

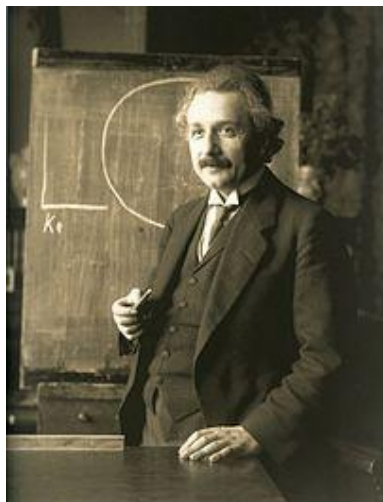
Джозайя Уиллард Гиббс
(1839-1903)

ТЕМА 4

Статистика электронного газа



Людвиг Больцман
(1844-1906)



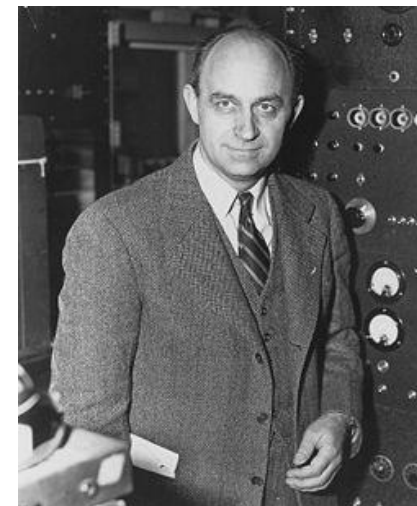
Альберт Эйнштейн
(1879 (1879-1955))



Шатьендранат Бóзе
1894 1894- 1974



Поль Дирак
(19021902 — 1
984)



Энрико Ферми
(19011901- 1954
)

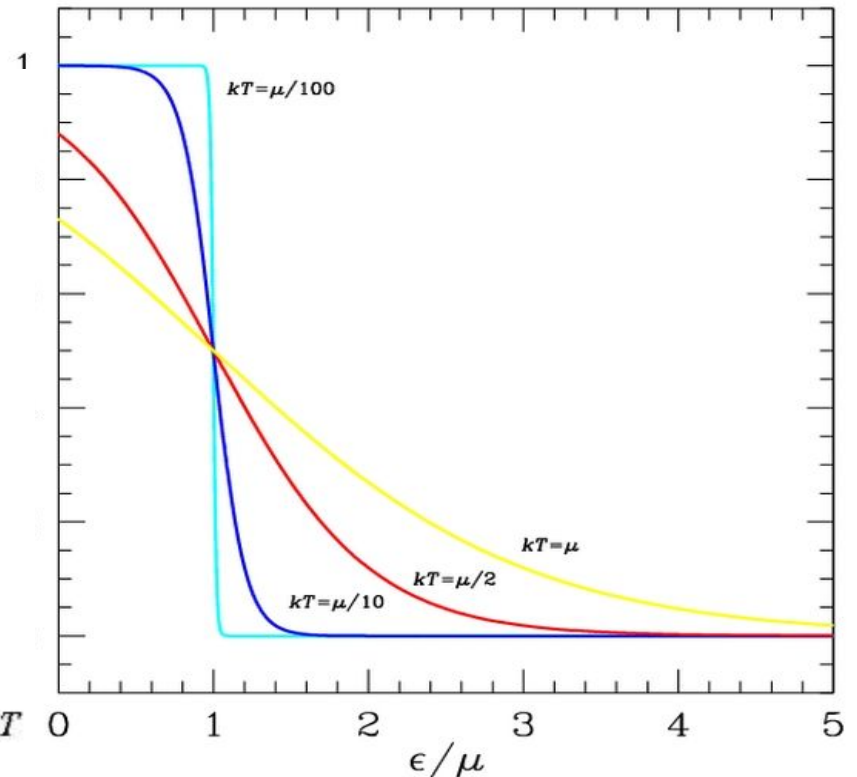
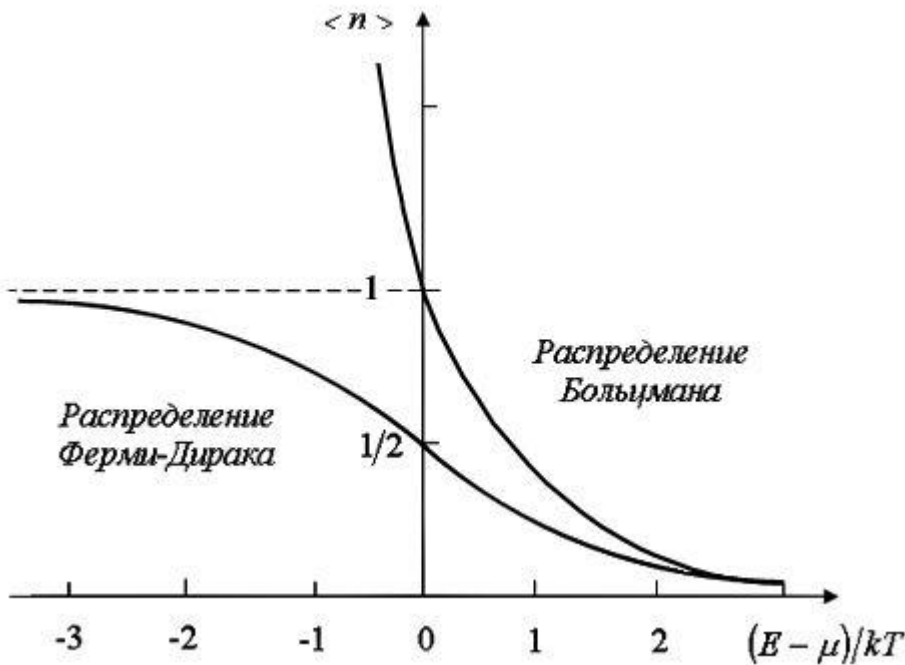
Статистика Ферми — Дирака

