

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

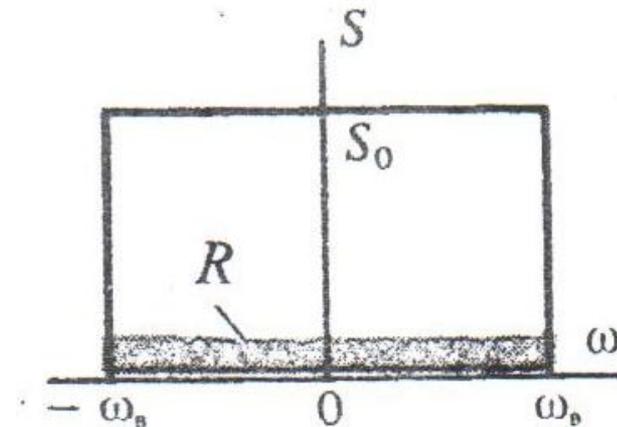
Лекционный курс

Лекция 6

Доцент Трухин М.П.

6. СИГНАЛЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

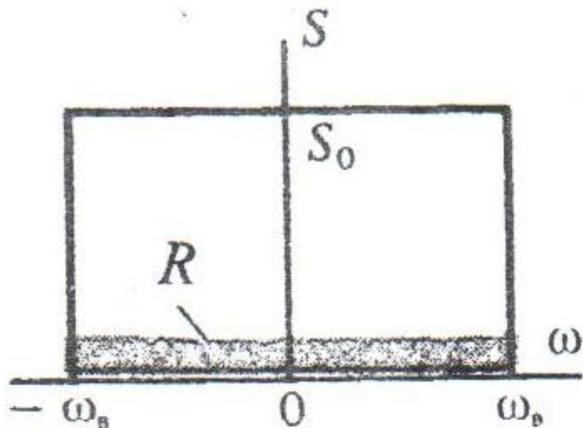
6.1. Идеальный низкочастотный сигнал (ИНС)



$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

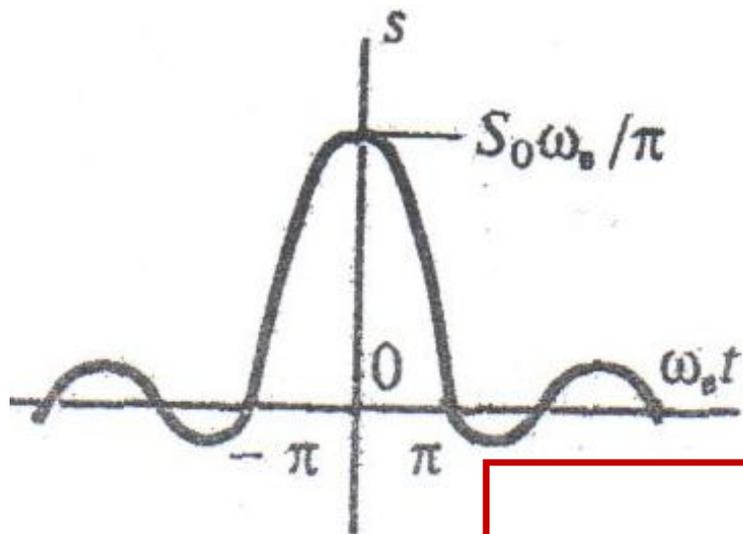
$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases}$$

Математическая модель идеального НЧ сигнала



Спектральная плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases}$$



Спектральная плотность

$$s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t}$$

Математическая модель смещённого идеального НЧ сигнала

График ИНС имеет вид осциллирующей кривой, четной относительно начала отсчета времени. С увеличением верхней граничной частоты спектра возрастают как центральный максимум, так и частота осцилляции.

Спектральной плотности

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0 e^{-j\omega t_0}, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases}$$

соответствует низкочастотный сигнал

$$s(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B (t - t_0)}{\omega_B (t - t_0)}$$

Математическая модель смещённого идеального НЧ сигнала

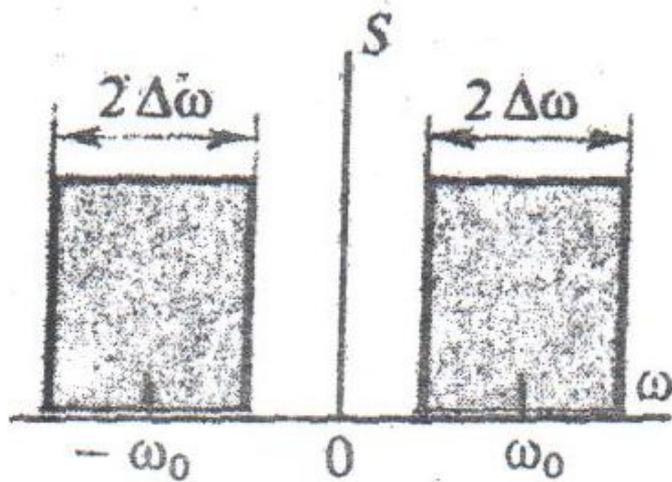
График ИНС имеет вид осциллирующей кривой, четной относительно начала отсчета времени. С увеличением верхней граничной частоты спектра возрастают как центральный максимум, так и частота осцилляции. При смещении на время t_0 спектральной плотности

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ S_0 e^{-j\omega t_0}, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B. \end{cases}$$

соответствует низкочастотный сигнал

$$s(t) = \frac{S_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B (t - t_0)}{\omega_B (t - t_0)}$$

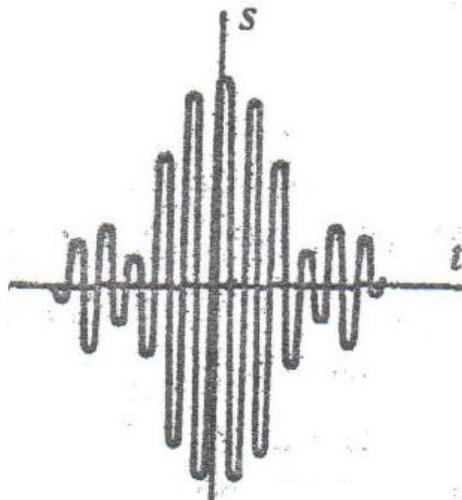
6.2. Идеальный полосовой сигнал



$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq -\omega_0 + \Delta\omega, \\ & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0, & \text{вне указанных полос,} \end{cases}$$

Наряду с высокочастотными оцилляциями на частоте ω_0 наблюдается изменение во времени мгновенного значения их амплитуды.

