

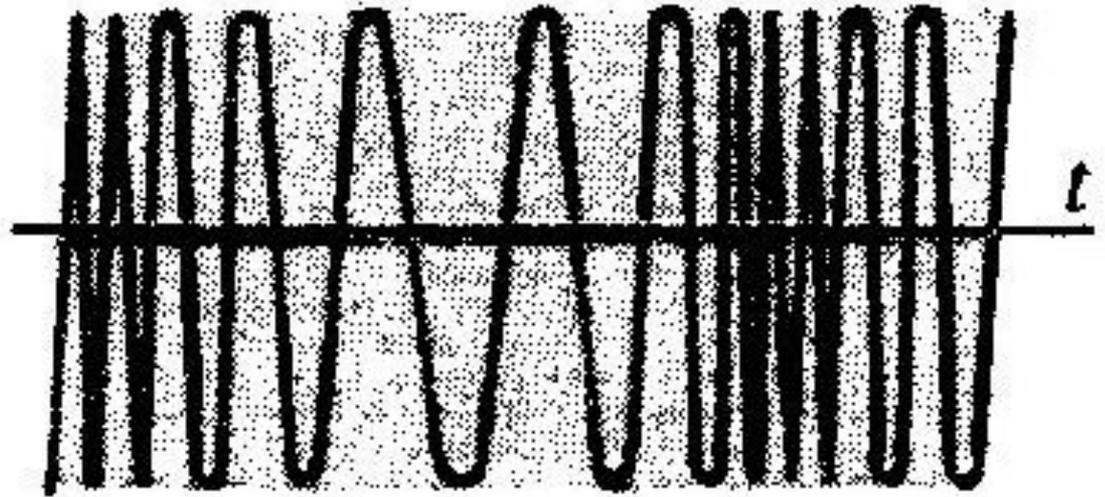
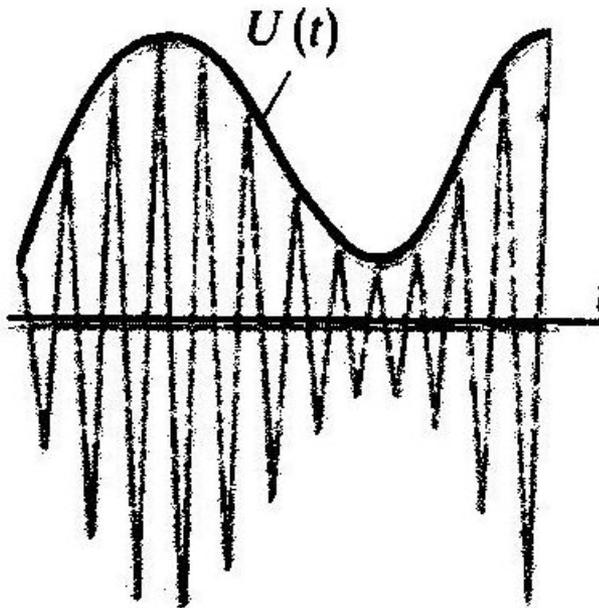
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

Лекционный курс

Лекция 8

Доцент Трухин М.П.

Модулированные сигналы



Сигнал с амплитудной модуляцией

Сигнал с угловой модуляцией

Сигналы с угловой модуляцией

В несущем гармоническом колебании $u_{\text{НЕС}}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ передаваемое сообщение $s(t)$ изменяет либо частоту ω , либо начальную фазу φ ; амплитуда U_m остается неизменной.

Поскольку аргумент гармонического колебания $\psi(t) = \omega t + \varphi$, называемый полной фазой, определяет текущее значение фазового угла, такие сигналы получили название **сигналов с угловой модуляцией**.

Виды угловой модуляции. Фазовая модуляция

Пусть полная фаза связана с сигналом $s(t)$ зависимостью

$$\psi(t) = \omega_0 t + ks(t),$$

где ω_0 — значение частоты в отсутствие полезного сигнала;
 k — некоторый коэффициент пропорциональности. Такую модуляцию называют **фазовой модуляцией** (ФМ):

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos [\omega_0 t + ks(t)]$$

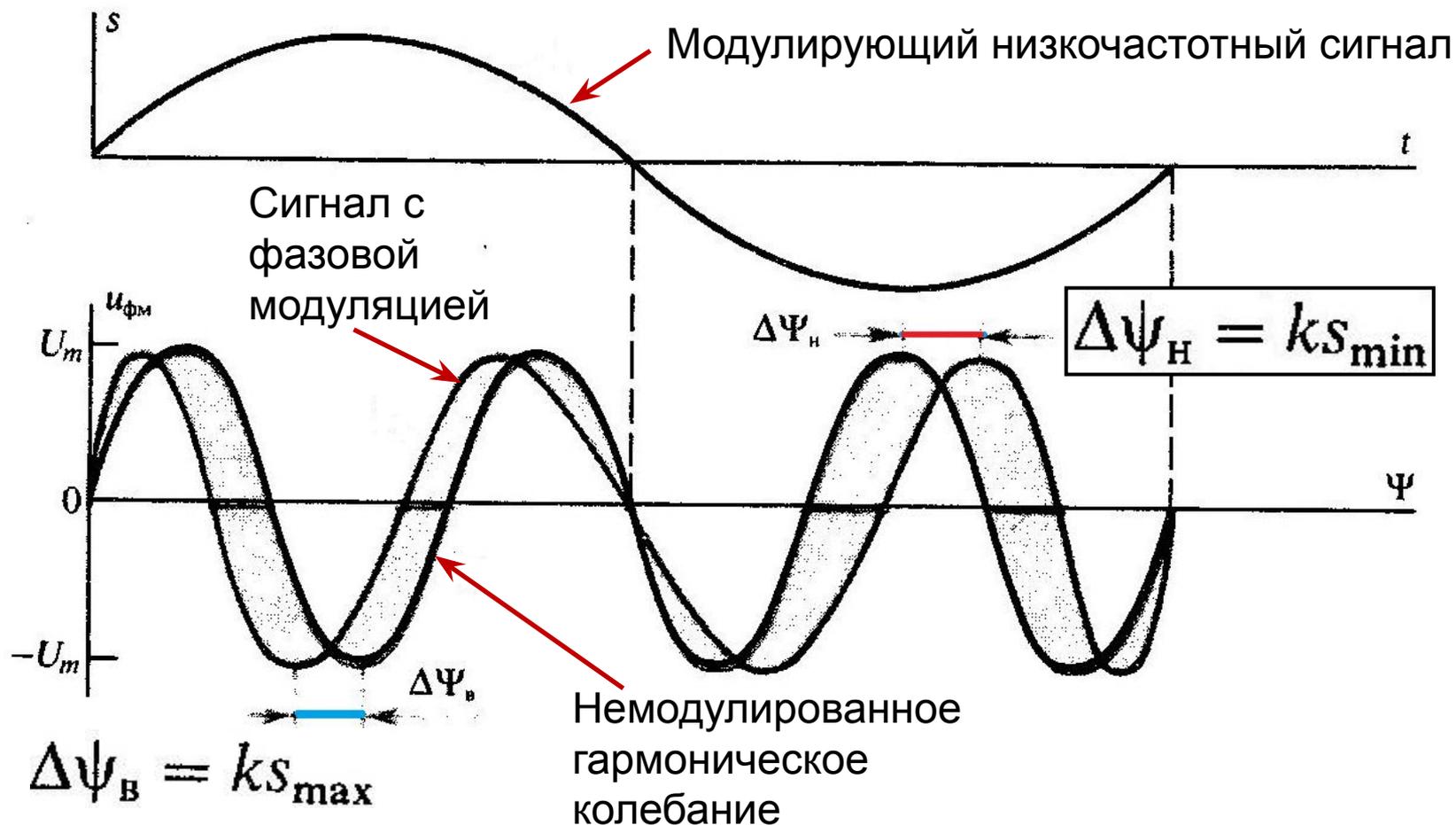
Когда сигнал $s(t)$ изменяет знак, принято различать девиацию фазы вверх

$$\Delta\psi_{\text{в}} = ks_{\text{max}}$$

и девиацию фазы вниз

$$\Delta\psi_{\text{н}} = ks_{\text{min}}$$

Фазовая модуляция



$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos [\omega_0 t + ks(t)]$$

Фазовая модуляция

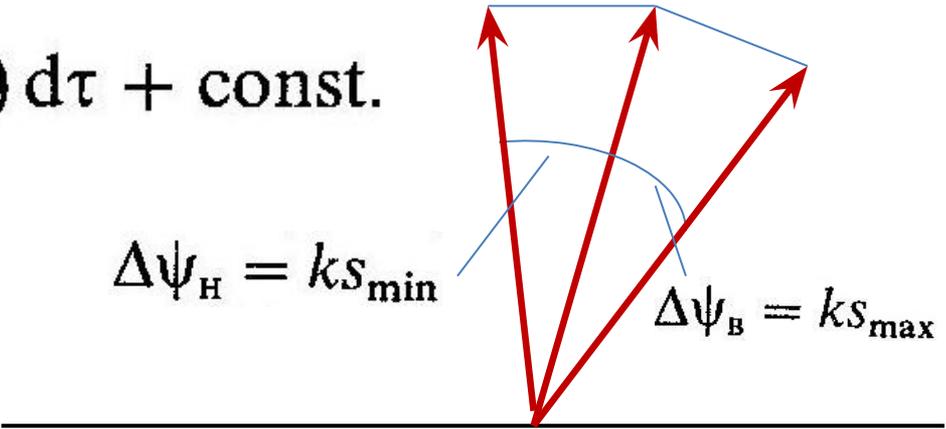
На векторной диаграмме изображающий вектор постоянной длины будет совершать вращение с непостоянной угловой скоростью.