квантовые частицы с полуцелым спином- электроны

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) + 1},$$

$$F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - E_F}{kT}\right) + 1}.$$

n_i — среднее число частиц в состоянии i ,
 ε_i — энергия состояния i ,
 g_i — кратность вырождения состояния i ,
 μ — химический потенциал (равен энергии Ферми E_F при абсолютном нуле температуры),
 k — постоянная Больцмана,
 T — абсолютная температура

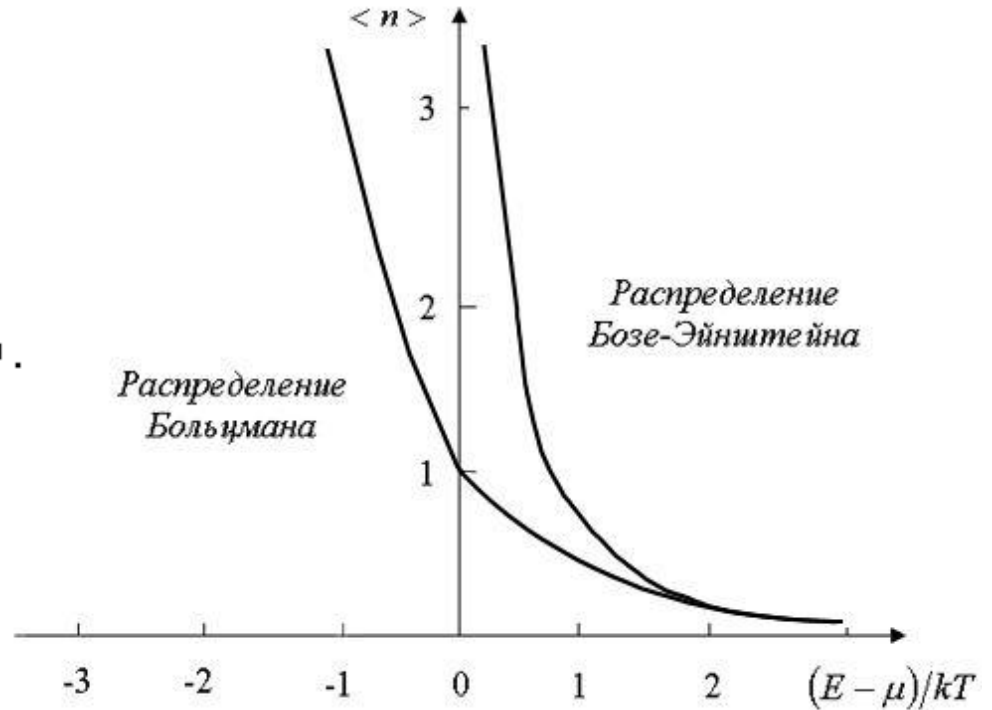


Статистика Бозе-Эйнштейна квантовые частицы с целым спином- фононы

$$\langle n \rangle_{\text{Б-Э}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) - 1}.$$

Для фононного (фотонного) газа при $\mu = 0$.
получаем статистику Планка

$$\langle n \rangle_{\text{Пл}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$



При высоких температурах все статистики переходят в классическую статистику Больцмана (закон равного распределения по степеням свободы):

$$(E - \mu)/kT \gg 1; \quad \exp\left[\frac{(E - \mu)}{kT}\right] \gg 1; \quad \langle n \rangle_{\text{Бол}} \approx \exp\left(\frac{-E + \mu}{kT}\right) = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right),$$

Вырожденный электронный газ

Газ, состоящий из квантовых частиц, оказывается вырожденным, если среднее расстояние между частицами $\langle a \rangle$ становится меньше или сравнимым с дебройлевской длиной волны частицы λ_{DB} , при этом свойства газа существенно отличаются от свойств классического идеального газа из-за неразличимости одинаковых частиц в квантовой механике.