Соответствующий сигнал



$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t \, d\omega = \\ &= \frac{2S_0 \Delta\omega}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \end{aligned}$$

6.3. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

Два идеальных низкочастотных сигнала $u(t)$ и $v(t)$. Оба эти сигнала имеют одинаковые параметры S_0 и ω_B , однако сигнал $v(t)$ запаздывает по отношению к сигналу $u(t)$ на время t_0 , так что его спектральная плотность

$$V(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega t_0)$$

Скалярное произведение этих сигналов

$$(u, v) = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B t_0}{\omega_B t_0}$$

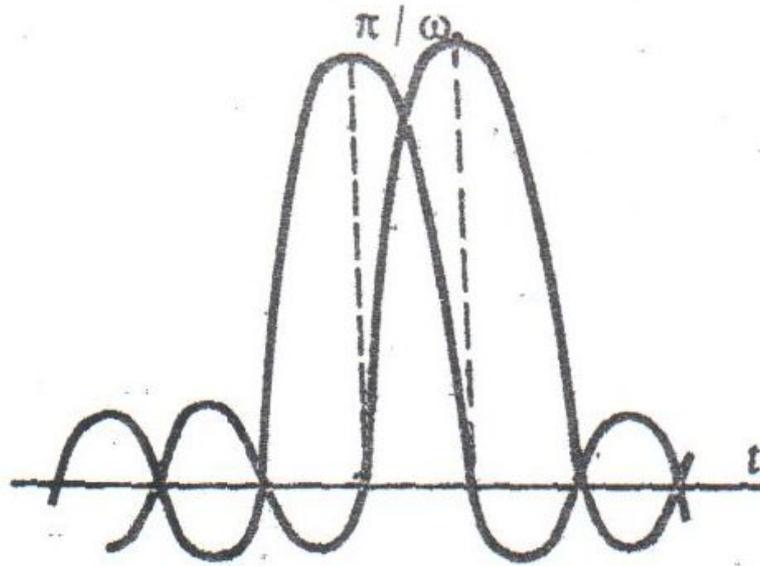
Скалярное произведение обращается в нуль и два одинаковых по форме ИНС оказываются ортогональными, если временной сдвиг между ними удовлетворяет условию $\omega_B t_0 = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$)

Минимально возможный сдвиг, приводящий к ортогонализации, получается при $k = \pm 1$:

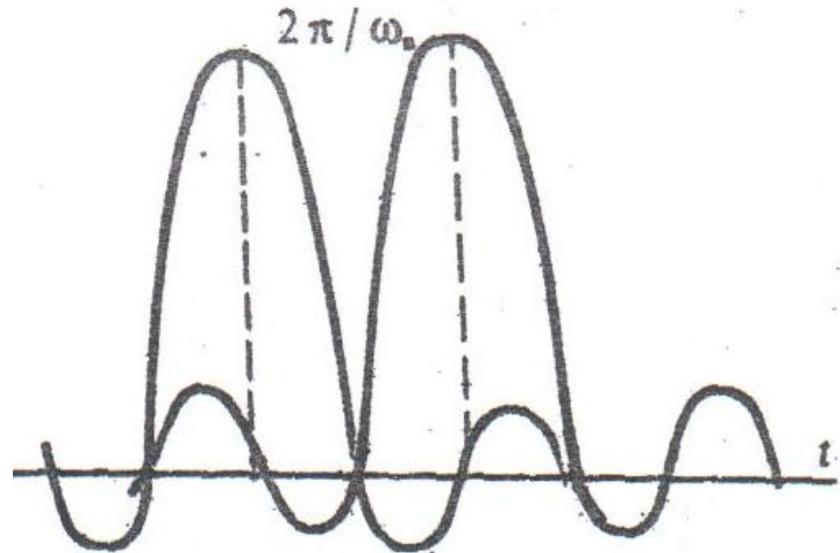
$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_B} = \pm \frac{1}{2f_B}$$

Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

График двух идеальных низкочастотных сигналов



при $t_0 = \pi / \omega_B$



при $t_0 = 2\pi / \omega_B$

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_B} = \pm \frac{1}{2f_B}$$

6.4. Теорема Котельникова

Любые два сигнала с ограниченным спектром, принадлежащие семейству

$$u_k(t) = A \frac{\sin \omega_B (t - k\pi/\omega_B)}{\omega_B (t - k\pi/\omega_B)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

являются ортогональными. Нормировка системы базиса может быть выполнена исходя из квадрата нормы одной из базисных функций

$$u_0(t) = A \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B t} \quad \|u_0\|^2 = \frac{A^2}{\omega_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_B t}{t^2} dt = \frac{\pi A^2}{\omega_B}$$

Базисные функции будут ортонормированными, если $A = \sqrt{\omega_B/\pi}$

$$Sc_k(t; \omega_B) = \sqrt{\frac{\omega_B}{\pi}} \frac{\sin \omega_B (t - k\pi/\omega_B)}{\omega_B (t - k\pi/\omega_B)}$$

Базис Котельникова – бесконечный набор базисных функций

Теорема Котельникова

Ряд Котельникова

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k S c_k(t; \omega_B)$$

Коэффициентами ряда служат скалярные произведения сигнала на соответствующую базисную функцию

$$c_k = (s(t), S c_k(t; \omega_B))$$

k -я отсчетная функция в пределах отрезка $-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$ имеет спектральную плотность, равную $\sqrt{\pi/\omega_B} \exp(-j\omega k\pi/\omega_B)$

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_B}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) \exp[jk\pi\omega/\omega_B] d\omega \right\}$$
$$s_k = s(t_k)$$