Мгновенная частота сигнала с угловой модуляцией определяется как первая производная от полной фазы по времени:

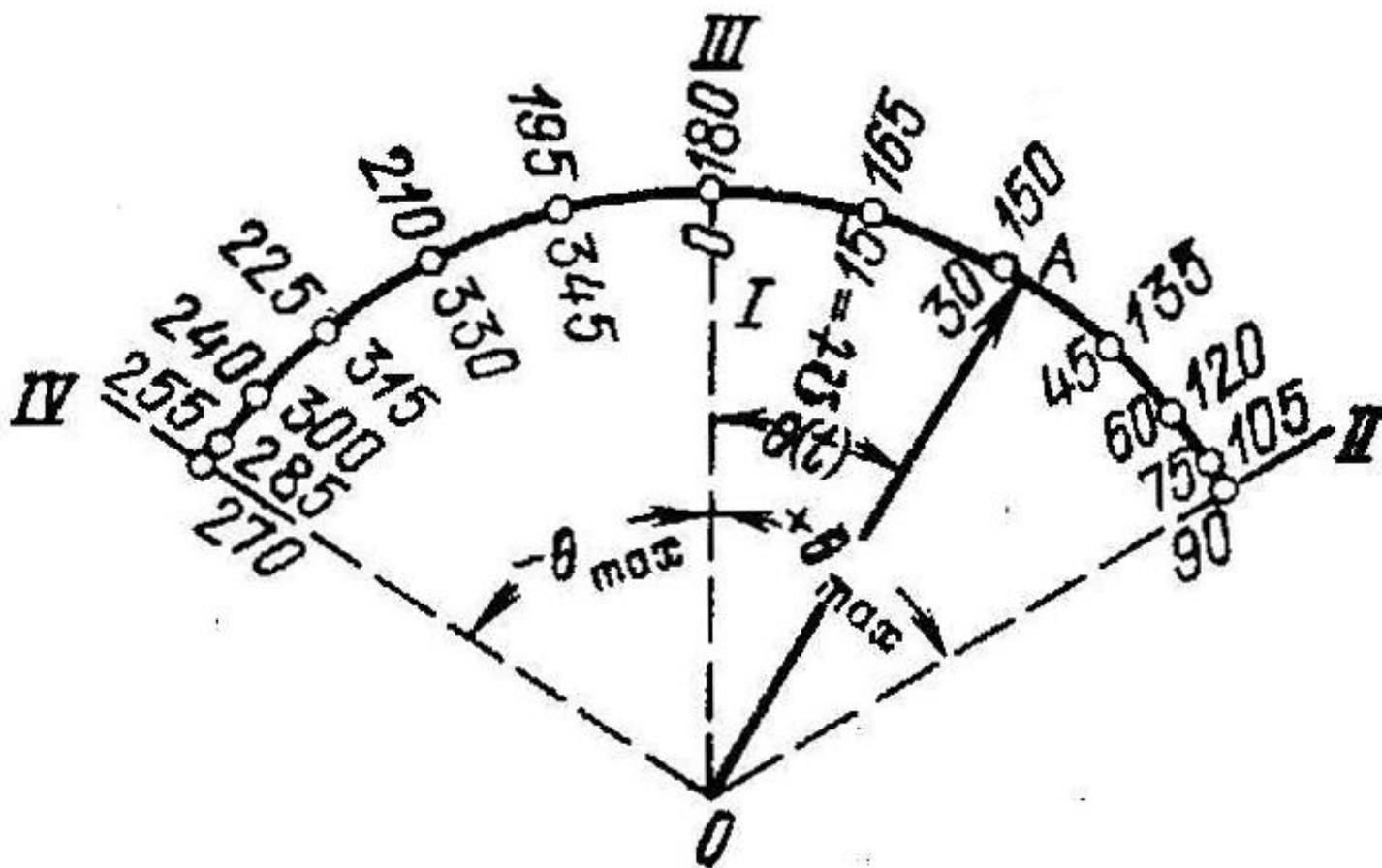
$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt},$$

так что

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau + \text{const.}$$


$$\Delta\psi_H = kS_{\min} \quad \Delta\psi_B = kS_{\max}$$

Представление амплитуды УМК
в виде качающегося вектора



Виды угловой модуляции.

Частотная модуляция

При частотной модуляции сигнала (ЧМ) между величинами $s(t)$ и $\omega(t)$ имеется связь вида

$$\omega(t) = \omega_0 + ks(t).$$

Поэтому

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right].$$

Параметрами ЧМ-сигнала общего вида в соответствии являются *девиация частоты вверх*