Температурой вырождения называется температура, ниже которой проявляются квантовые свойства газа, обусловленные тождественностью его частиц.

Для газа, состоящего из ферми-частиц, температурой вырождения является температура Ферми. Температура вырождения тем больше, чем меньше масса частиц и чем больше их концентрация. Электронный газ в металлах оказывается вырожденным при всех температурах, при которых металл остается в твердом состоянии.

Критерий вырождения электронного газа:

$$E_F > k_A T \quad E_F = k_A T_F \quad T_F > T$$

Для газа, состоящего из бозе-частиц, температура вырождения определяется как температура, ниже которой происходит бозе-конденсация, т.е. переход заметной доли частиц в состояние с нулевой энергией. Именно с бозе-конденсацией связаны такие интересные физические явления, как сверхтекучесть жидкого гелия, т.е. его способность протекать через тонкие щели и капилляры без какой-либо вязкости, и сверхпроводимость некоторых металлов и сплавов

Плотность состояний

Размеры **ячейки фазового пространства**, приходящейся на **одно состояние**, определяются ограничениями на значения координаты и импульса, которые накладывают **соотношения неопределенностей**, поэтому:

объем фазового пространства, приходящийся на одно квантовое состояние, равен

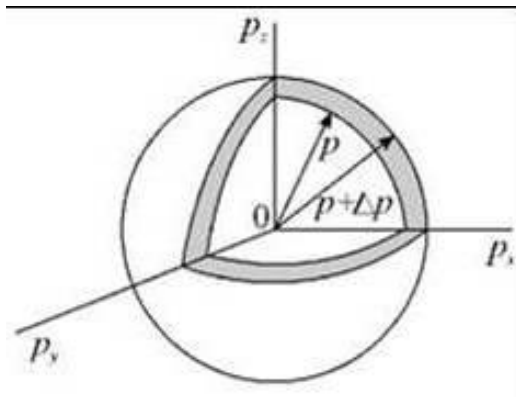
$$\tau_{\min} = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \cdot \Delta x \Delta y \Delta z = (\Delta p)^3 V = (2\pi\hbar)^3$$

где: $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z, x, y, z$ - размеры ячейки в фазовом пространстве, приходящейся на одно состояние.

Таким образом, **в фазовом пространстве на одно состояние приходится объем, равный** .

$$\tau_{\min} = (2\pi\hbar)^3$$

Внутри тонкого сферического слоя радиусом p и толщиной dp число квантовых состояний будет равно



$$d\tilde{A} = \frac{(dp)^3 \cdot (dx)^3}{\tau_{\min}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (dp)^3 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 4\pi \cdot p^2 dp$$

Плотность состояний в интервале $p \div p+dp$

$$g(p) = \frac{d\tilde{A}}{dp} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p^2$$

В k -пространстве ($p = \hbar k$)