Теорема Котельникова

Ряд Котельникова

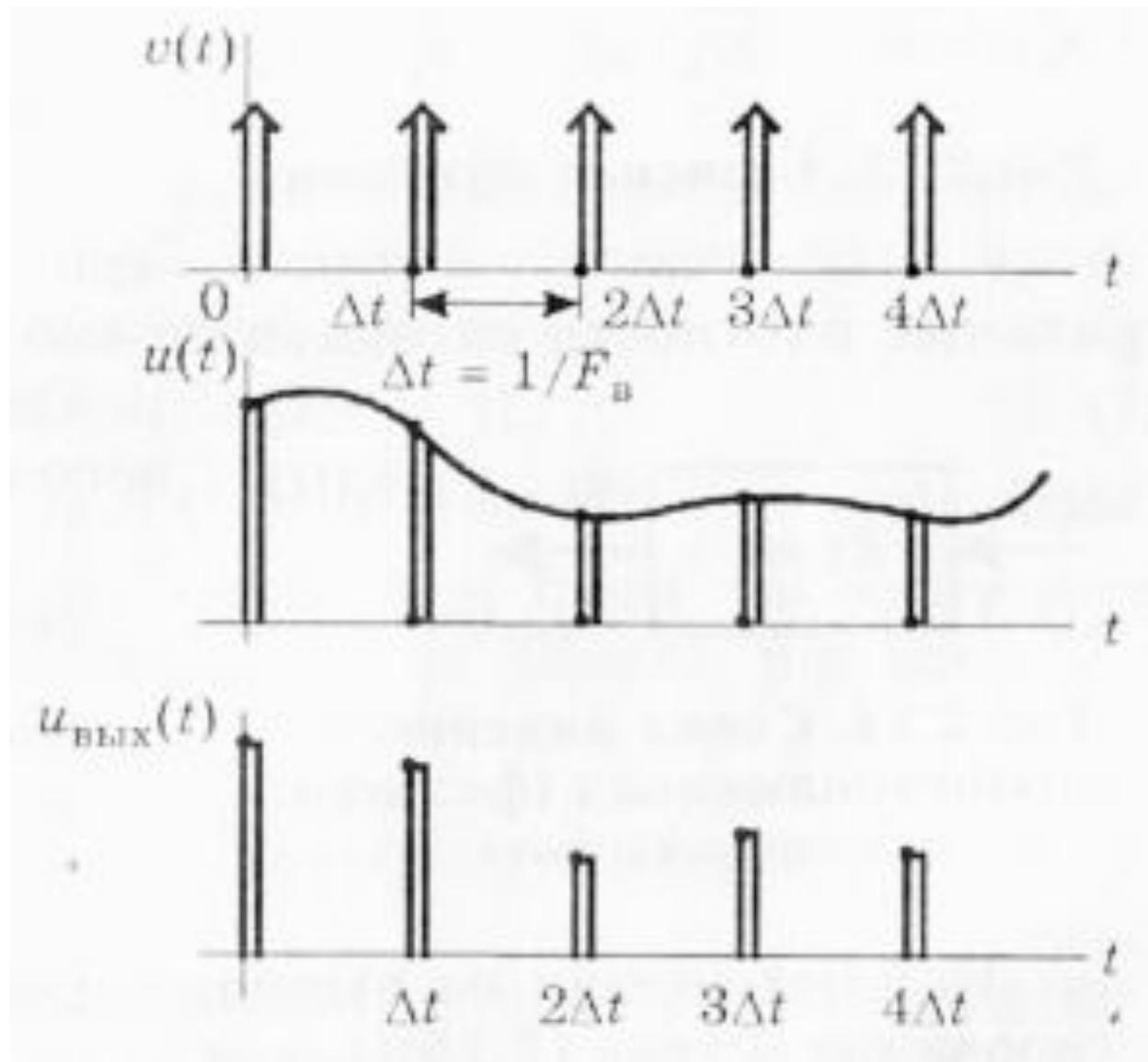
$$t_k = k\pi/\omega_B = k/(2f_B) \quad -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$$

$$c_k = \sqrt{\pi/\omega_B} S_k$$

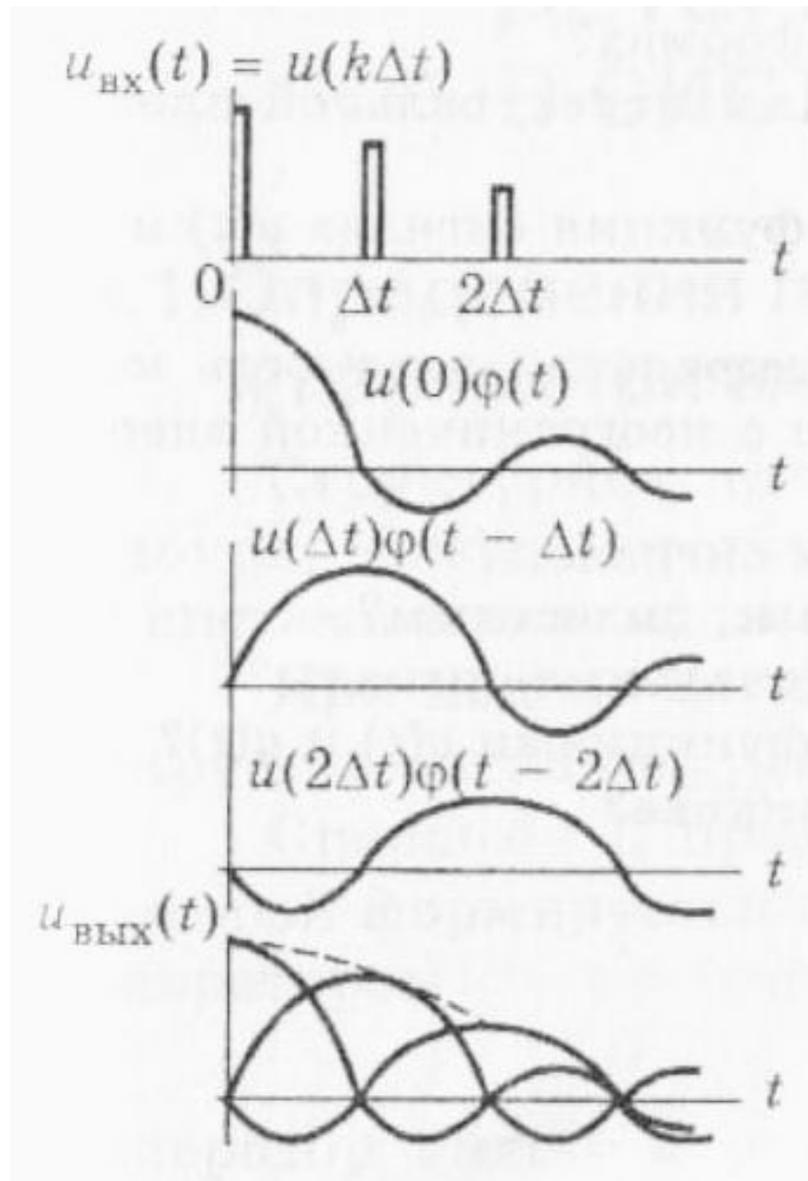
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{\sin \omega_B (t - k\pi/\omega_B)}{\omega_B (t - k\pi/\omega_B)}$$

Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше f_B , Гц, может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $1/(2f_B)$ с

Временные диаграммы, поясняющие работу дискретизатора

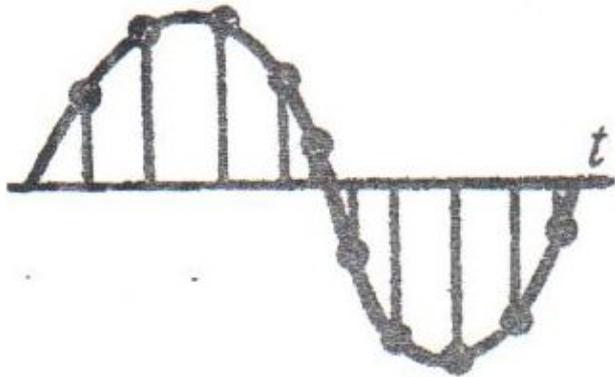


Временные диаграммы, поясняющие восстановление сигнала



Пример 6.1

Дан сигнал $s(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.



