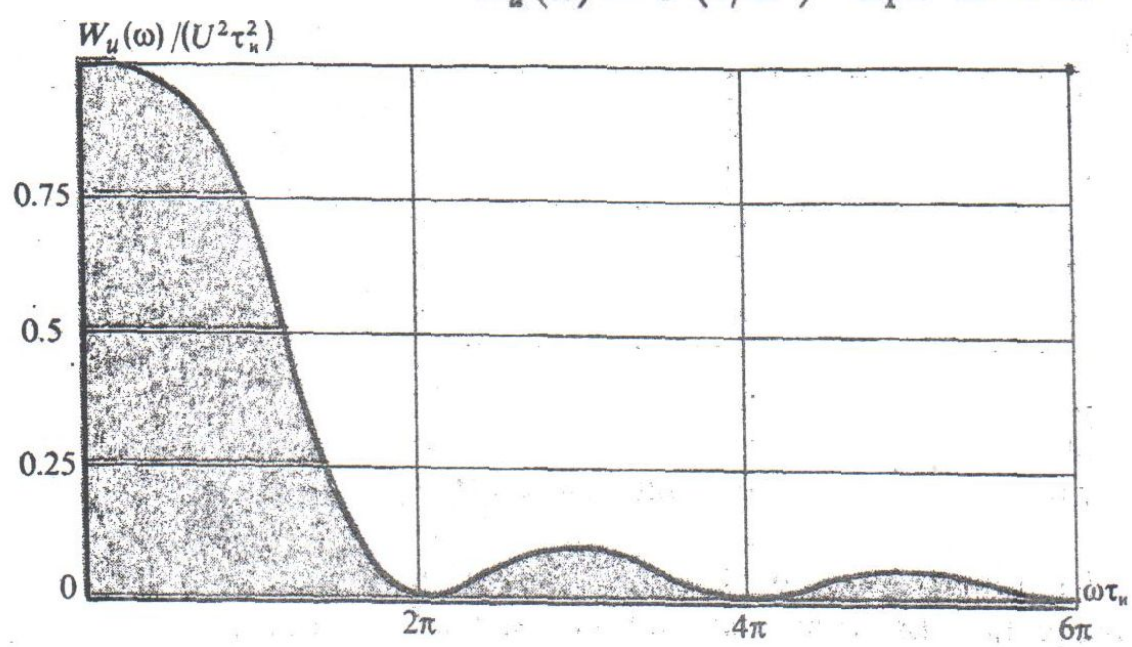
Энергетический спектр прямоугольного видеоимпульса



$$E_и = U^2 \tau_и$$

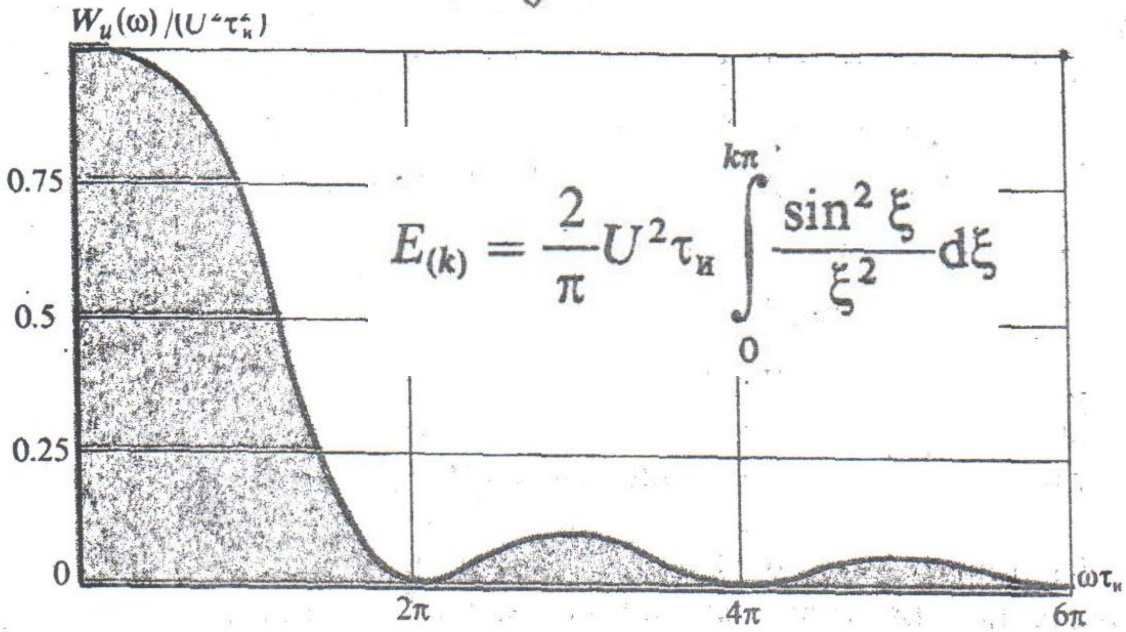
Энергетический спектр данного сигнала имеет наибольшую величину в области низких частот. С ростом частоты вклад от соответствующих спектральных составляющих имеет немонотонный, колеблющийся характер, однако общая тенденция - уменьшение энергетического спектра по закону обратного квадрата