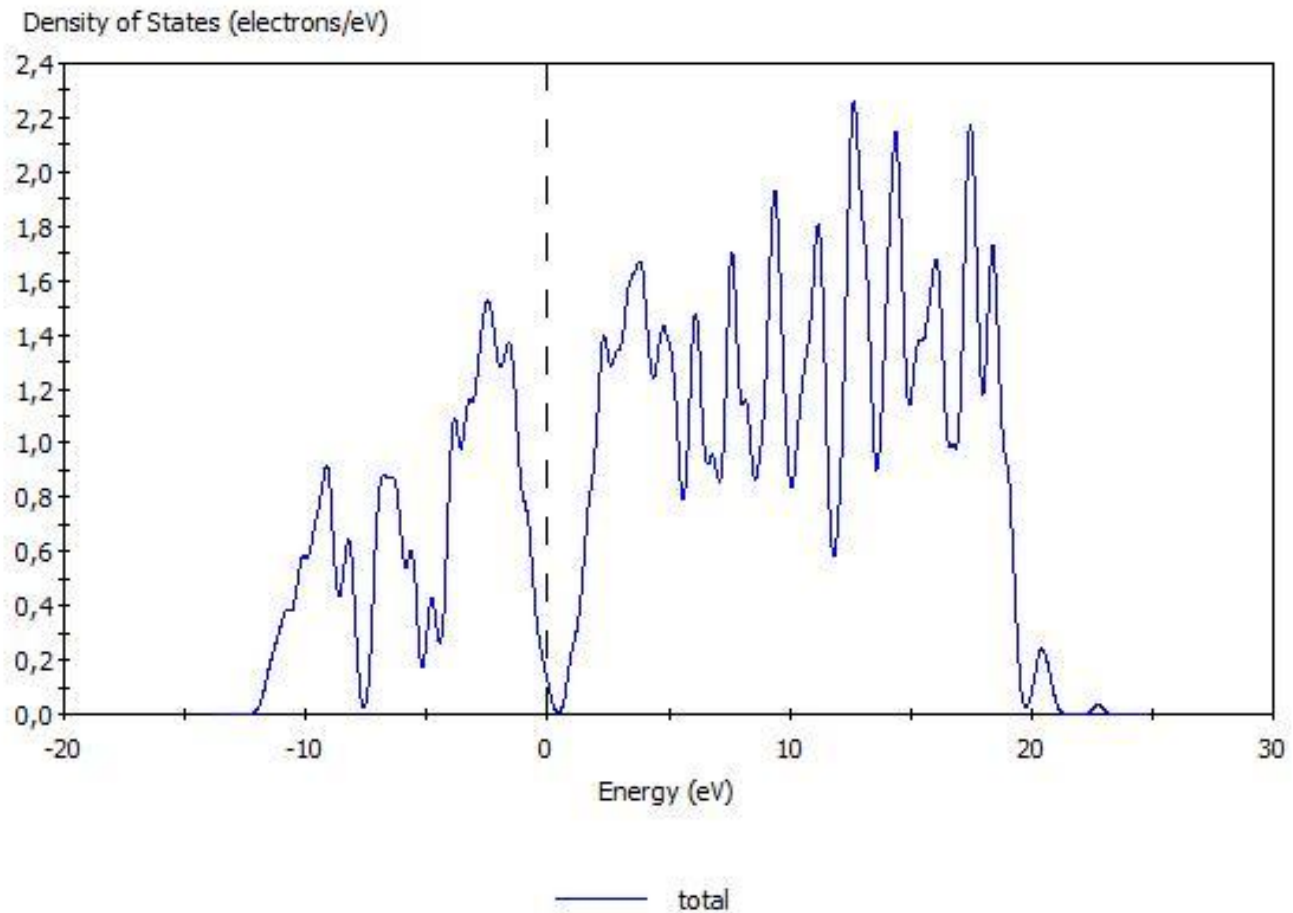
$$g(k) = \frac{V}{(2\pi)^2} \cdot k^2$$

Плотность состояний в интервале $E \div E+dE$

$$g(E) = (2S + 1) \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \cdot E^{1/2}$$

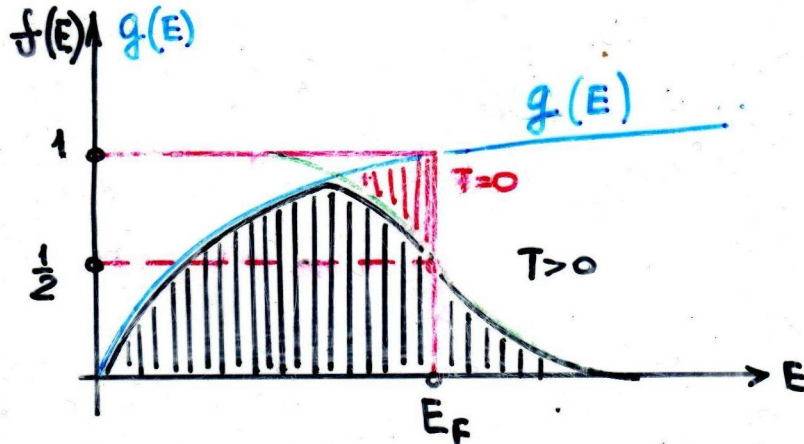
Плотность состояний Si

CASTEP Density of States



Связь концентрации электронов с энергией Ферми.

Металлы. Фермиевские параметры



плотность состояний $g(E)$

$$g(E) = \frac{V m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} E^{1/2}$$

$f(E)g(E)$ - число заполненных состояний

$$n(E) = \frac{N(E)}{V} = \frac{1}{V} \int_0^E f(E)g(E)dE = 2 \int_0^E \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1} \cdot \frac{m^2}{\sqrt{2} \cdot \pi^2 \hbar^3} E^{1/2} \cdot dE$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

$$p_F = \hbar k_F = m v_F$$

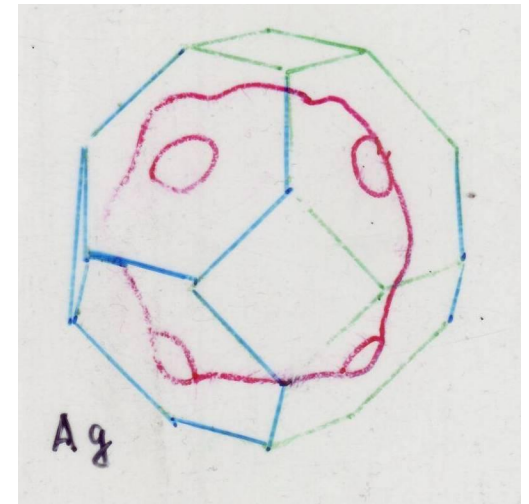
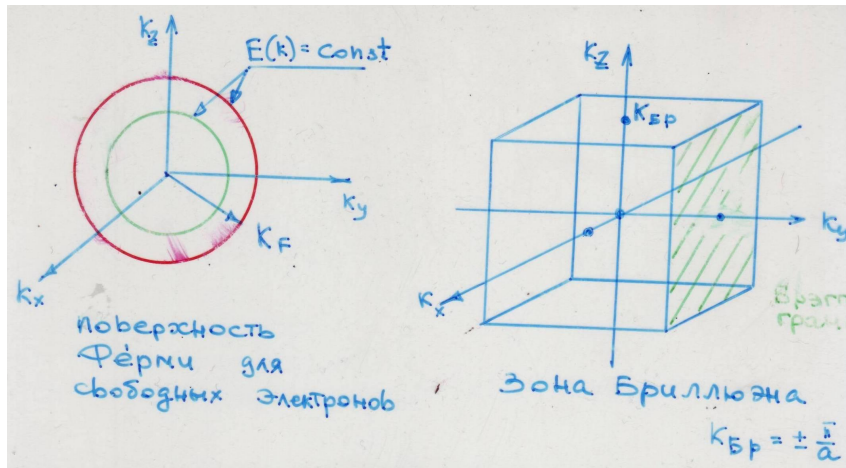
$$v_F = \frac{\hbar}{m} k_F = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3}$$