$$\omega_B = \pi/t_0.$$

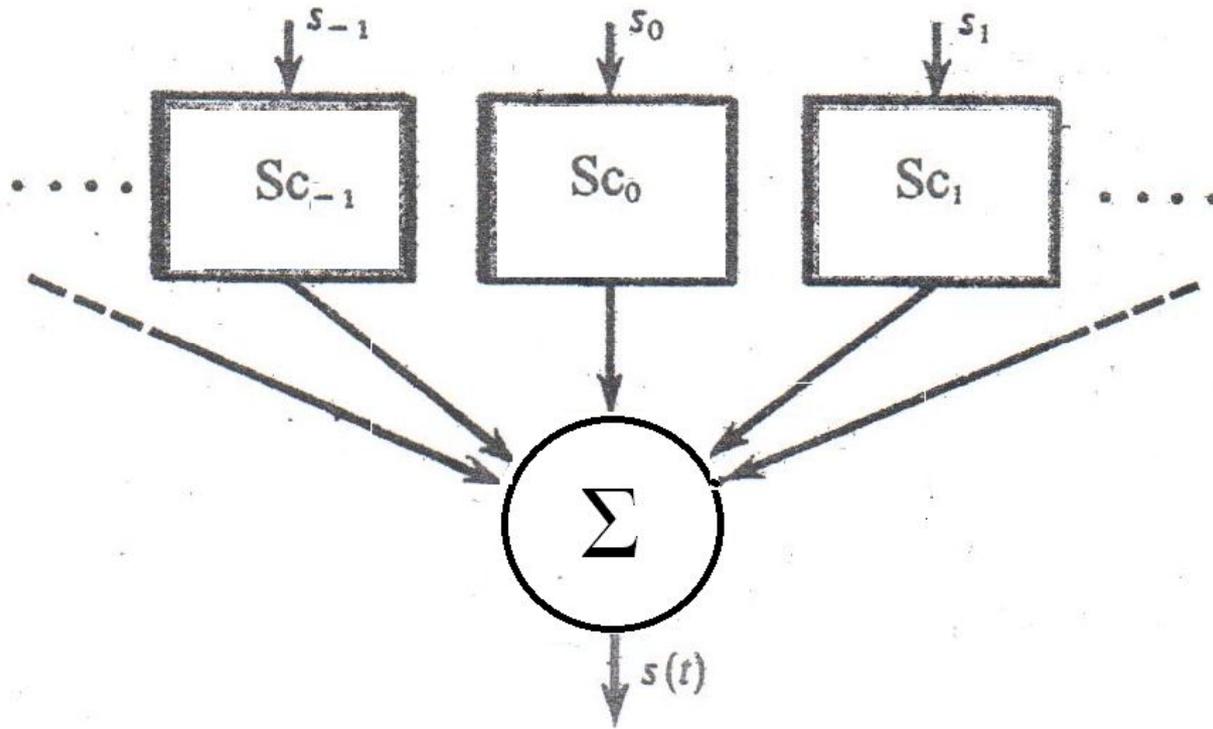
К рассматриваемому гармоническому сигналу применима теорема Котельникова: отсчетные значения (выборки) для данного сигнала

$$s_k = \cos(k\pi\omega_0/\omega_B + \varphi_0)$$

В предельном случае, когда частота ω_0 стремится к ω_B , на каждый период гармонического сигнала должно приходиться ровно две выборки.

Если же условия теоремы Котельникова нарушаются и отсчеты во времени берутся недостаточно часто, то однозначное восстановление исходного сигнала принципиально невозможно.

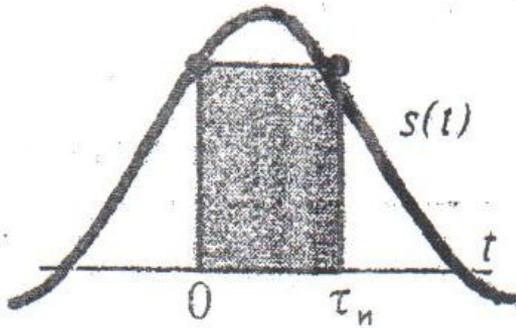
6.5. Аппаратурная реализация синтеза сигнала по ряду Котельникова



Важная особенность теоремы Котельникова состоит в ее конструктивном характере: она не только указывает на возможность разложения сигнала в соответствующий ряд, но и определяет способ восстановления непрерывного сигнала, заданного своими отсчетными значениями

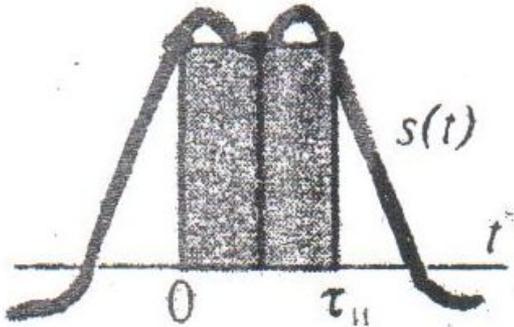
Пример 6.2

Прямоугольный видеоимпульс с единичной амплитудой и длительностью $t_{\text{и}}$ не принадлежит к числу сигналов с ограниченным спектром. Тем не менее модуль его спектральной плотности достаточно быстро (по закону $1/\omega$) уменьшается с ростом частоты.