$$\Delta\omega_{\text{в}} = ks_{\text{max}}$$

и девиация частоты вниз

$$\Delta\omega_{\text{н}} = ks_{\text{min}}.$$

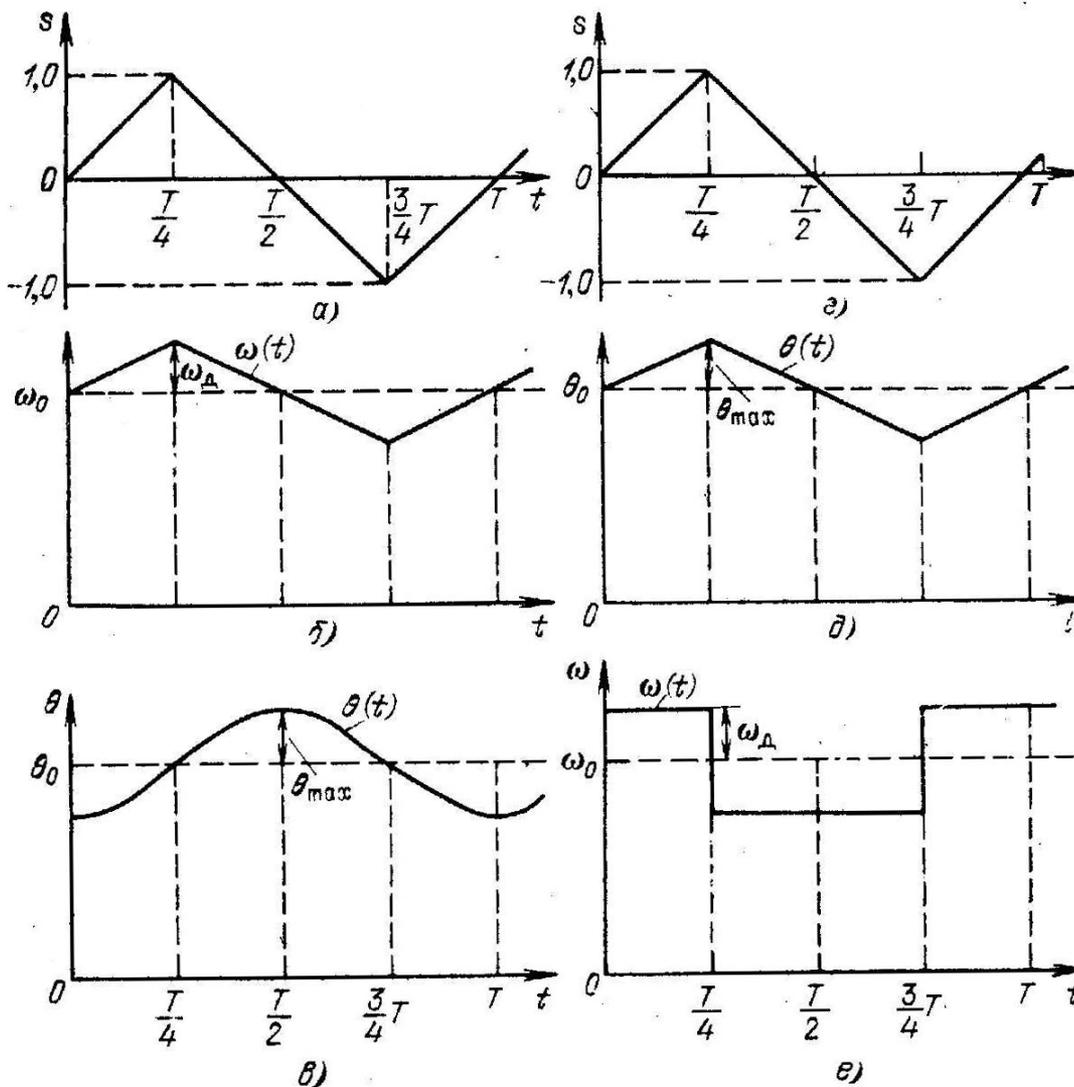
Виды угловой модуляции

Если $s(t)$ — достаточно гладкая функция, то внешне осциллограммы ФМ- и ЧМ-сигналов не отличаются. Однако имеется принципиальная разница: фазовый сдвиг между ФМ-сигналом и смодулированным колебанием пропорционален $s(t)$, в то время как для ЧМ-сигнала этот сдвиг пропорционален интегралу от передаваемого сообщения. Например, если $s(t) = U_0 \cos(\Omega t)$, то сигналы с угловой модуляцией будут различаться только количественными параметрами.

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos [\omega_0 t + k s(t)]$$

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right].$$

Частота и фаза при пилообразном законе модуляции



$$\omega(t) = \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \theta_{\max} \sin \Omega t + \theta_0) = \omega_0 + \theta_{\max} \Omega \cos \Omega t$$

Однотональные сигналы с угловой модуляцией

Анализ ФМ- и ЧМ-сигналов с математической точки зрения гораздо сложнее, чем исследование АМ-колебаний. Поэтому основное внимание будет уделено простейшим однотональным сигналам.

В случае однотонального ЧМ-сигнала мгновенная частота

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

где $\Delta\omega$ — девиация частоты сигнала. Полная фаза такого сигнала

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi_0) + \varphi_0,$$

где φ_0 — некоторый постоянный фазовый угол.

Величина

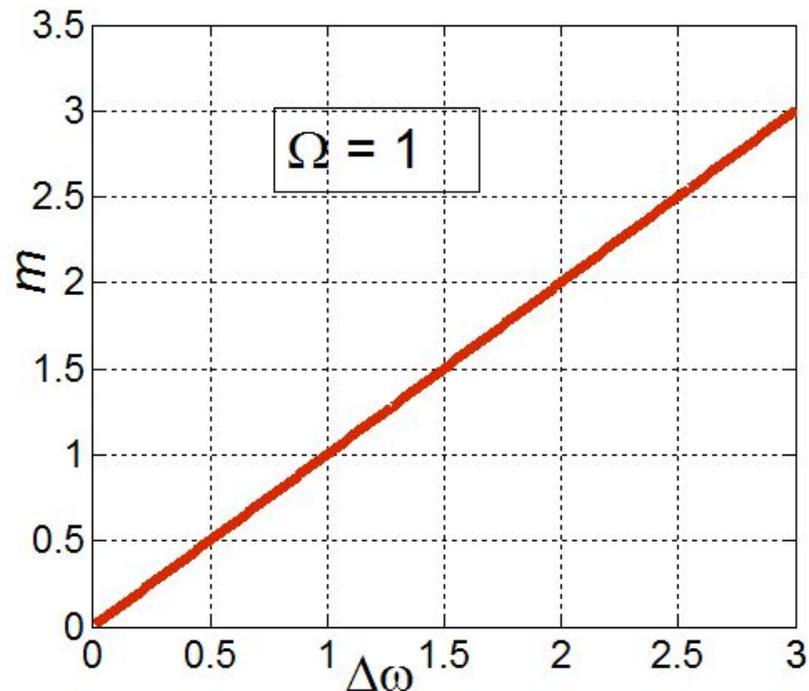
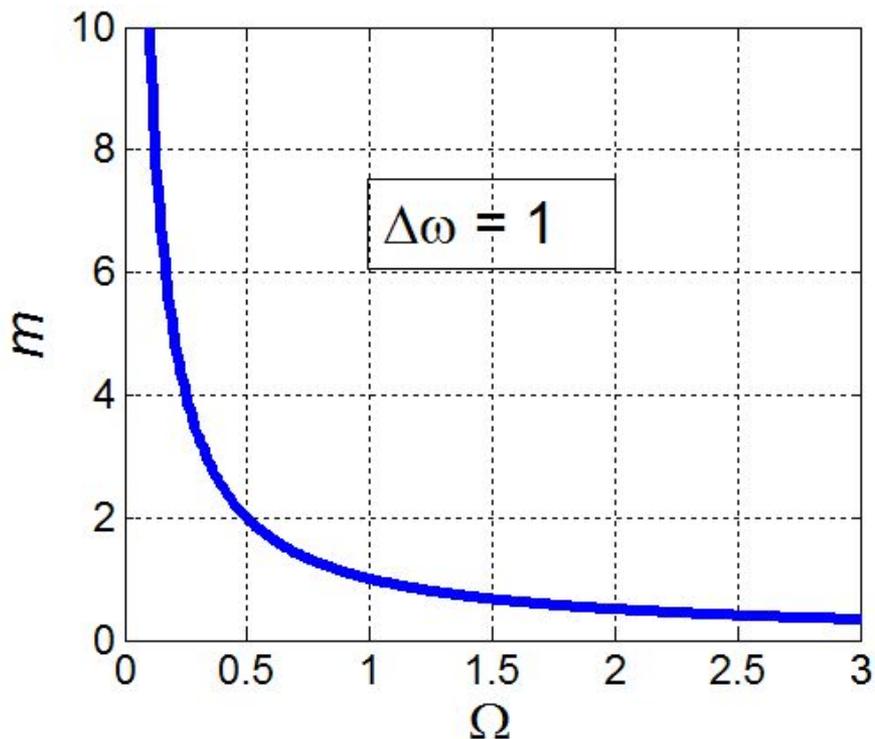
$$m = \Delta\omega / \Omega,$$

называемая **индексом однотональной угловой модуляции**, представляет собой девиацию фазы такого сигнала, выраженную в радианах.

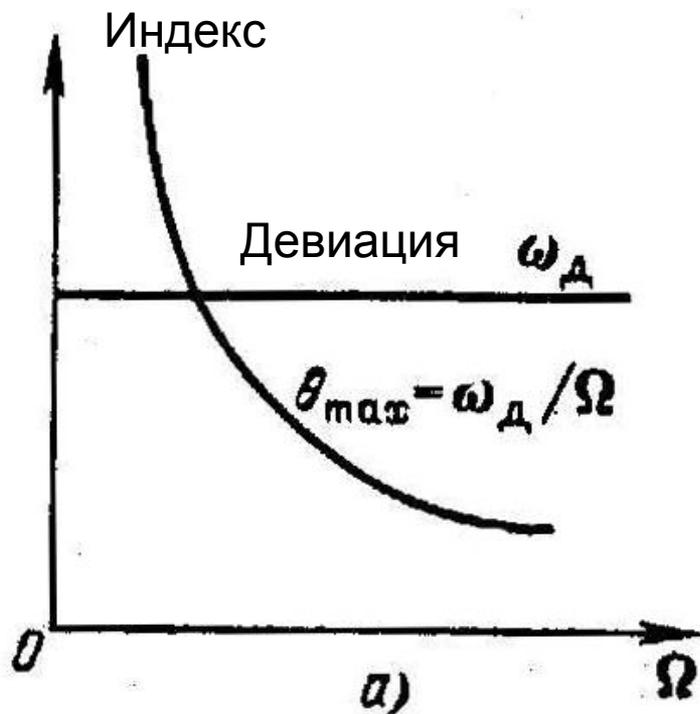
Однотональные сигналы с угловой модуляцией

При частотной модуляции девиация частоты $\Delta\omega$ пропорциональна амплитуде низкочастотного сигнала. В то же время величина $\Delta\omega$ не зависит от частоты модулирующего сигнала.