$$W_и(\omega) = O(1/\omega^2) \quad \text{при} \quad \omega \to \infty$$



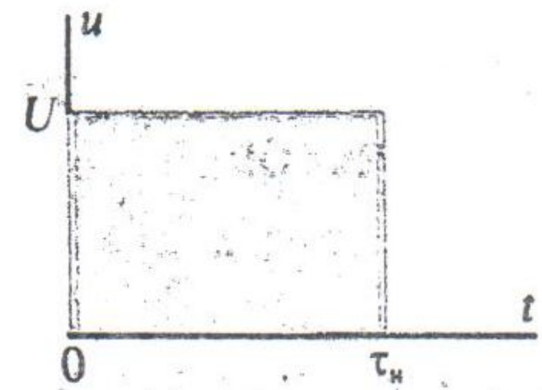
Энергетический спектр прямоугольного видеоимпульса

$$E_u = \frac{U^2\tau_и^2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\omega\tau_и/2)}{(\omega\tau_и/2)^2}d\omega = U^2\tau_и$$



$$E_{(k)} = \frac{2}{\pi}U^2\tau_и\int_0^{k\pi}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}d\xi$$

$$E_u = U^2\tau_и$$

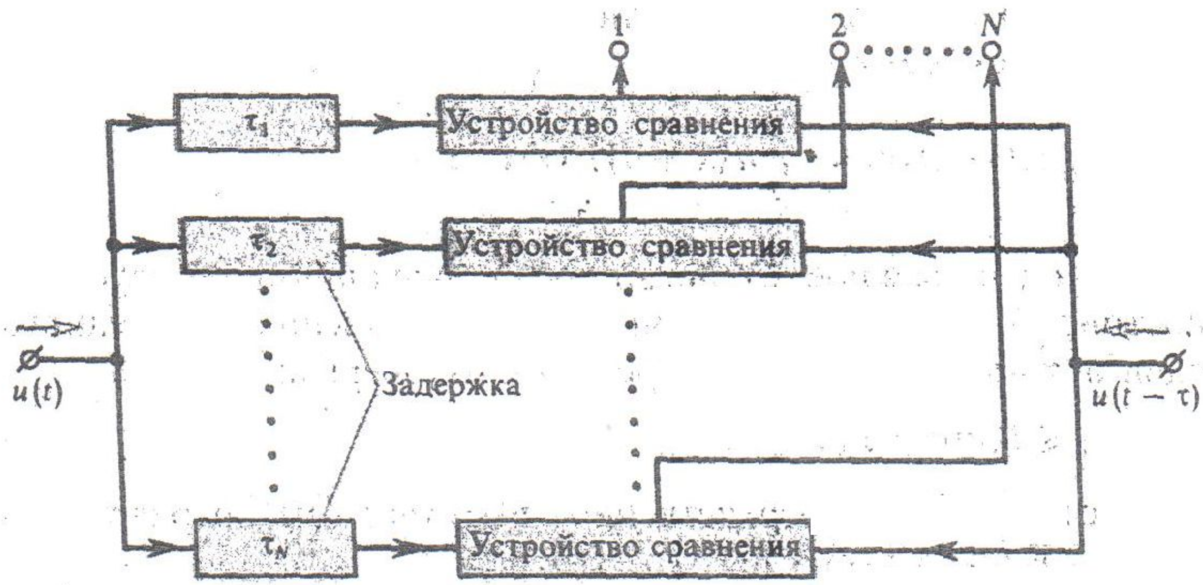


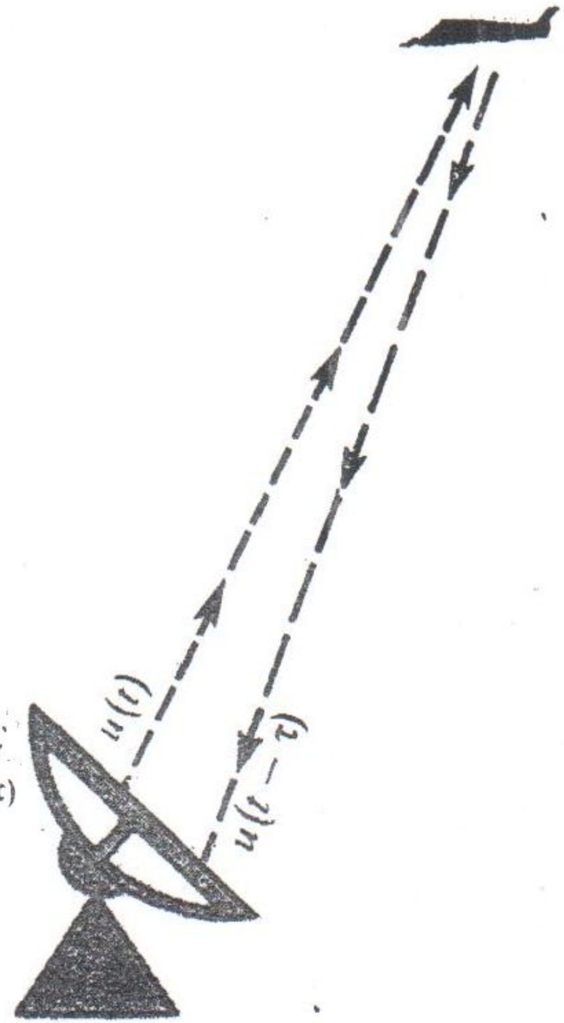
k	1	2	3
$E_{(k)}/E_u$	0,902	0,950	0,967

Корреляционный анализ сигналов

Сравнение сигналов, сдвинутых во времени.

Информация об объекте измерения заложена в величине τ — задержке по времени между зондирующим и принятым сигналами





Устройство для измерения времени задержки сигналов

Автокорреляционная функция сигнала

Автокорреляционная функция (АКФ) сигнала *u*(*t*) равна скалярному произведению сигнала и его сдвинутой во времени копии

$$\boxed{B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, u(t-\tau)\, dt .}$$

Автокорреляционная функция становится равной энергии сигнала при нулевой задержке копии

$$B_u(0) = E_u.$$

Свойства АКФ : чётность

$$B_u(\tau) = B_u(-\tau)$$

Автокорреляционная функция сигнала

Свойства АКФ: при любом значении временного сдвига модуль АКФ не превосходит энергии сигнала