Два отсчета в начале и в конце импульса

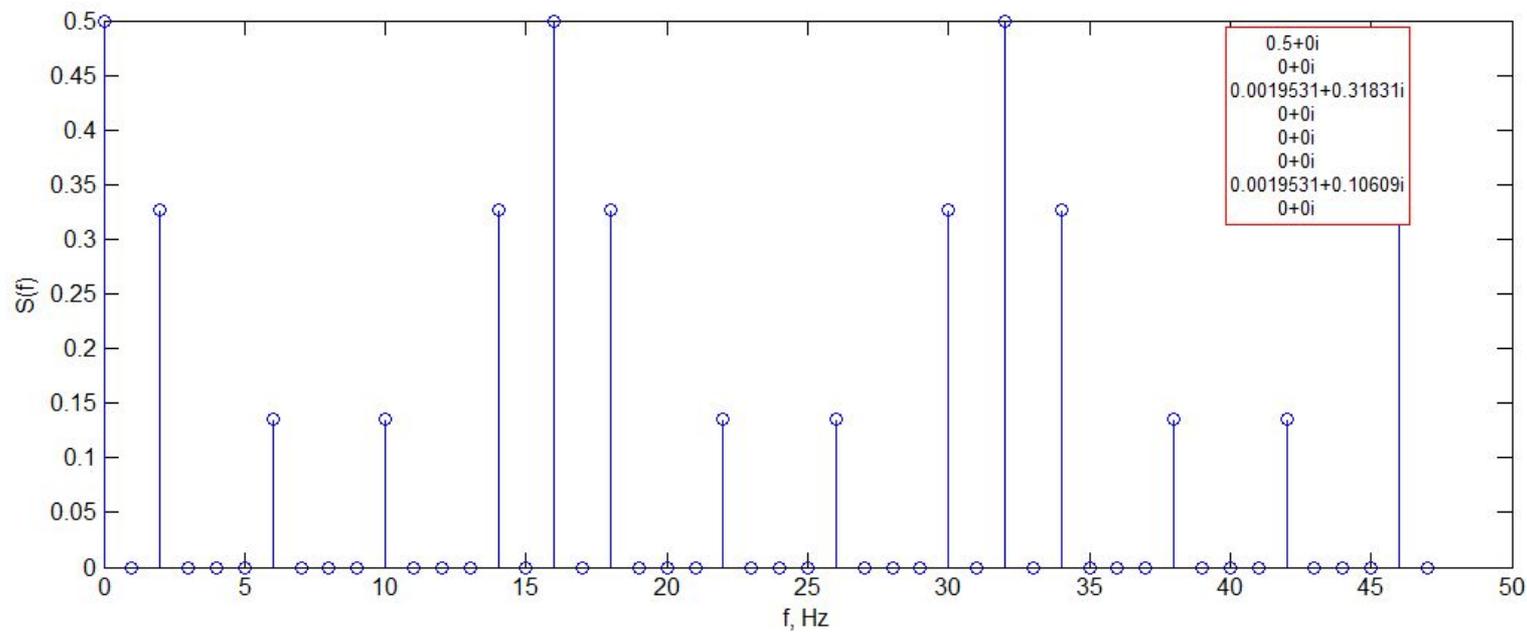
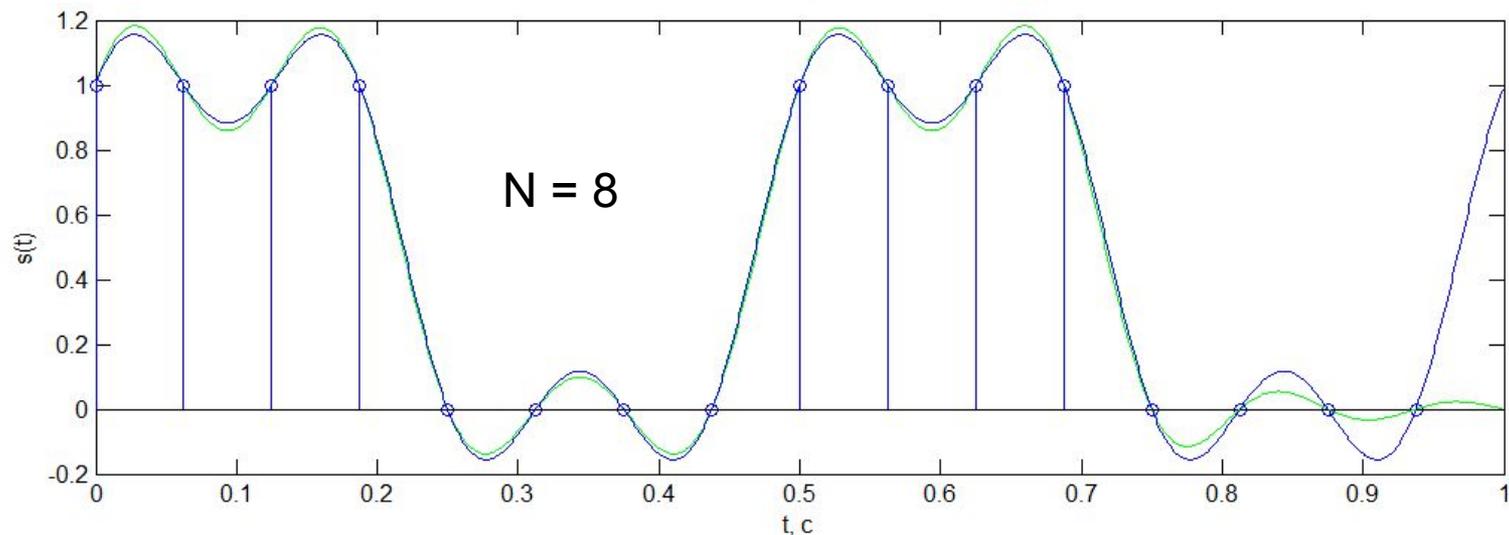
$$s(t) = \frac{\sin(\pi t / \tau_{\text{и}})}{\pi t / \tau_{\text{и}}} + \frac{\sin[\pi(t - \tau_{\text{и}}) / \tau_{\text{и}}]}{\pi(t - \tau_{\text{и}}) / \tau_{\text{и}}}$$