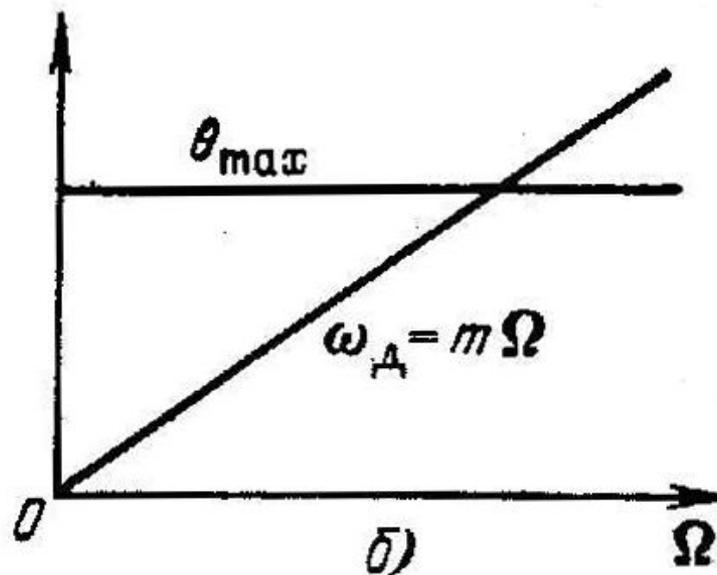
В случае фазовой модуляции ее индекс m оказывается пропорциональным амплитуде низкочастотного сигнала независимо от его частоты. Как следствие этого, девиация частоты при фазовой модуляции линейно увеличивается с ростом частоты.



Индекс и девиация однотонального УМК

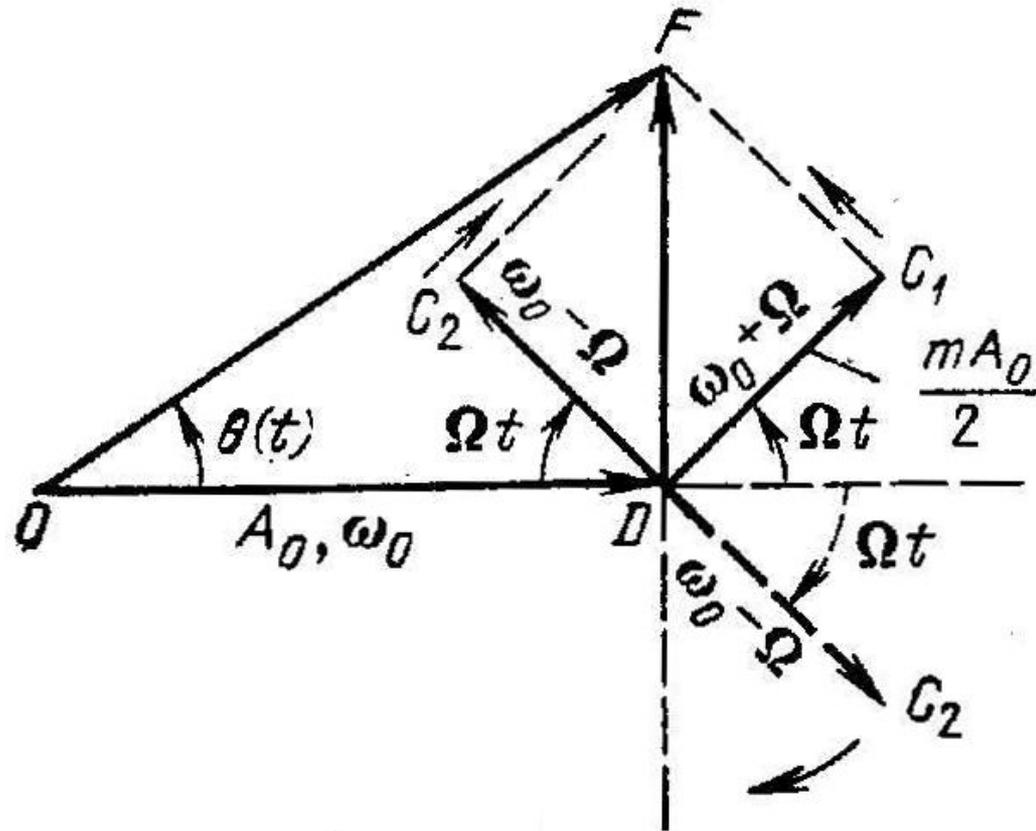


Частотная модуляция



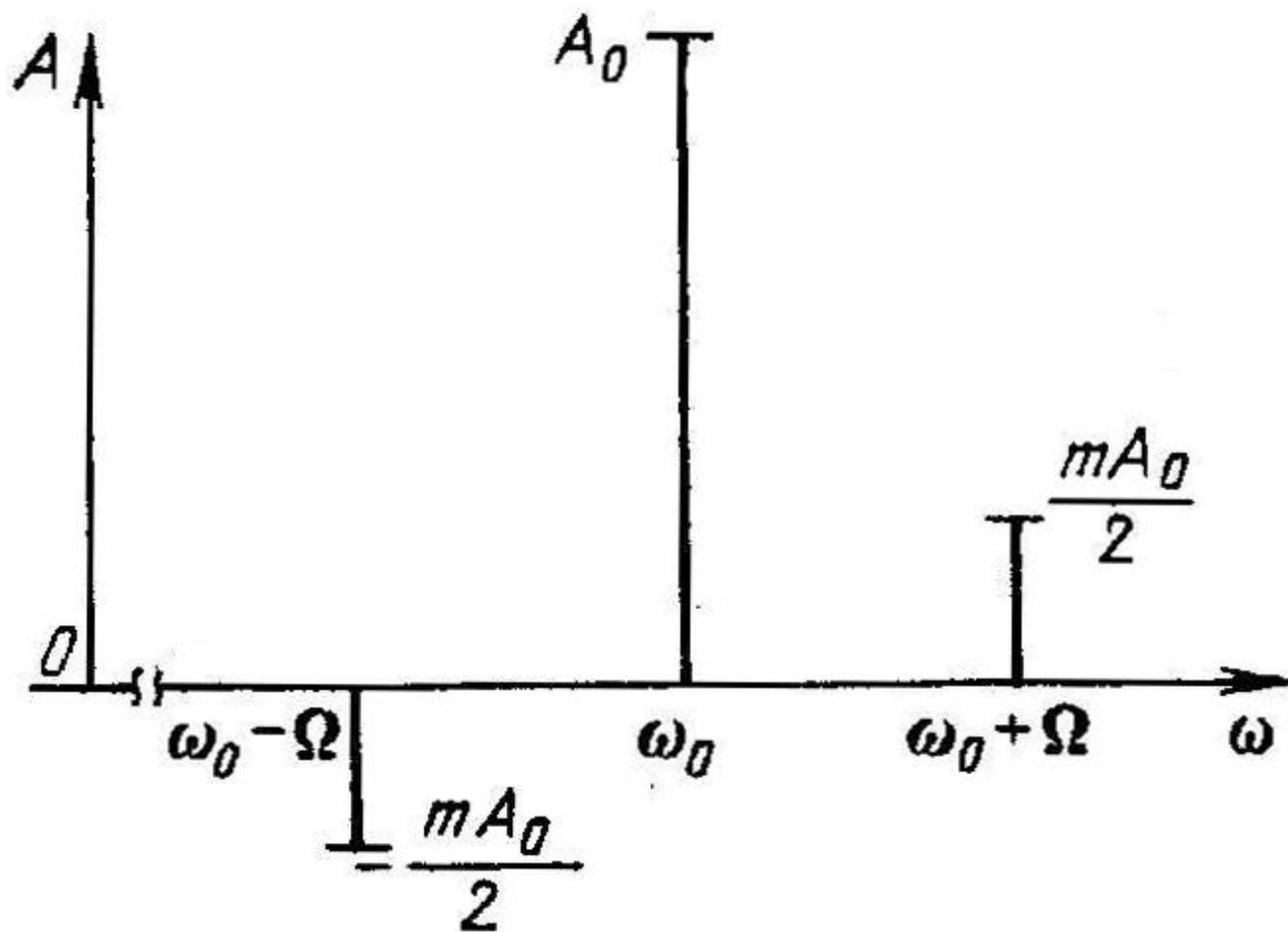
Угловая модуляция

Векторное представление однотонального УМК



$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{MA_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \theta_0 + \gamma] + \frac{MA_0}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \theta_0 - \gamma]$$

Спектр УМК при однотональной модуляции



Пример

Радиостанция, работающая в УКВ-диапазоне с несущей частотой $f_0 = 80$ МГц, излучает ФМ-сигнал, промодулированный частотой $F = 15$ кГц. Индекс модуляции $m = 12$. Найти пределы, в которых изменяется мгновенная частота сигнала.