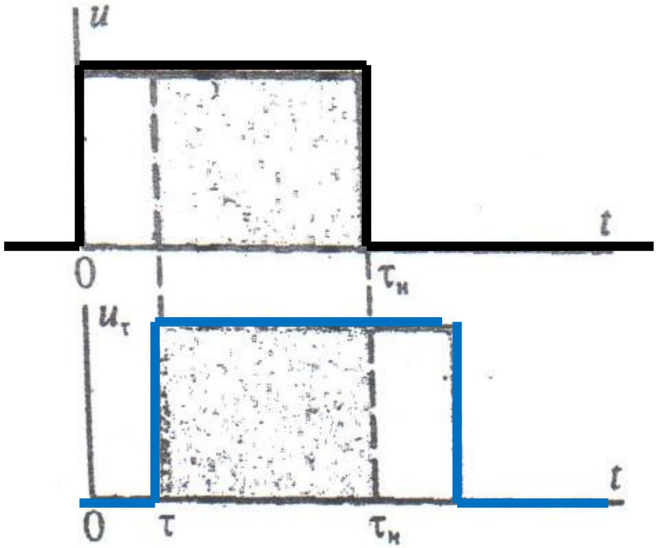
$$|B_u(\tau)| \leqslant B_u(0) = E_u$$

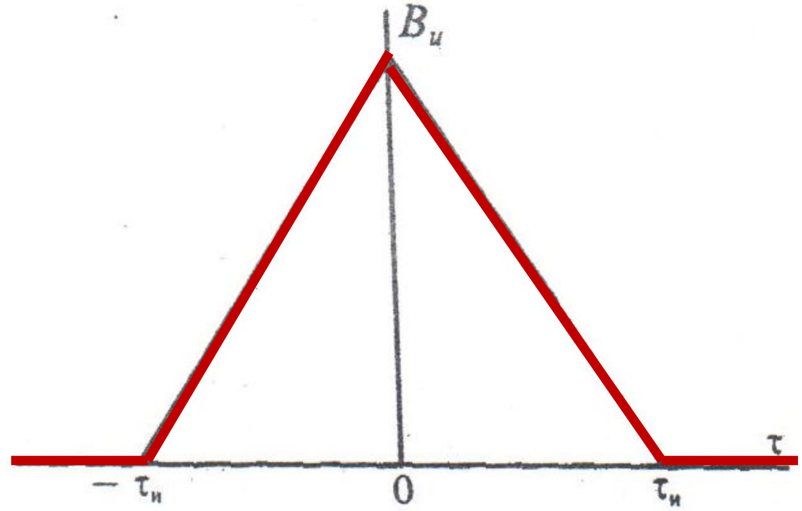
Следствие неравенства Коши - Буняковского

$$|(u, u_\tau)| \leqslant \| u \| \cdot \| u_\tau \| = E_u$$

АКФ представляется симметричной кривой с центральным максимумом, который всегда положителен.
При этом в зависимости от вида сигнала *u*(*t*) автокорреляционная функция может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер.