$$E_F = k_A T_F$$

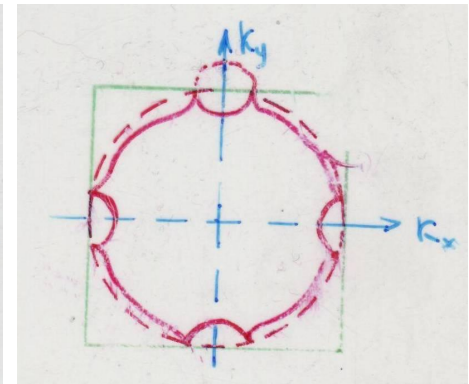
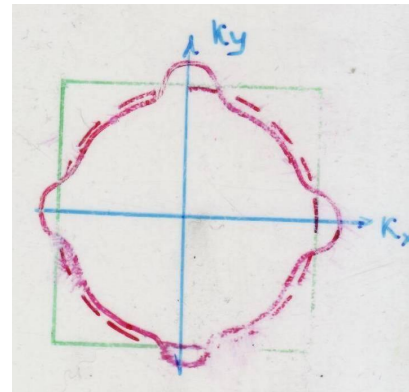
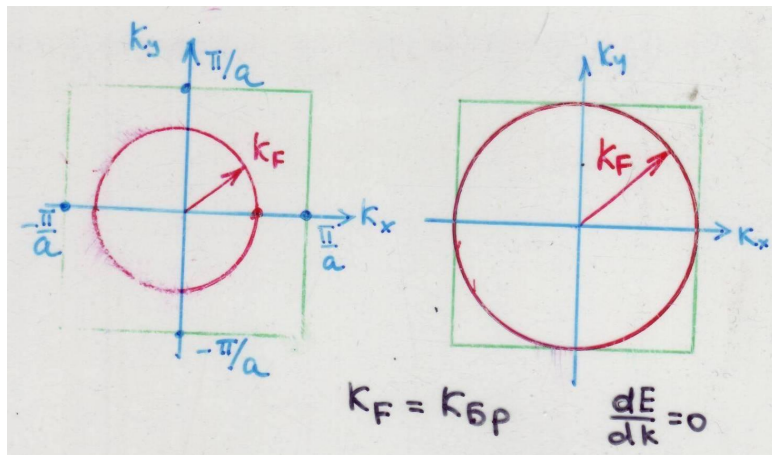
Энергии Ферми некоторых металлов

| Металл | $E_f(0)$, эВ | T_F , К | v_F , км/с |
|--------|---------------|-----------|--------------|
| Li | 4,72 | 55000 | 1,31 |
| Na | 3,12 | 37000 | 1,07 |
| K | 2,14 | 24000 | 0,8 |
| Rb | 1,82 | 21000 | 0,75 |
| Cs | 1,53 | 18000 | 0,75 |
| Cu | 7,04 | 82000 | 1,5 |
| Ag | 5,51 | 64000 | 1,40 |
| Au | 5,51 | 64000 | 1,40 |