Математическая модель сигнала имеет вид

$$u(t) = U_m \cos [2\pi \cdot 8 \cdot 10^7 t + 12 \sin (2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^4 t)].$$

Девияция частоты составит

$$\Delta f = mF = 1.8 \cdot 10^5 = 180 \text{ кГц}$$

Таким образом, при модуляции мгновенная частота сигнала изменяется в пределах

от $f_{\min} = 80 - 0.18 = 79.82 \text{ МГц}$

до $f_{\max} = 80 + 0.18 = 80.18 \text{ МГц}$

Спектральное разложение ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции

Представим ЧМ-сигнал в виде суммы гармонических колебаний, когда

$$m \ll 1$$

Для этого преобразуем фазу $\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi_0) + \varphi_0$,
 $\varphi_0 = \Phi_0 = 0$:

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = U_m \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - \\ - U_m \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Поскольку индекс угловой модуляции мал, воспользуемся приближенными равенствами

$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1; \quad \sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t.$$

поэтому

$$u(t) \approx U_m \cos \omega_0 t + \frac{mU_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{mU_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Спектральное разложение ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции

В спектре сигнала с угловой модуляцией $m \ll 1$ содержатся несущее колебание и две боковые составляющие (верхняя и нижняя) на частотах

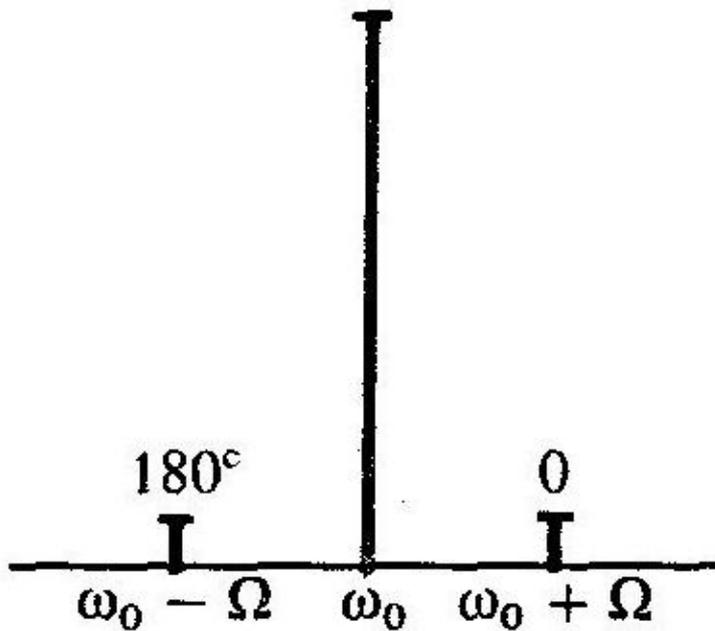
$\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ Индекс m играет здесь такую же роль, как коэффициент амплитудной модуляции M .

Однако можно обнаружить и существенное различие спектров АМ-сигнала и колебания с угловой модуляцией. В спектральной диаграмме нижнее боковое колебание имеет дополнительный фазовый сдвиг на 180° .

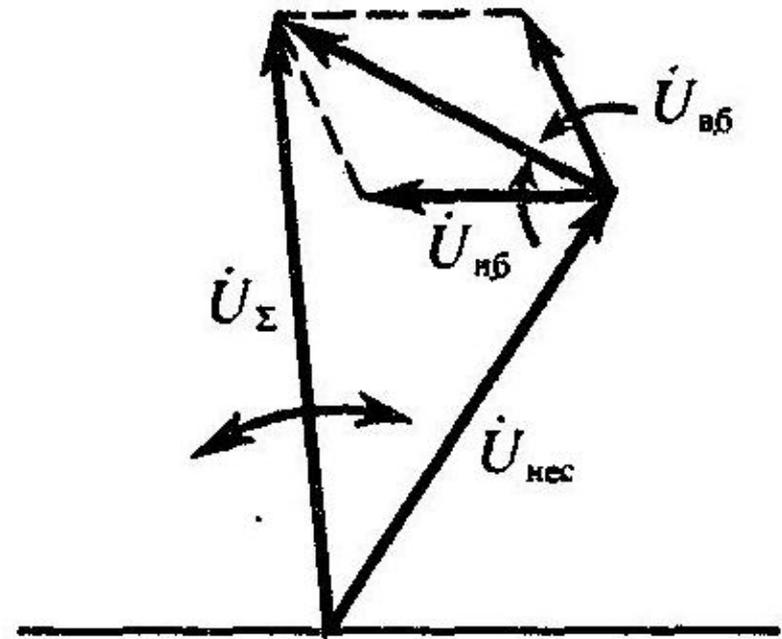
Сумма векторов, отображающих оба боковых колебания, всегда перпендикулярна вектору несущей. С течением времени вектор будет «качаться» вокруг центрального положения. Незначительные изменения длины этого вектора обусловлены приближённым характером анализа, и при очень малых m ими можно пренебречь.

Спектральное разложение ЧМ- и ФМ-сигналов при малых индексах модуляции ($m \ll 1$)

Диаграммы сигнала с угловой модуляцией при $m \ll 1$



Спектральная



Векторная

Более точный вид спектрального состава сигналов с угловой модуляцией

Уточним полученный результат, воспользовавшись двумя членами ряда в разложении гармонических функций малого аргумента:

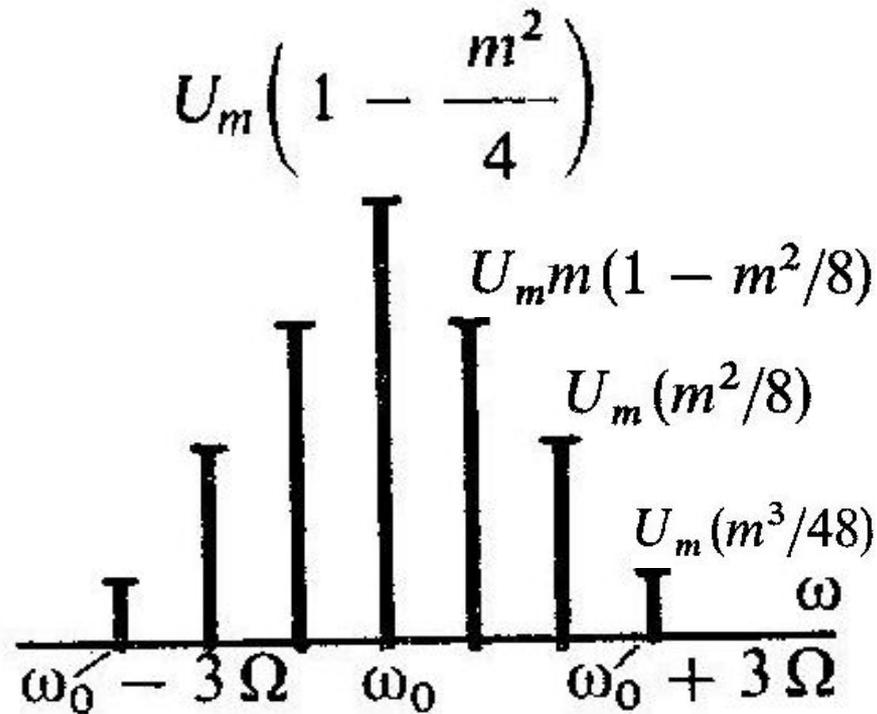
$$u(t) \approx U_m \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \sin^2 \Omega t \right) \cos \omega_0 t - \\ - U_m \left(m \sin \Omega t - \frac{1}{6} m^3 \sin^3 \Omega t \right) \sin \omega_0 t.$$

Несложные тригонометрические преобразования приводят к результату:

$$u(t) = U_m \left(1 - \frac{m^2}{4} \right) \cos \omega_0 t + \\ + U_m m \left(1 - \frac{m^2}{8} \right) \left[\cos (\omega_0 + \Omega) t - \cos (\omega_0 - \Omega) t \right] + \\ + U_m \left(\frac{m^2}{8} \right) \left[\cos (\omega_0 + 2\Omega) t + \cos (\omega_0 - 2\Omega) t \right] + \\ + U_m \left(\frac{m^3}{48} \right) \left[\cos (\omega_0 + 3\Omega) t - \cos (\omega_0 - 3\Omega) t \right].$$