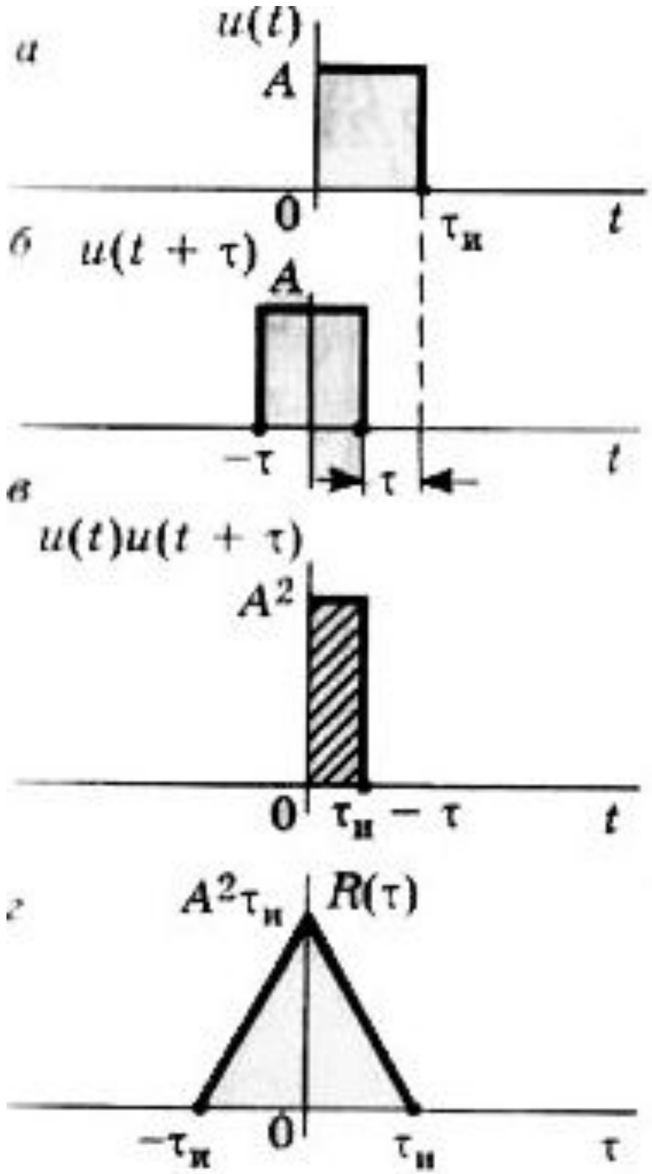
АКФ прямоугольного видеоимпульса





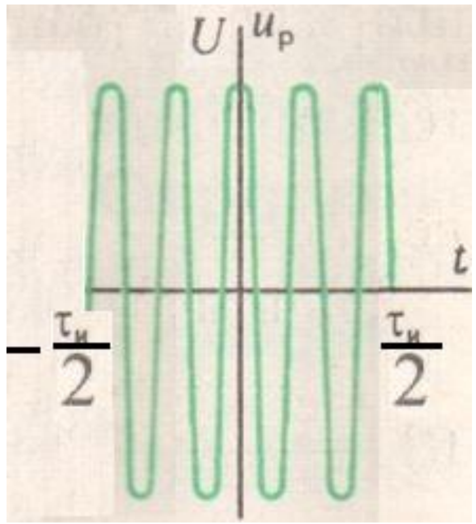
$$B_и(\tau) = \begin{cases} U^2 \tau_и \left(1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_и}\right), & |\tau| \leqslant \tau_и, \\ 0, & |\tau| > \tau_и. \end{cases}$$

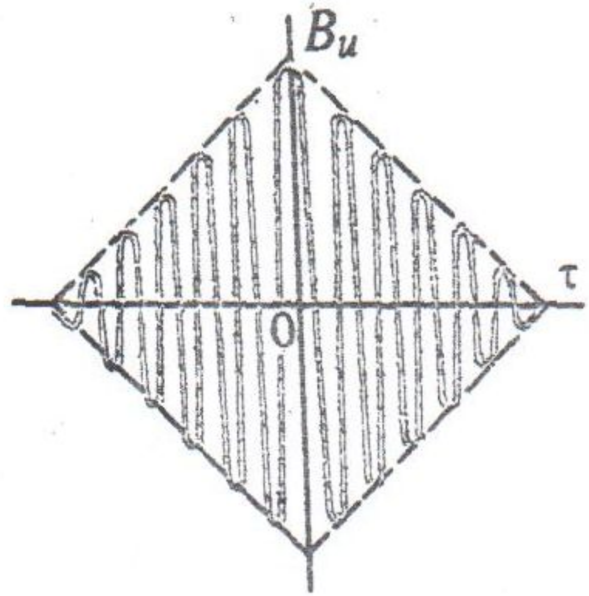
АКФ сигнала прямоугольного вида



а — прямоугольный импульс;
б — задержанный во времени прямоугольный импульс;
в — произведение импульсов;
г — автокорреляционная функция