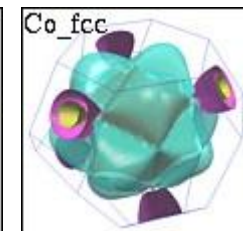
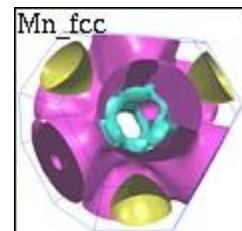
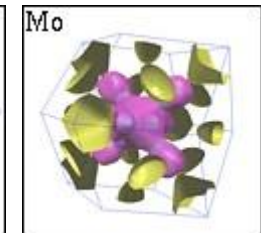
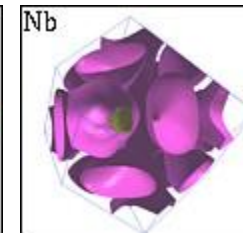
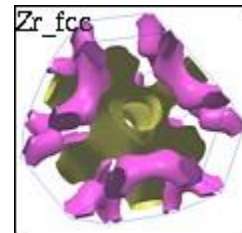
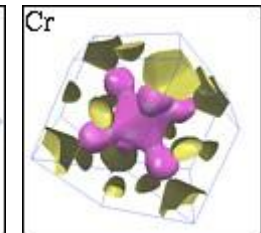
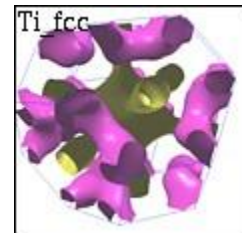
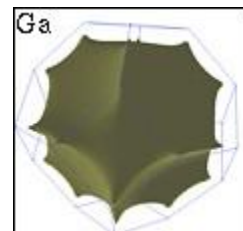
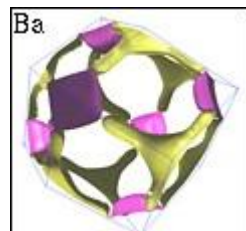
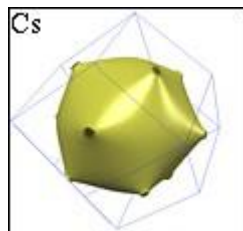
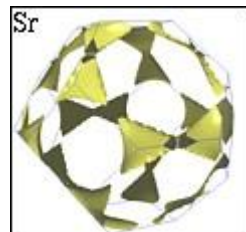
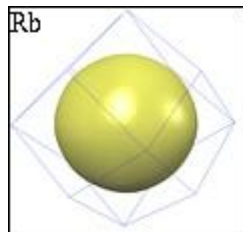
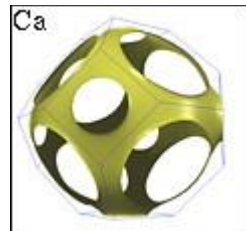
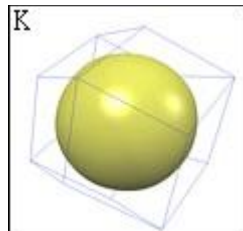
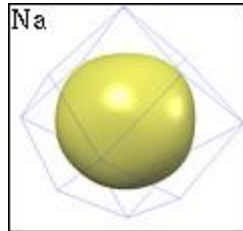
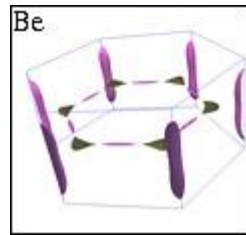
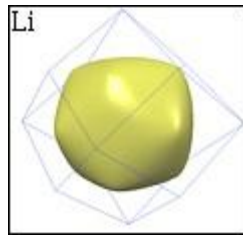
Поверхность Ферми



$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} = k_{A\delta} = \frac{\pi}{a}$$

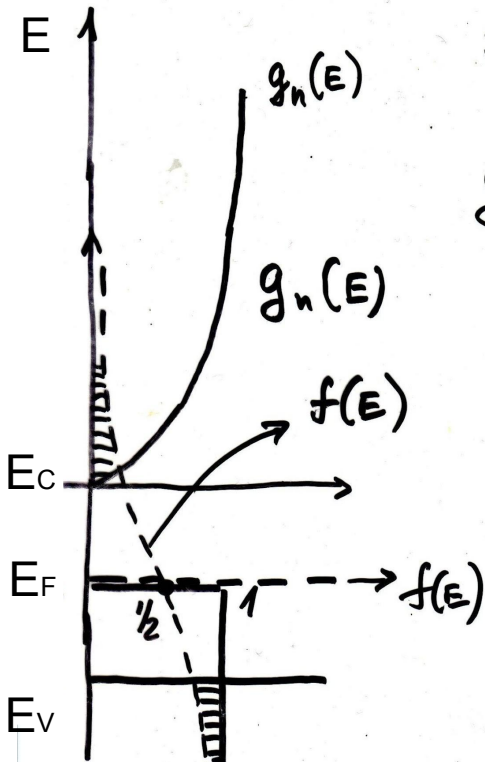


Поверхность Ферми



Связь концентрации электронов с энергией Ферми. Полупроводники.