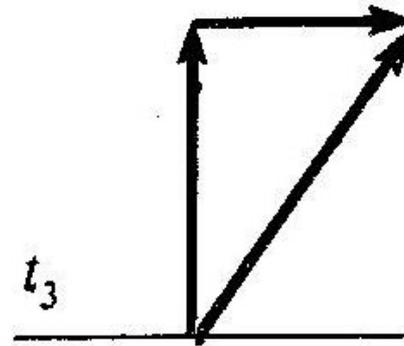
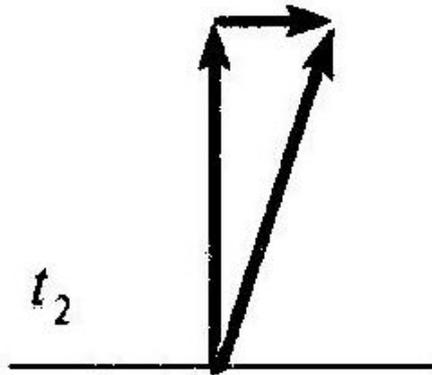
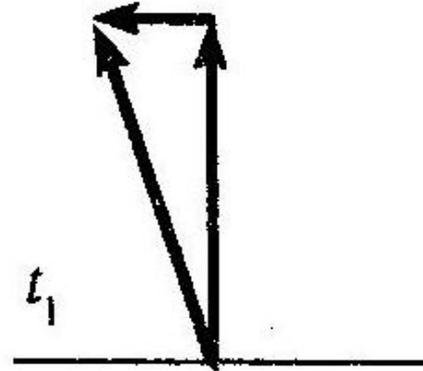
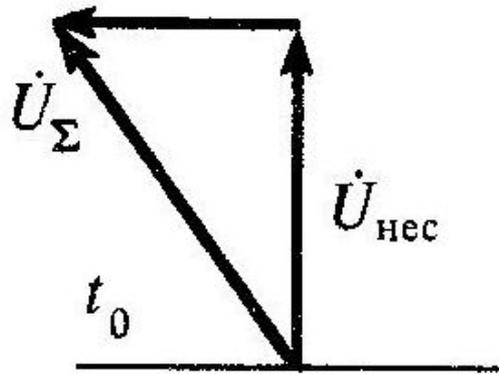
В спектре сигнала с однотоновой угловой модуляцией, помимо известных составляющих, содержатся также верхние и нижние боковые колебания, соответствующие *гармоникам частоты модуляции*. Поэтому спектр такого сигнала сложнее спектра аналогичного АМ-сигнала.

Более точный вид спектральной диаграммы



$$\begin{aligned}
 u(t) = & U_m \left(1 - \frac{m^2}{4}\right) \cos \omega_0 t + \\
 & + U_m m \left(1 - \frac{m^2}{8}\right) [\cos (\omega_0 + \Omega) t - \cos (\omega_0 - \Omega) t] + \\
 & + U_m \left(\frac{m^2}{8}\right) [\cos (\omega_0 + 2\Omega) t + \cos (\omega_0 - 2\Omega) t] + \\
 & + U_m \left(\frac{m^3}{48}\right) [\cos (\omega_0 + 3\Omega) t - \cos (\omega_0 - 3\Omega) t].
 \end{aligned}$$

Текущие построения векторной диаграммы



С ростом m амплитуда боковых составляющих увеличивается, в то время как амплитуда несущего колебания уменьшается пропорционально множителю $(1 - m^2/4)$

Спектр сигнала с угловой модуляцией при произвольном значении индекса m

Для простейшего случая однотонового ЧМ- или ФМ-сигнала можно найти общее выражение спектра, справедливое при любом значении индекса модуляции m . Поскольку экспонента $\exp(jm \sin x)$ с мнимым показателем специального вида, периодическая на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$, разлагается в комплексный ряд Фурье:

$$e^{jm \sin x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jkx},$$

где m — любое вещественное число; $J_k(m)$ — функция Бесселя k -го индекса от аргумента m .

Подставляя $x = \Omega t$, перепишем последнюю из указанных формул так:

$$u(t) = U_m \operatorname{Re} (e^{j\omega_0 t} e^{jm \sin \Omega t}) = U_m \operatorname{Re} (e^{j\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jk\Omega t}).$$

Спектр сигнала с угловой модуляцией при произвольном значении индекса m

Отсюда получаем следующую математическую модель ЧМ-или ФМ-сигнала с любым значением индекса модуляции:

$$u(t) = U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t.$$

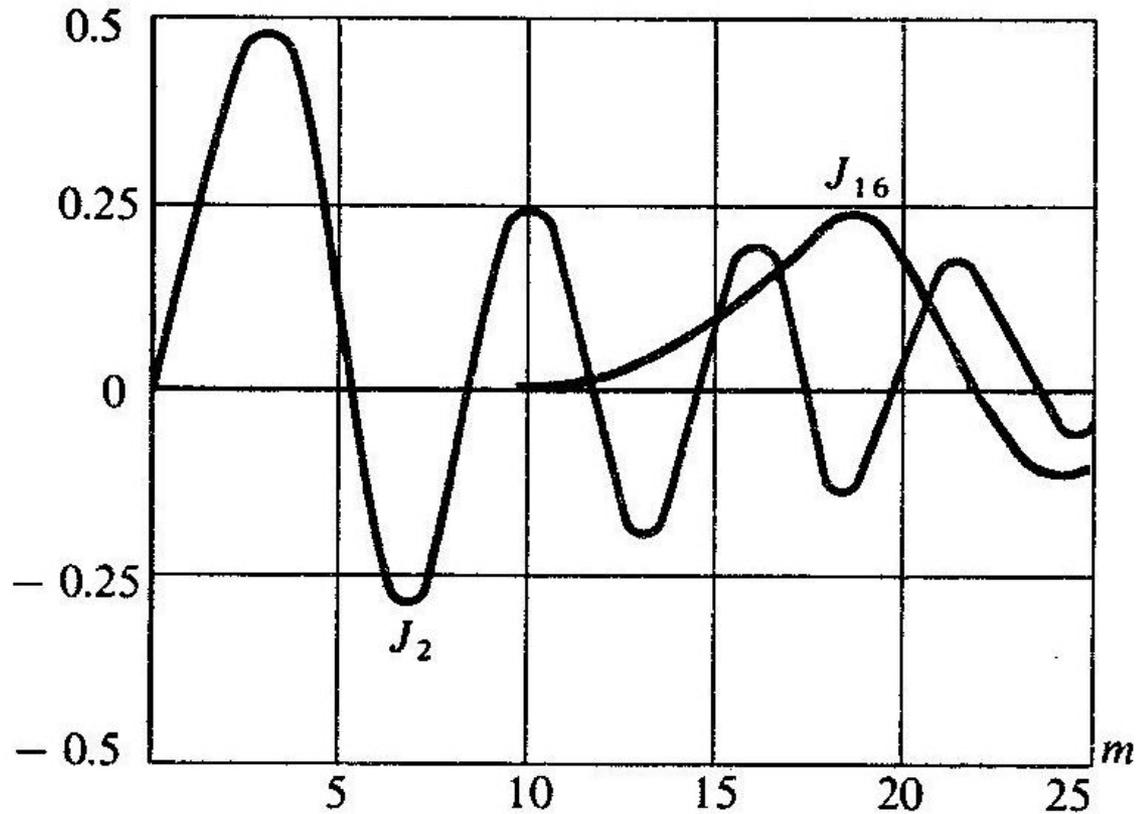
где m — любое вещественное число; $J_k(m)$ — функция Бесселя k -го индекса от аргумента m .

Спектр однотонового сигнала с угловой модуляцией в общем случае содержит бесконечное число составляющих, частоты которых равны

$$\omega_0 \pm k\Omega,$$

а амплитуды этих составляющих пропорциональны значениям $J_k(m)$

Графики функций Бесселя



Функции с положительными и отрицательными индексами связаны между собой:

$$J_{-k}(m) = (-1)^k J_k(m).$$

Начальные фазы боковых колебаний с k -ми гармониками совпадают, если k – четное число, и отличаются на 180° , если k – нечетное число.

Ширина спектра сигнала с угловой модуляцией при произвольном значении индекса m

Можно заметить следующее: *чем больше индекс функции Бесселя, тем протяженнее область аргументов, при которых эта функция очень мала.*

Важно отметить, что с ростом индекса модуляции расширяется полоса частот, занимаемая сигналом. Обычно полагают, что допустимо пренебречь всеми спектральными составляющими с номерами $k > m + 1$.