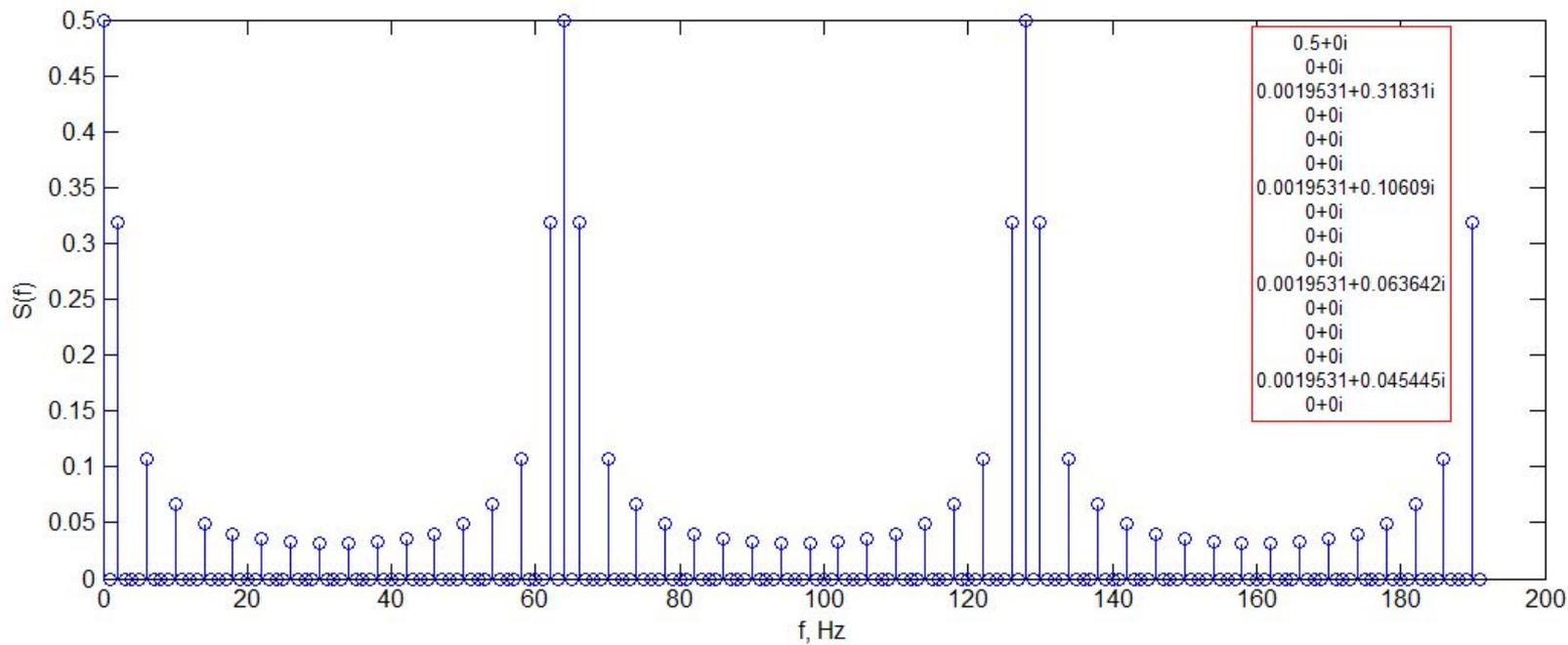
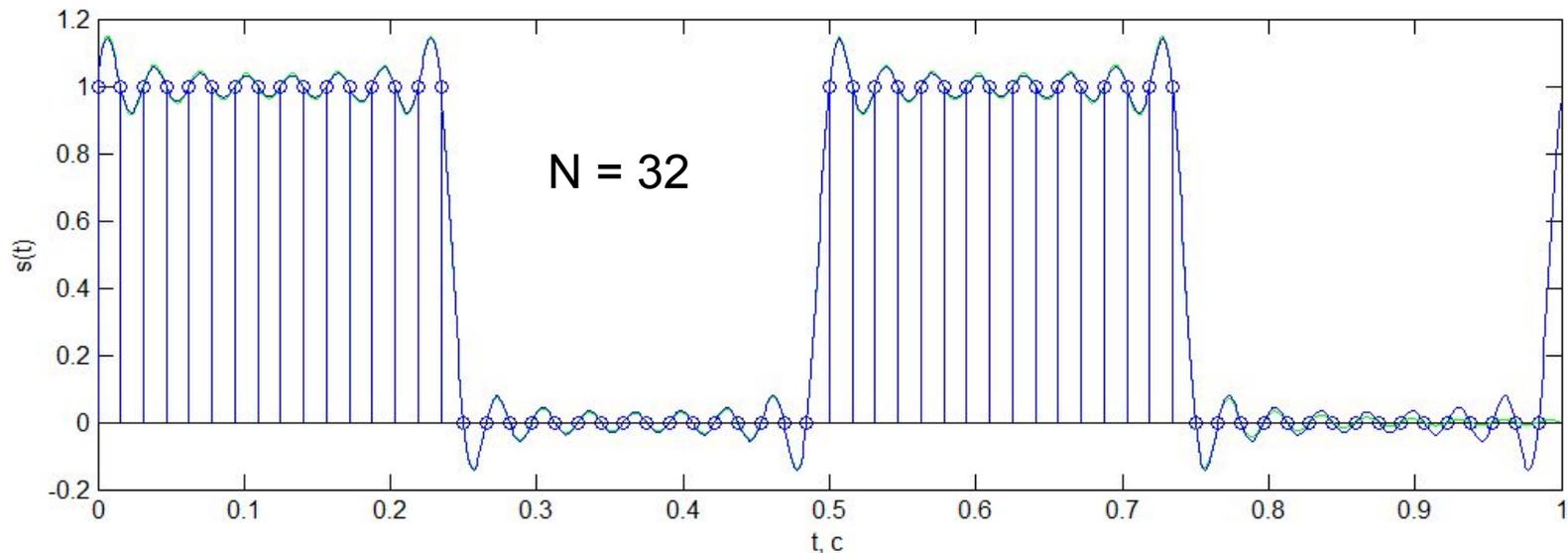
Три равноотстоящих отсчета на импульс

$$s(t) = \frac{\sin \frac{2\pi t}{\tau_{\text{и}}}}{\frac{2\pi t}{\tau_{\text{и}}}} + \frac{\sin \frac{2\pi(t - \tau_{\text{и}}/2)}{\tau_{\text{и}}}}{\frac{2\pi(t - \tau_{\text{и}}/2)}{\tau_{\text{и}}}} + \frac{\sin \frac{2\pi(t - \tau_{\text{и}})}{\tau_{\text{и}}}}{\frac{2\pi(t - \tau_{\text{и}})}{\tau_{\text{и}}}}$$

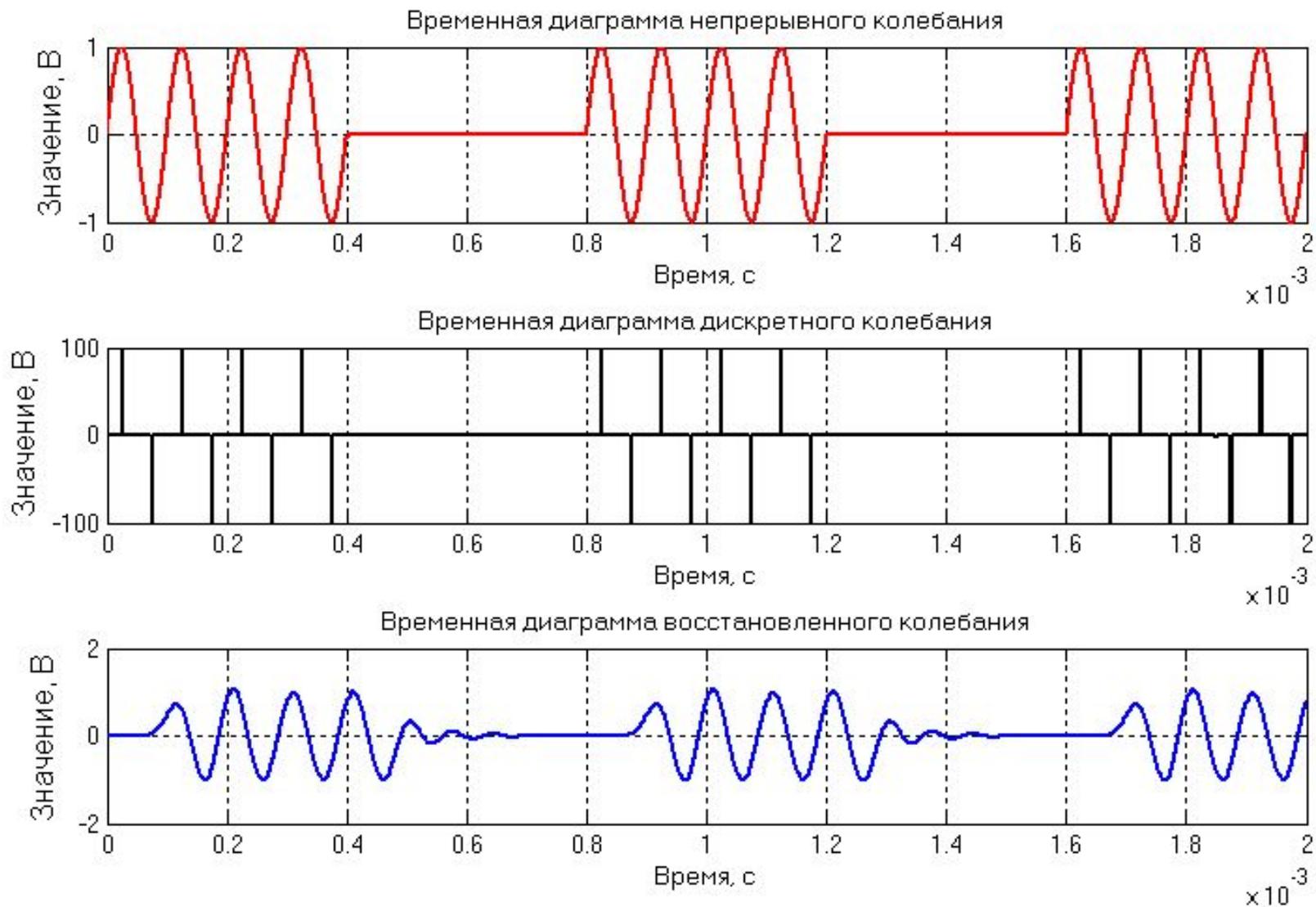
Пример 6.3. Сравнение восстановления видеосигнала по Котельникову и по Фурье