А) Собственные



дырки ($m_p^* < 0$)

$$p = N_v F_{1/2}(-\eta - \epsilon_g) \quad (7)$$

$$f_n(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \quad (1)$$

$$g_n(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} \quad (2)$$

$$N_c = 2 \left(\frac{m_n^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (3)$$

$$\frac{E - E_c}{k_B T} = x \quad (4)$$

$$\frac{E_F - E_c}{k_B T} = \eta \quad (5)$$

$$n = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\eta} + 1} = N_c F_{1/2}(\eta)$$

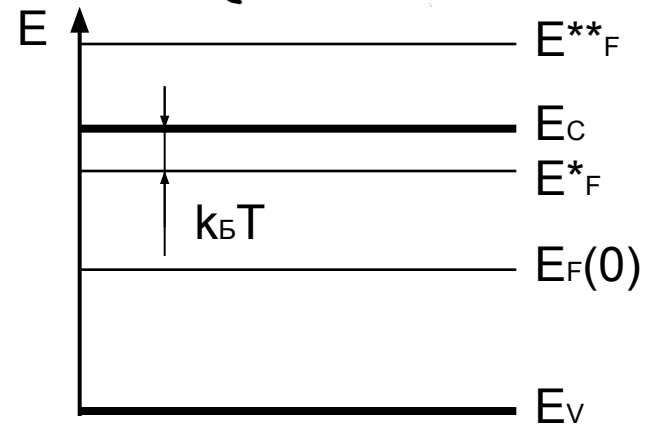
$$\epsilon_g = \frac{E_c - E_v}{k_B T} \quad (8)$$

$$N_v = 2 \left(\frac{m_p^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\eta} + 1}$$

Интеграл Ферми

$$F_{1/2}(\eta) = \begin{cases} e^{\eta} & -\infty < \eta < -1 \\ \frac{e^{\eta}}{0.3 e^{\eta} + 1} & -1 < \eta < 5 \\ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \eta^{3/2} & 5 < \eta < \infty \end{cases}$$



① Собств. ПП; невырожденный случай

$\xi < -1$ (электроны)

$$F_{1/2}(\xi) = e^{\xi}; \quad n = N_c e^{\frac{E_F - E_c}{k_B T}} \quad (10)$$

$-\xi - \xi_g < -1$ (дырки)

$$F_{1/2}(-\xi - \xi_g) = e^{-(\xi + \xi_g)}$$

$$p = N_v e^{\frac{E_v - E_F}{k_B T}} \quad (11)$$

$$n \cdot p = n_i^2 = N_c N_v e^{-\frac{E_c - E_v}{k_B T}}$$

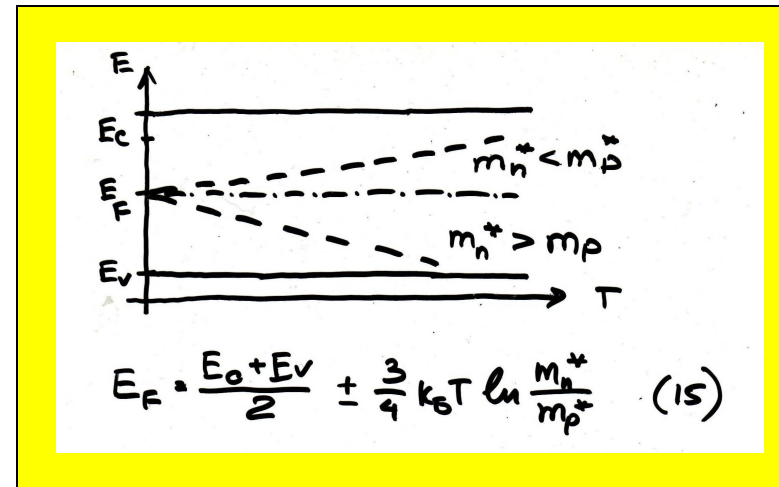
$$n = p = n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad (12)$$

$n = p$ (13) $n(T)$; $p(T)$

$$N_c e^{\frac{E_F - E_c}{k_B T}} = N_v e^{\frac{E_v - E_F}{k_B T}} \quad (13')$$

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_c}{N_v} \quad (14)$$

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_n^*}{m_p^*} \quad (15)$$



② Собств. ПП; вырожденный случай
 $\xi > 5$; $F_{1/2}(\xi) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{3/2}$ (16)

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2 m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_F - E_c)^{3/2} \quad (17)$$

$$p = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2 m_p^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (E_v - E_F)^{3/2} \quad (18)$$

Me:

$$n = \left(\frac{2 m_n^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{1}{3\pi^2} E_F^{3/2} \quad (19)$$

19 или: (17) = (11) $\rightarrow E_F(T)$

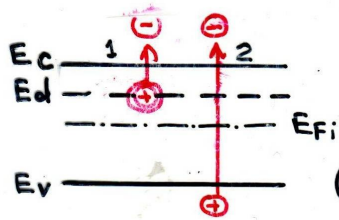
Связь концентрации электронов с энергией Ферми. Полупроводники.