Отсюда следует оценка практической ширины спектра сигнала с угловой модуляцией:

$$\Pi_{\text{практ}} = 2(m + 1)\Omega.$$

Как правило, реальные ЧМ- и ФМ-сигналы характеризуются условием $m > 1$. В этом случае

$$\Pi_{\text{практ}} \approx 2m\Omega = 2\Delta\omega.$$

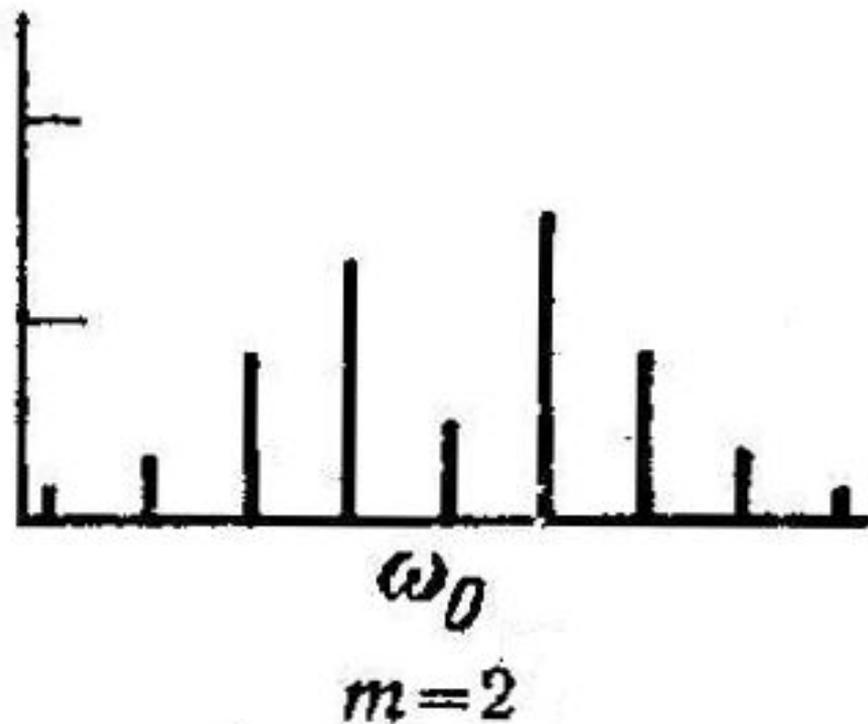
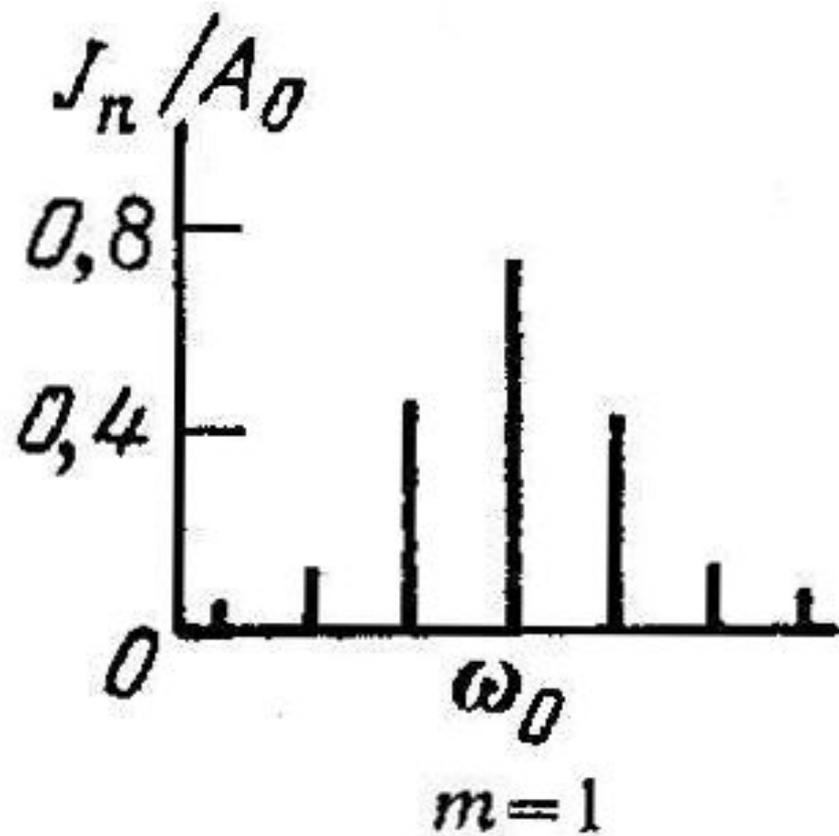
Таким образом, сигнал с угловой модуляцией занимает полосу частот, приблизительно равную удвоенной девиации частоты.

Значения функции Бесселя

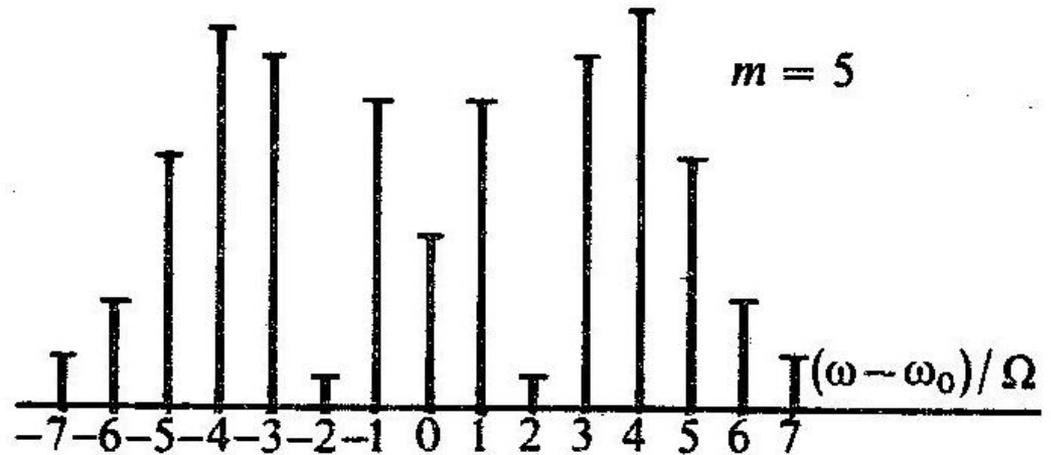
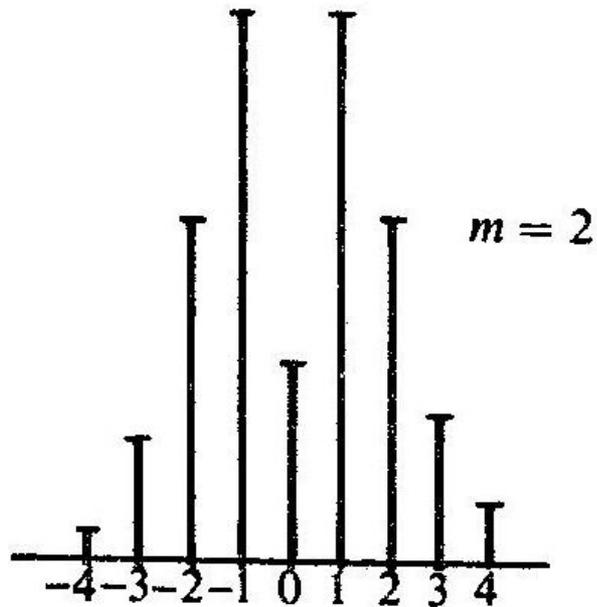
$k \backslash m$	1	2	3	4	5
0	0.765	0.224	- 0.260	- 0.397	- 0.178
1	0.440	0.577	0.339	- 0.066	- 0.328
2	0.115	0.353	0.486	0.364	0.047
3	0.020	0.129	0.309	0.430	0.365
4	0.002	0.034	0.132	0.281	0.391
5	$2 \cdot 10^{-4}$	0.007	0.043	0.132	0.261
6	$2 \cdot 10^{-5}$	0.001	0.011	0.049	0.131
7	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-4}$	0.003	0.015	0.053

Здесь выделена область, в которой функции Бесселя становятся пренебрежимо малыми.

Спектры колебаний при угловой модуляции

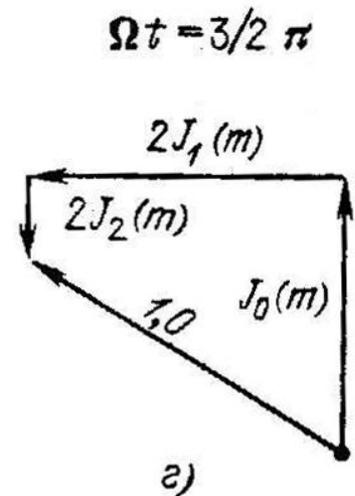
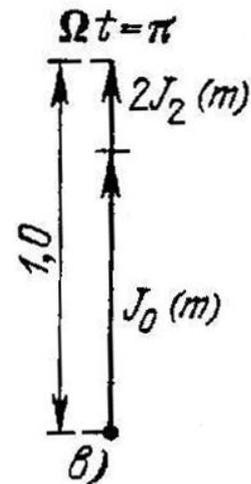
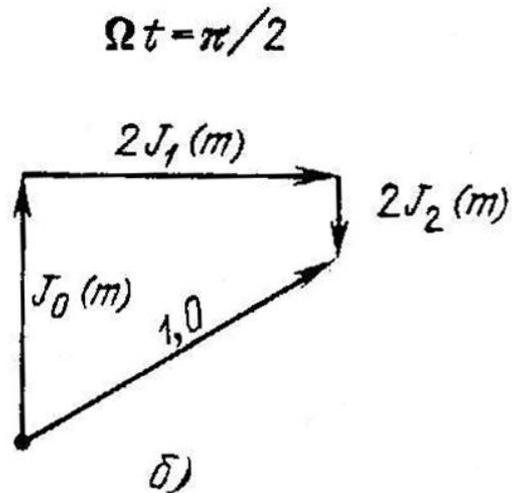
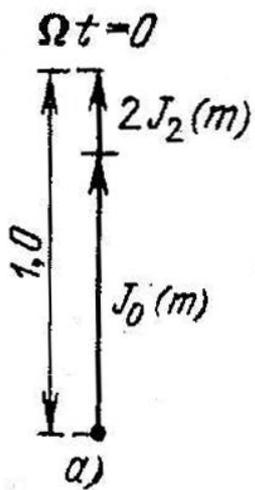


Спектры сигналов с угловой модуляцией



Спектральные диаграммы сигнала с угловой модуляцией при двух значениях индекса m (амплитуды представлены в относительном масштабе)

Фазы колебаний угловой модуляции в различные моменты времени



Мощность в спектре угловых колебаний

Рост индекса модуляции приводит к перераспределению мощности в спектре модулированного сигнала. В частности, если значение m выбрано таким, что $J_0(m) = 0$, то несущее колебание на частоте ω_0 в спектре будет отсутствовать. Значения m , являющиеся корнями данного уравнения, образуют бесконечную возрастающую последовательность чисел m_v ($v = 1, 2, \dots$ — номер корня).