АКФ прямоугольного радиоимпульса





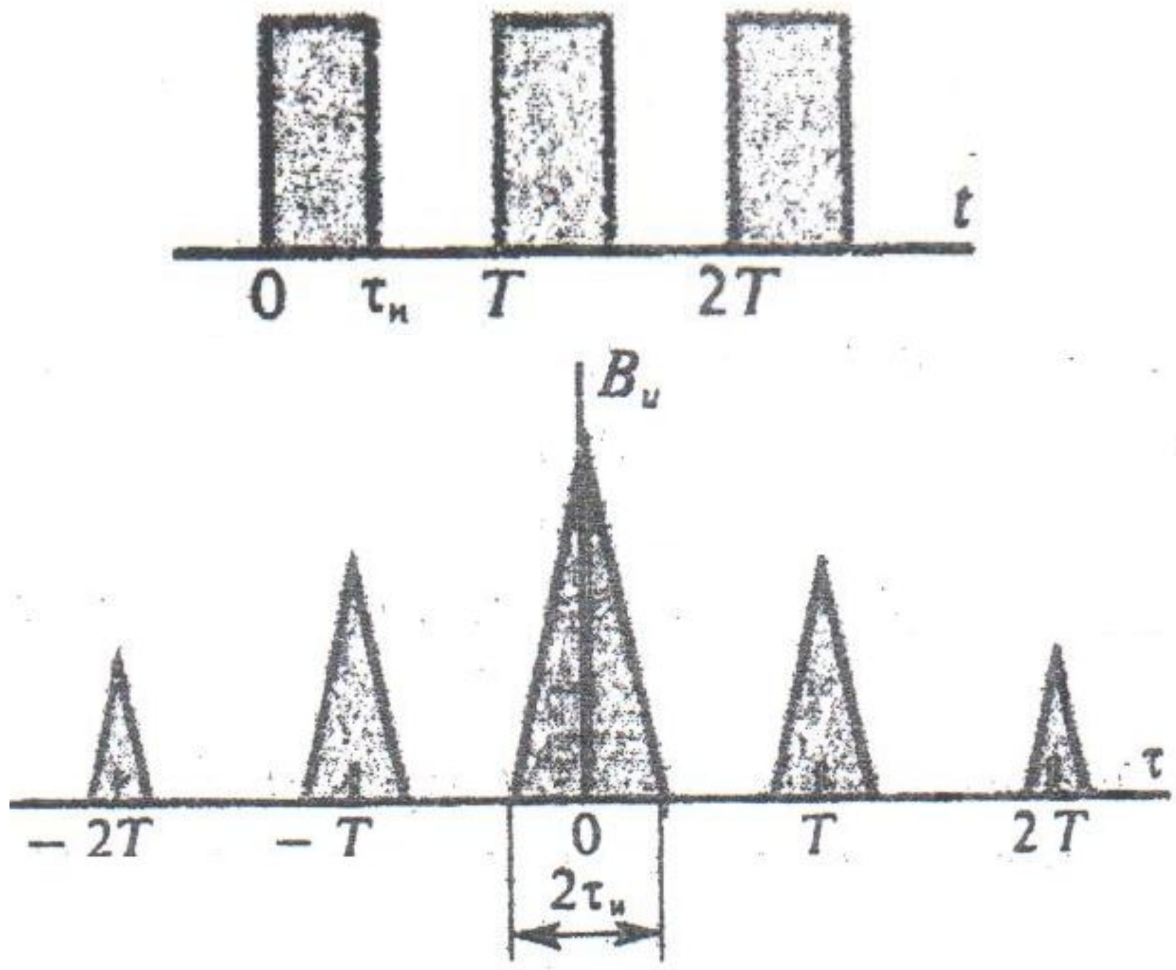
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_\text{и}/2, \\ U \cos \omega_0 t, & -\tau_\text{и}/2 \leqslant t \leqslant \tau_\text{и}/2, \\ 0, & t > \tau_\text{и}/2. \end{cases}$$

$$\boxed{B_u(\tau) = \frac{U^2}{2}(\tau_\text{и} - |\tau|)\left[\cos \omega_0 \tau + \frac{\sin 2\omega_0 (\tau_\text{и} - |\tau|)}{2\omega_0 (\tau_\text{и} - |\tau|)}\right]}$$

$$B_u(\tau) = U^2 \int\limits_{-\tau_\text{и}/2+\tau}^{\tau_\text{и}/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t - \tau)\, dt =$$