Б) Примесные

n-ПП, $N_d \neq 0$, $N_a = 0$, невырожденный ПП.

$$n = p + N_d^+ \quad (14)$$

$$np = n_i^2 = N_a N_b \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right) \quad (15)$$



$T \downarrow$ - ионизация примесей (1)

$$p \approx 0 \quad n = N_d^+$$

$$(16) \quad n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{k_B T}\right) = N_d^+ \Rightarrow p_d = \frac{N_d}{2 \exp\left(\frac{E_F - E_d}{k_B T}\right) + 1}$$

$$E_F = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_d}{2 N_c} \quad (17)$$

$$T=0 \quad E_F = \frac{E_c + E_d}{2}$$

$$n = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} \exp\left(-\frac{E_d}{2 k_B T}\right) \quad (18)$$

$$T \uparrow \quad (1), (2) \quad n = p + N_d^+, \quad N_d^+ = N_d \quad (19)$$

$$n = \frac{n_i^2}{n} + N_d \quad n = \frac{N_d}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 n_i^2}{N_d^2}}\right) \quad (20)$$

$$E_F = E_c + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c} \quad (21)$$

Пояснения:

$$(n + N_a^-) e^- + (p + N_d^+) e^+ = 0 \quad (1)$$

условие электронейтральности
 $-e^+ = e^-$

$$n + N_a^- - (p + N_d^+) = 0 \quad (2)$$

$$n + N_a^- = p + N_d^+ \quad (2^*)$$

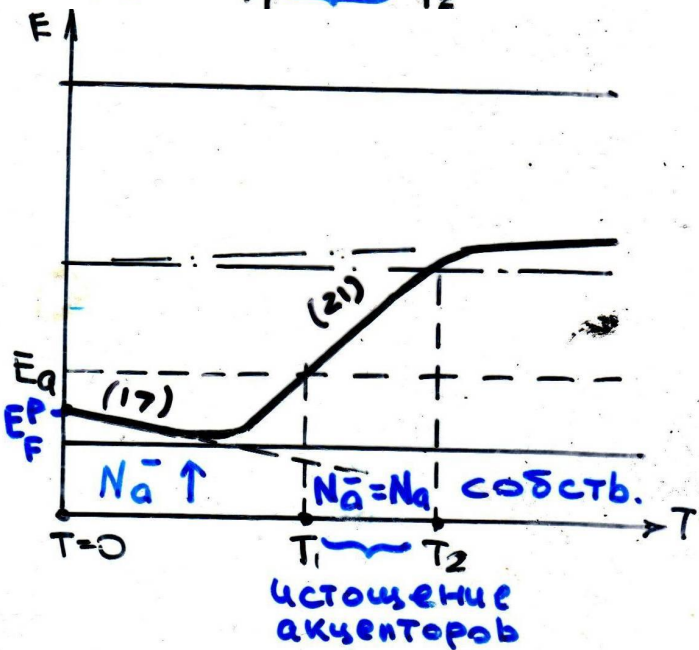
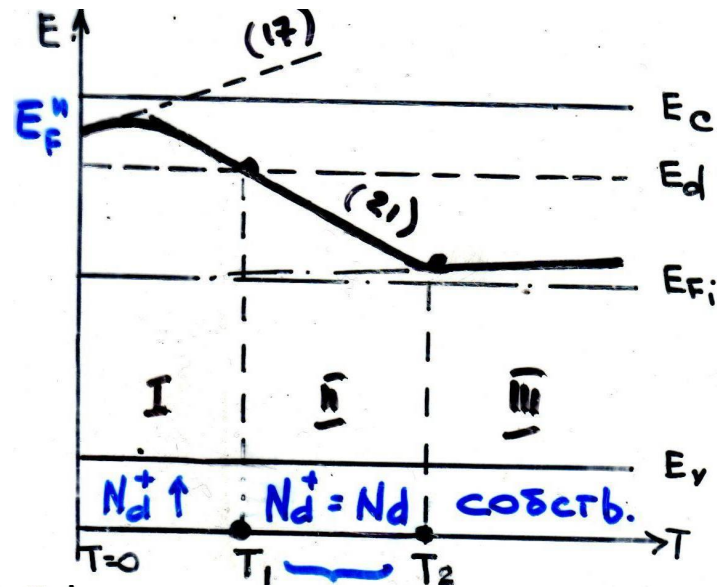
$$f_{np} = \frac{1}{\frac{1}{g_i} e^{\frac{E_{np} - E_F}{k_B T}} + 1} \quad (3)$$

$$f_n^d = \frac{1}{\frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_d - E_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (4)$$

$$f_n^a = \frac{1}{2 \exp\left(\frac{E_a - E_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (5)$$

$$g_i = 2 \text{ (доноры)}$$

$$g_i = \frac{1}{2} \text{ (акцепторы)}$$



Концентрация электронов проводимости примесного (донорного) полупроводника $n_d(T)$ дается приближенным выражением в области возрастания примесной электропроводности при $T \geq T_1$

$$n_d(T) = n_1(T) = \sqrt{\frac{1}{2} N_d \left(\frac{2\pi m_n'' kT}{h^2} \right)^{1.5}} \cdot e^{\frac{-E_g}{2kT}}$$

где N_d – концентрация донорной примеси;
 E_g – энергия активации примеси.

В области истощения примеси при $T \leq T_2$:

$$n_d(T) = n_2(T) = N_d$$

Полная концентрация электронов
 $n(T) = n_0(T) + n_d(T)$