Корни уравнения $J_0(m) = 0$

v	1	2	3	4	5	6	7
m_v	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931	18.071	21.212

Пример

Однотональный ЧМ-сигнал имеет девиацию частоты $\Delta f = 240$ кГц.
Найти частоты модуляции F , при которых несущее колебание в спектре сигнала будет отсутствовать.

Индекс модуляции $m = \Delta\omega/\Omega = \Delta f/F$, т. е. частота модуляции

$F = \Delta f/m$. Обращаясь к таблице, находим последовательность частот, удовлетворяющую поставленному условию:

$$F_1 = 240/2.405 = 99.792 \text{ кГц},$$

$$F_2 = 240/5.520 = 43.474 \text{ кГц},$$

$$F_3 = 240/8.654 = 27.732 \text{ кГц}$$

и т. д.

Угловая модуляция при двух гармонических модулирующих сигналах

Рассмотрим для простоты сигнал, промодулированный по частоте лишь двумя низкими частотами:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) = \\ &= U_m \cos(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \cos \omega_0 t - \\ &\quad - U_m \sin(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Положим, что парциальные индексы модуляции m_1 и m_2 малы настолько, что можно пользоваться приближенными выражениями для косинуса и синуса:

$$\cos x \approx 1 - x^2/2; \quad \sin x \approx x.$$

Выполнив несколько громоздкие, но вполне элементарные тригонометрические преобразования, представим исходный сигнал

Угловая модуляция при двух гармонических модулирующих сигналах

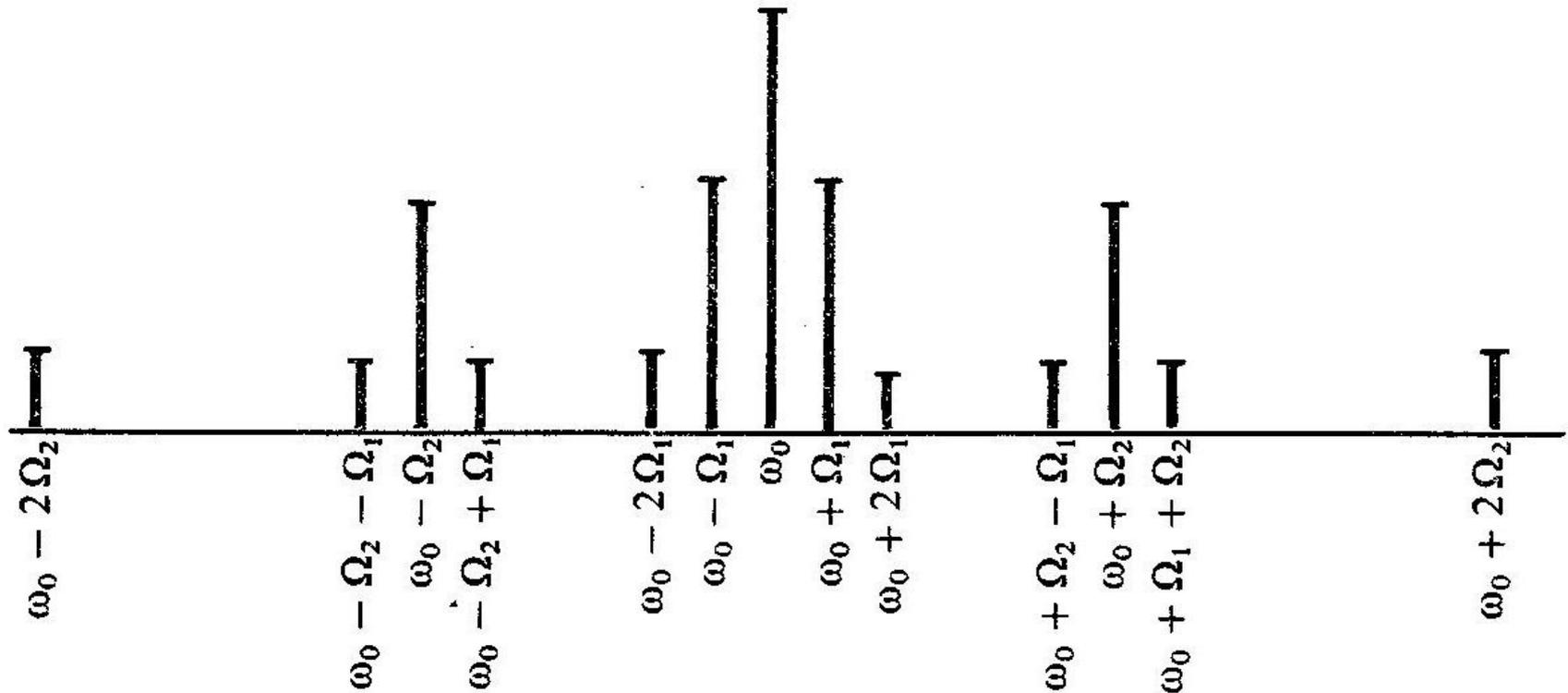
$$\begin{aligned} u(t) = & U_m [1 - (m_1^2 + m_2^2)/4] \cos \omega_0 t + 1/2 m_1 U_m [\cos (\omega_0 + \Omega_1) t - \\ & - \cos (\omega_0 - \Omega_1) t] + 1/2 m_2 U_m [\cos (\omega_0 + \Omega_2) t - \\ & - \cos (\omega_0 - \Omega_2) t] + 1/8 m_1^2 U_m [\cos (\omega_0 + 2\Omega_1) t + \\ & + \cos (\omega_0 - 2\Omega_1) t] + 1/8 m_2^2 U_m [\cos (\omega_0 + 2\Omega_2) t + \\ & + \cos (\omega_0 - 2\Omega_2) t] + 1/2 m_1 m_2 U_m [\cos (\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2) t + \\ & + \cos (\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2) t - \cos (\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2) t - \\ & - \cos (\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2) t]. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что в спектре рассматриваемого сигнала, помимо частот $\omega_0 \pm \Omega_1$, $\omega_0 \pm \Omega_2$, $\omega_0 \pm 2\Omega_1$, $\omega_0 \pm 2\Omega_2$, присутствуют так называемые **комбинационные частоты** с четырьмя возможными знаками

$$\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$$

Амплитуды этих составляющих зависят от произведения парциальных индексов модуляции.

Спектр ЧМ-модуляции при двух гармонических модулирующих сигналах



Спектральная диаграмма сигнала с двухтональной угловой модуляцией при малых значениях парциальных индексов модуляции m_1 и m_2 .

Амплитуды составляющих диаграммы зависят от произведения парциальных индексов модуляции m_1 и m_2 .

Спектр ЧМ-модуляции в общем случае

Когда угловая модуляция осуществляется группой низкочастотных колебаний с частотами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и парциальными индексами m_1, m_2, \dots, m_N соответственно, спектральное представление сигнала таково:

$$u(t) = U_m \sum_{k_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N = -\infty}^{\infty} J_{k_1}(m_1) J_{k_2}(m_2) \dots J_{k_N}(m_N) \times \\ \times \cos(\omega_0 + k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \dots + k_N\Omega_N)t.$$

Таким образом, при прочих равных условиях спектр колебания со сложной угловой модуляцией гораздо богаче спектра аналогичного АМ-сигнала. Подчеркивая взаимодействие отдельных составляющих модулирующего сигнала, угловую модуляцию, в отличие от амплитудной, иногда называют **модуляцией нелинейного типа**.

Благодарю за внимание!