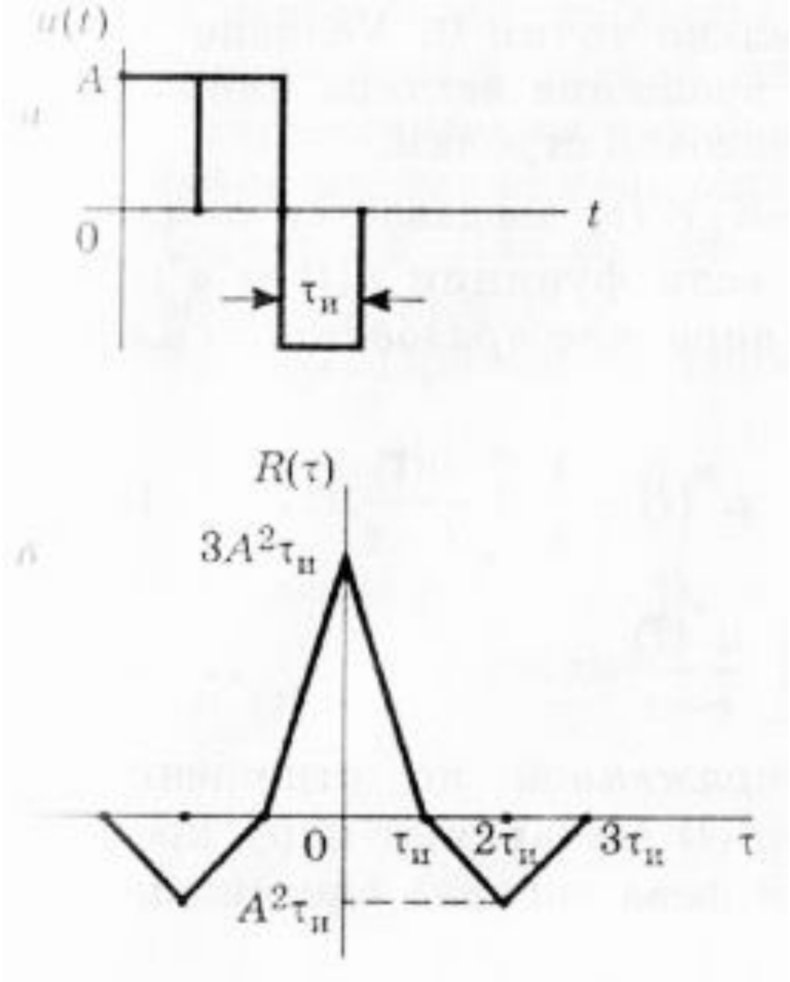
$$= \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau \cdot (\tau_\text{и} - \tau) + \frac{U^2}{2} \cdot \int\limits_{-\tau_\text{и}/2+\tau}^{\tau_\text{и}/2} \cos 2\omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt$$

АКФ последовательности прямоугольных видеоимпульсов



АКФ пачки из трех одинаковых видеоимпульсов

Пример. АКФ кодированного сигнала



а — кодированный сигнал;
б — автокорреляционная функция сигнала

Автокорреляционная функция неограниченно протяженного сигнала

$$\tilde{B}_u(\tau) = \lim_{\tau_И \to \infty} \frac{1}{\tau_И} \int\limits_{-\tau_И/2}^{\tau_И/2} u(t)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}t\,.$$

АКФ гармонического сигнала

$$\boxed{\tilde{B}_u(\tau) = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau}$$

Связь между энергетическим спектром сигнала и его автокорреляционной функцией

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\, U_\tau^*(\omega)\, d\omega$$

$$U_\tau(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega\tau), \text{ откуда } U_\tau^*(\omega) = U^*(\omega) \exp(j\omega\tau)$$

$$\boxed{B_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}\, d\omega}$$

$$B_u(\tau) \leftrightarrow |U(\omega)|^2 = W_u(\omega)$$

$$\boxed{|U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau}$$

Благодарю за внимание!