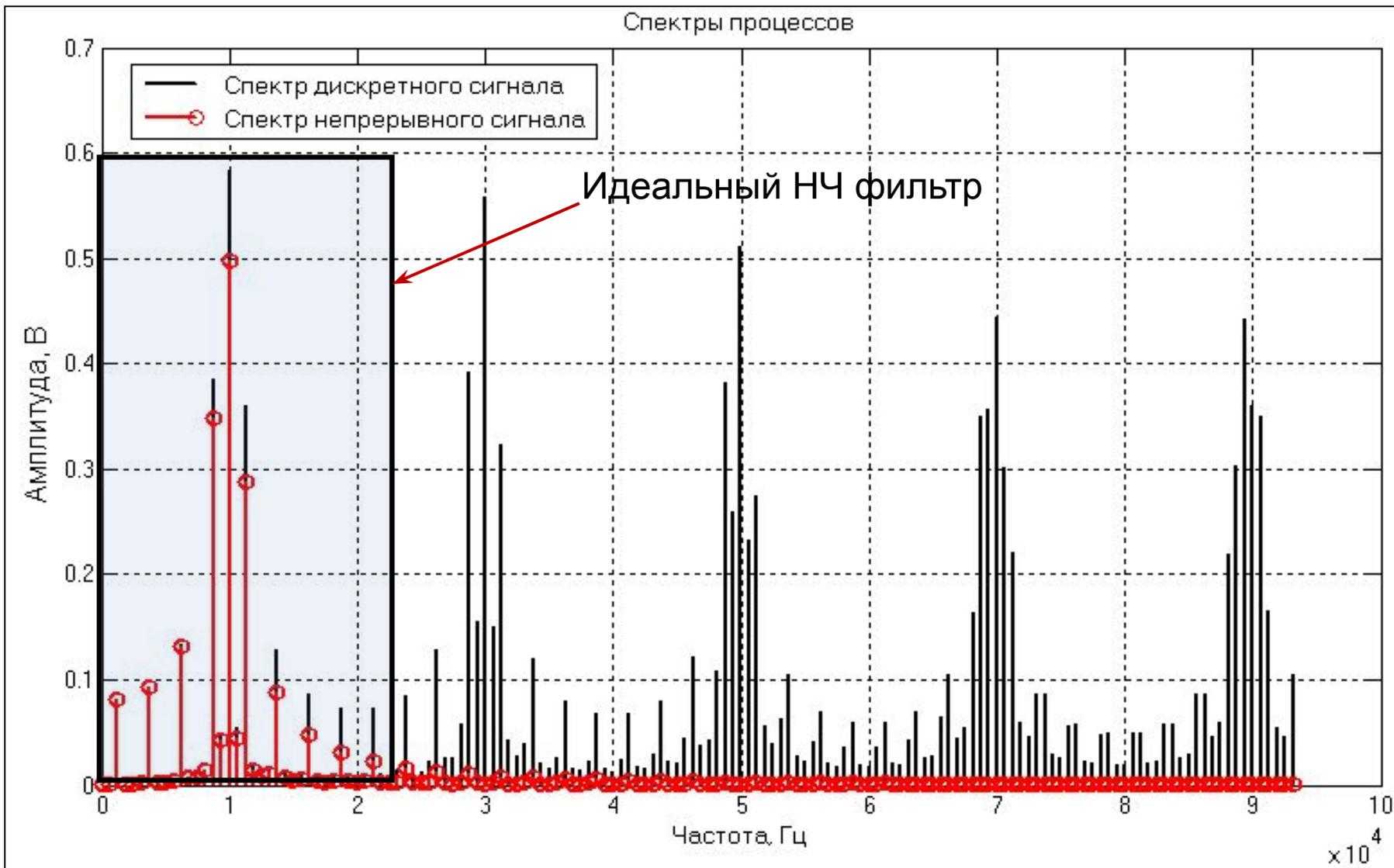
Пример 6.3. Сравнение восстановления сигнала по Котельникову и по Фурье



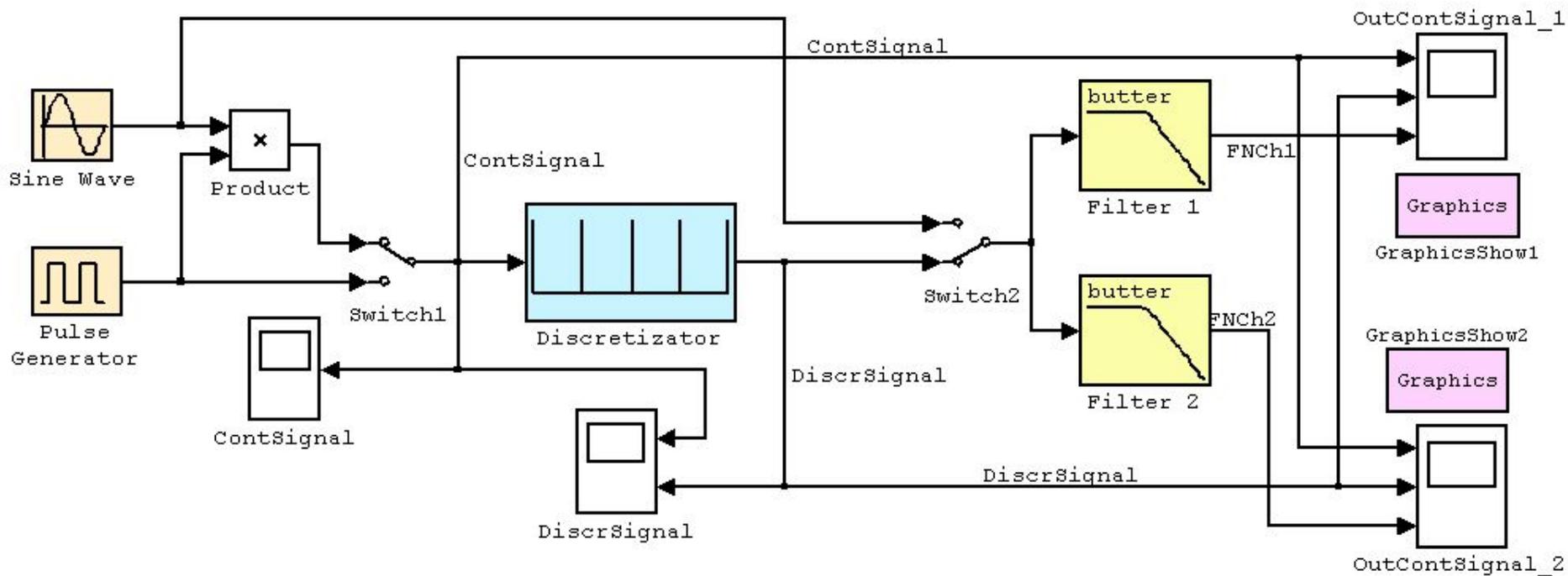
Пример 6.4. Синтез радиосигнала по ряду Котельникова



Пример 6.4. Синтез радиосигнала по ряду Котельникова



Структурная схема лабораторной модели «Теорема отсчетов»

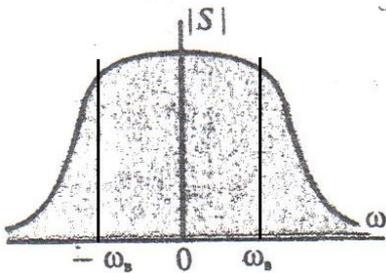


6.6. Оценка ошибки, возникающей при аппроксимации произвольного сигнала рядом Котельникова

Произвольный сигнал можно представить суммой

$$s(t) = s_{\text{оц}}(t; \omega_B) + s_{\text{ош}}(t)$$

Спектры указанных сигналов не перекрываются, поэтому сигналы $s_{\text{оц}}$ и $s_{\text{ош}}(t)$ ортогональны, а их энергии, т. е. квадраты норм, складываются:

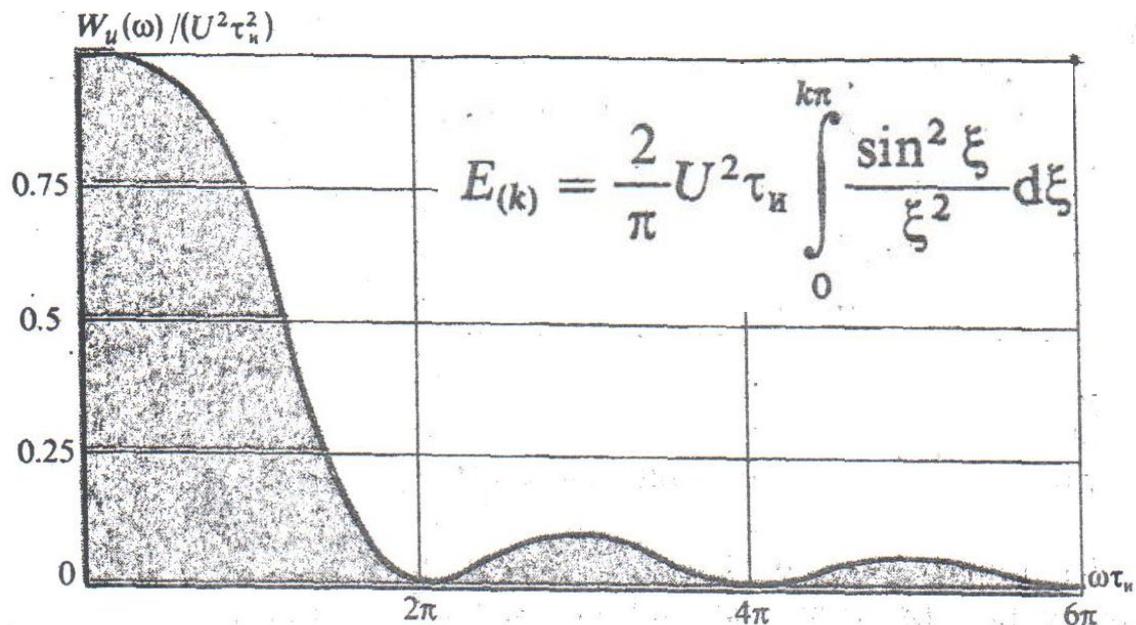


$$\|s\|^2 = \|s_{\text{оц}}\|^2 + \|s_{\text{ош}}\|^2$$

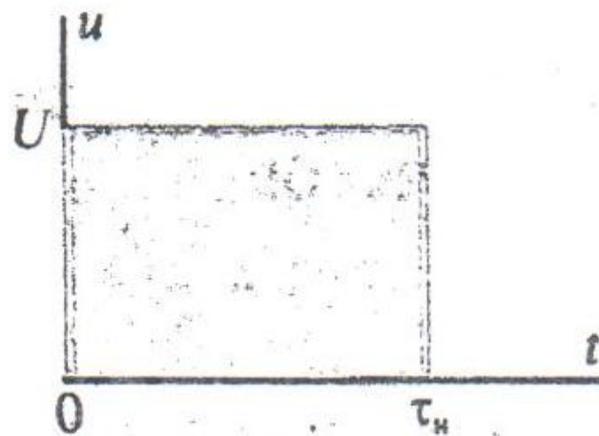
Если $W_s(\omega)$ — энергетический спектр сигнала $s(t)$, то по теореме Рэлея

$$\|s_{\text{ош}}\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\omega_B}^{\infty} W_s(\omega) d\omega \right)^{1/2}$$

Пример 6.5. Ошибки восстановления прямоугольного видеоимпульса



$$E_u = U^2 \tau_n$$



k	1	2	3
$E_{(k)}/E_u$	0,902	0,950	0,967

Благодарю за внимание!